Таким образом, принимая во внимание (3), (11) и представление общего непрерывного при $t \geqslant T$ решения системы уравнений (12), можно получить представление общего непрерывного при $t \geqslant T$ решения системы уравнений (1):

$$x(t) = \gamma(t)C\widetilde{y}(t). \tag{14}$$

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Soc. – 1911. – **12**, No 2. – P. 242–284.
2. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 127 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – Москва: Мир, 1971. – 307 с.
5. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 514–519.
6. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН. – 1994. – **336**, № 4. – С. 451–452.
7. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 2006. – **73**, № 2. – С. 269–272.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.06.2006

УДК 517.9

В. В. Потороча, В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко

Про залежність розв'язку від параметра виродженої системи диференціальних рівнянь

(Представлено академіком НАН України Ю. О. Митропольським)

We prove the theorem on the continuous dependence of a solution to a degenerate system of differential equations on a parameter in the case of non-fulfilment of the condition "rank-degree".

При асимптотичному інтегруванні [1] диференціальних рівнянь з малим параметром істотно використовуються теореми про неперервну залежність їх розв'язку від малого параметра. Якщо така система регулярним чином залежить від малого параметра, то використовуються класичні теореми [2–4] про неперервну (нескінченно неперервну) диференційовність розв'язку від параметра, а у випадку, коли розглядаються сингулярно збурені диференціальні рівняння, — теорема Тихонова [5], доведена автором для систем, які називаються системами Тихонова [6]. Ця ж теорема фактично може бути використана як підгрунтя для обгрунтування асимптотичного характеру так званих формальних розв'язків у випадку сингулярно збурених диференціальних рівнянь цілого рангу [7–9].

Проблема залежності розв'язку від параметра істотно ускладнюється у випадку сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням, тобто у випадку, коли такі системи містять деяку особливу матрицю при похідній і коли, як наслідок, таку систему не можна звести до іншої системи диференціальних рівнянь цілого рангу, оскільки внаслідок виродженості матриці при похідній такі системи зводяться до так званих гібридних систем рівнянь [8–10]. При цьому істотне значення мають властивості в'язки матриць [8] та жорданова структура матриці при похідній.

В [11] доведено теорему про неперервно диференційовну залежність від параметра розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з виродженням у випадку виконання умови "ранг-степінь" [8, 12]. У даній роботі цей результат поширено на випадок, коли умова "ранг-степінь" не виконується.

Постановка задачі. Розглядається вироджена система диференціальних рівнянь

$$B(t,\lambda)\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(t_0,\lambda) = x_0(\lambda), \tag{2}$$

де $f(t,x,\lambda)\colon \mathbb{R}^{n+1}\times I(\lambda_0)\to\mathbb{R}^n$, $I(\lambda_0) = (\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$, $\delta > 0$, λ_0 — деяке фіксоване число, $B(t,\lambda)$ — особлива $(n\times n)$-матриця.

Надалі припускаємо, що для системи (1) виконуються такі умови:

1) $\det B(t,\lambda)\equiv 0$ при всіх $\lambda\in I(\lambda_0)$, $t\in(a;b)$, де $(a;b)$ — деякий інтервал, що містить точку t_0;

2) при кожному $\lambda\in I(\lambda_0)$ та всіх $t\in(a;b)$ в'язка матриць $E-\kappa B(t,\lambda)$ має один кратний скінченний та один кратний нескінченний елементарний дільник кратностей s та m відповідно, кратність яких не залежить від λ та t $(s+m=n)$;

3) вектор-функція $f(t,x,\lambda)$ є n раз неперервно диференційовною стосовно змінних (t,x,λ) в області $G=\mathbb{R}^{n+1}\times I(\lambda_0)$;

4) матриця $B(t,\lambda)$ є $n+1$ раз неперервно диференційовною стосовно змінних (t,λ) і не змінює свого рангу в області G;

5) задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок $x=\varphi(t,\lambda)$, який при кожному $\lambda\in I(\lambda_0)$ визначено на інтервалі $(a;b)$;

6) вектор початкових умов (2) неперервно диференційовно залежить від λ.

Як відомо [12], при виконанні умов 1, 2 існують такі неперервно диференційовні за t, λ неособливі матриці $P(t,\lambda)$ та $Q(t,\lambda)$, що для всіх $t\in(a;b)$ та $\lambda\in I(\lambda_0)$ справедлива рівність

$$P(t,\lambda)B(t,\lambda)Q(t,\lambda) = H, \qquad H=\mathrm{diag}(E_s, J), \tag{3}$$

де E_s — одинична $(s\times s)$-матриця; J — нільпотентна Жорданова $(m\times m)$-матриця, $s+m=n$.

