УДК 512.544

© **2007**

**А. В. Тушев**

# О неприводимых представлениях разрешимых групп конечного ранга над локально конечным полем

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)*

*We consider the representations of soluble groups of finite rank over a locally finite field. We found some necessary and some sufficient conditions for the existence of the faithful irreducible representations of soluble groups of finite rank over a locally finite field. The construction of an Abelian socle and a minimally infinite socle of soluble groups of finite rank plays the most important role in the conditions for the existence of such representations.*

Напомним, что группа $G$ имеет конечный ранг, если существует натуральное число $r$ такое, что каждая конечно порожденная подгруппа группы $G$ может быть порождена не более чем $r$ элементами; наименьшее натуральное число $r$, обладающее таким свойством, называется тогда рангом $r(G)$ группы $G$. Группа $G$ называется полициклической, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклическим.

Как показано в [1], если полициклическая группа $G$ обладает точным неприводимым представлением над локально конечным полем $k$, то группа $G$ является конечной. Однако из результатов работы [2] следует, что существуют бесконечные локально полициклические группы, которые обладают точными неприводимыми представлениями над локально конечным полем $k$. Более того, в [2] были найдены необходимые и достаточные условия, при которых локально полициклическая разрешимая группа конечного ранга может обладать точным неприводимым представлением над локально конечным полем $k$.

Представленная работа посвящена поиску необходимых и достаточных условий существования точных неприводимых представлений разрешимых групп конечного ранга над локально конечным полем $k$.

Подгруппа $\mathrm{Soc}(G)$ группы $G$, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами, называется цоколем группы $G$ (если группа $G$ не содержит минимальных нормальных подгрупп, то $\mathrm{Soc}(G) = 1$). Подгруппа $ab\mathrm{Soc}(G)$ группы $G$, порожденная всеми ее минимальными абелевыми нормальными подгруппами, называется абелевым цоколем группы $G$ (если группа $G$ не содержит минимальных абелевых нормальных подгрупп, то $ab\mathrm{Soc}(G) = 1$).

Абелева группа называется минимаксной, если она обладает конечным рядом подгрупп, каждый фактор которого является либо циклическим, либо квазициклическим. Пусть $B$ является абелевой минимаксной группой, тогда спектр $\mathrm{Sp}(B)$ группы $B$ — это множество простых чисел $p$ таких, что группа $B$ обладает бесконечной $p$-факторгруппой. Не трудно заметить, что множество $\mathrm{Sp}(B)$ является конечным. Если $A$ — периодическая группа, то $\pi(A)$ обозначает множество простых делителей порядков ее элементов.

Пусть $G$ — бесконечная группа, будем говорить, что бесконечная нормальня подгруппа $A$ группы $G$ является $G$-минимально бесконечной, если $|A : B| < \infty$ для любой собственной $G$-инвариантной $B$ из $A$.

Не трудно заметить, что если разрешимая группа $G$ конечного ранга содержит нормальную подгруппу без кручения, то группа $G$ содержит и минимаксную абелеву $G$-минимально бесконечную подгруппу.

**Предложение 1.** *Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга, содержащая нормальную подгруппу без кручения. Тогда группа $G$ содержит абелеву минимаксную нормальную подгруппу без кручения $ji\mathrm{Soc}(G) \neq 1$ такую, что $ji\mathrm{Soc}(G)$ является прямым произведением конечного семейства $G$-минимально-бесконечных подгрупп и $ji\mathrm{Soc}(G) \bigcap B \neq 1$ для любой нетривиальной нормальной подгруппы без кручения $B$ группы $G$.*

Следует отметить, что подгруппа $ji\mathrm{Soc}(G)$, обладающая свойствами из предыдущего утверждения, не является единственной. Однако не трудно заметить, что если $C$ — другая подгруппа группы $G$, обадающая этими свойствами, то $|ji\mathrm{Soc}(G) : (C \bigcap ji\mathrm{Soc}(G))| < \infty$ и $|C : (C \bigcap ji\mathrm{Soc}(G)\Big)| < \infty$.

Модуль $M$ над кольцом $R$ будем называть локально циклическим, если всякий его конечно порожденный подмодуль может быть порожден одним элементом.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга и пусть $k$ — локально конечное поле характеристики $p$. Если группа $G$ обладает точным неприводимым представлением над полем $k$, то абелев цоколь $ab\mathrm{Soc}(G)$ группы $G$ является локально циклическим $\mathbb{Z}G$-модулем, где группа $G$ действует на $ab\mathrm{Soc}(G)$ сопряжениями и, кроме того,* $\mathrm{char}\, k \notin \pi(ab\mathrm{Soc}(G))$.

В работе также получено следующее достаточное условие существования у разрешимой группы конечного ранга точных неприводимых представлений над локально конечным полем.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга и пусть $k$ — локально конечное поле характеристики $p$. Предположим, что абелев цоколь $ab\mathrm{Soc}(G)$ группы $G$ является локально циклическим $\mathbb{Z}G$-модулем, где группа $G$ действует на $ab\mathrm{Soc}(G)$ сопряжениями, причем $\mathrm{char}\, k \notin \pi(ab\mathrm{Soc}(G))$ и $\mathrm{char}\, k \notin \mathrm{Sp}(ji\mathrm{Soc}(G))$. Тогда группа $G$ обладает точным неприводимым представлением над полем $k$.*

Следует отметить, что предыдущая теорема не дает необходимого условия для существования у разрешимой группы конечного ранга точных неприводимых представлений над локально конечным полем. Это следует из результатов работы [3], в которой был построен простой $kG$-модуль, где $k$ — поле порядка $p$, $G$ — разрешимая группа ранга 2 и $ji\mathrm{Soc}(G)$ является $p$-делимой группой без кручения.


1. *Roseblade J. E.* Groups rings of polycyclic groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1973. – **3**. – P. 307–328.
2. *Тушев А. В.* Неприводимые представления локально полициклических групп над абсолютным полем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1389–1394.
3. *Wehrfritz B. A. F.* Groups whose irreducible representations have finite degree // Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. – 1981. – **90**. – P. 411–421.



*Днепропетровский национальный университет*


*Поступило в редакцию 13.06.2006*