Тоді, виконавши в системі (1) заміну

$$x = Q(t,\lambda)y, \tag{4}$$

перейдемо від початкової задачі (1), (2) до еквівалентної задачі Коші

$$H\frac{dy}{dt} = G(t,y,\lambda), \tag{5}$$

$$y_0(t_0,\lambda) = Q^{-1}(t_0,\lambda)x_0(\lambda), \tag{6}$$

де

$$G(t,y,\lambda) = P(t,\lambda)f(t,Q(t,\lambda)y,\lambda) - HQ^{-1}(t,\lambda)\frac{d}{dt}Q(t,\lambda)y. \tag{7}$$

Враховуючи структуру матриці H, систему (5) можна записати у вигляді:

$$\frac{du}{dt} = G_1(t,u,v,\lambda), \tag{8}$$

$$J\frac{dv}{dt} = G_2(t,u,v,\lambda), \tag{9}$$

де $y = \mathrm{colon}(u,v)$, $G(t,y,\lambda) = \mathrm{colon}(G_1(t,u,v,\lambda), G_2(t,u,v,\lambda)) = \mathrm{colon}(g_1(t,u,v,\lambda), g_2(t,u,v,\lambda),\ldots,g_n(t,u,v,\lambda))$; $u, G_1 \in \mathbb{R}^s$, $v, G_2 \in \mathbb{R}^m$, $s+m=n$.

Справедлива теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1–6. Тоді розв'язок $\varphi(t,\lambda)$ задачі* (1), (2) *як функція параметра λ є неперервно диференційовною функцією стосовно λ в точці $\lambda = \lambda_0$ при кожному t з деякого околу точки t_0. Більше того, якщо функція $f(t,x,\lambda)$ є $k+n$ раз неперервно диференційовною стосовно x, λ в області G, то $\varphi(t,\lambda)$ як функція параметра λ є k раз неперервно диференційовною функцією стосовно λ в точці $\lambda = \lambda_0$ при кожному t з деякого околу точки t_0.*

Доведення. З умови 6 та неособливості матриці $Q(t,\lambda)$ випливає, що задача Коші (8), (9), (6) має єдиний розв'язок $y(t,\lambda) = Q^{-1}(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)$, який при кожному $\lambda \in I(\lambda_0)$ визначено на інтервалі $(a;b)$.

На підставі неперервної диференційовності вектор-функції $f(t,x,\lambda)$ та матриць $B(t,\lambda)$, $P(t,\lambda)$, $Q(t,\lambda)$ при $\lambda \in I(\lambda_0)$ та $t \in (a;b)$ вектор-функція $G(t,y,\lambda)$ є неперервно диференційовною в деякому околі V точки (t_0,y_0,λ_0), а матриця $\partial G/\partial y$ — неперервною в околі V.

Покладемо $z = \mathrm{colon}(u_1,u_2,\ldots,u_s,v_2,v_3,\ldots,v_n) = \mathrm{colon}(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$, $F(t,z,v_1,\lambda) = \mathrm{colon}(g_1(t,z,v_1,\lambda), g_2(t,z,v_1,\lambda),\ldots,g_{n-1}(t,z,v_1,\lambda))$. Тоді система (8), (9) перепишеться у вигляді:

$$\frac{dz}{dt} = F(t,z,v_1,\lambda), \tag{10}$$

$$g_n(t,z,v_1,\lambda) = 0. \tag{11}$$

Покажемо, що розв'язок $y = y(t,\lambda)$ задачі Коші (8), (9), (6) неперервно диференційовно залежить від параметра λ.

З умови 6 випливає, що $\dfrac{\partial g_n(t,y,\lambda)}{\partial y} \neq 0$ в деякому проколотому околі $\dot{V}_1 \subset V$ точки (t_0,y_0,λ_0).

Розглянемо такі випадки:

I) $\dfrac{\partial g_n(t,z,v_1,\lambda)}{\partial v_1} \neq 0$ в околі $\dot{V}_1$;

II) $\dfrac{\partial g_n(t,z,v_1,\lambda)}{\partial v_1} = 0$, $\dfrac{\partial g_n(t,z,v_1,\lambda)}{\partial z} \neq 0$, в околі $\dot{V}_1$.

Випадок I. Враховуючи неперервну диференційовність за всіма змінними функції $g_n(t,y,\lambda)$, рівність $g_n(t_0,y_0,\lambda_0) = 0$, єдиність розв'язку задачі (10), (11), (6), на підставі теореми про неявну функцію маємо, що існує окіл U точки (t_0, z_0, λ_0) та функція $h(t, z, \lambda)$ такі, що для всіх $(t, z, \lambda) \in U$ виконується рівність $R(t, z, h(t, z, \lambda), \lambda) = 0$, тобто

$$v_1 = h(t, z, \lambda) \tag{12}$$

є функцією, що неявно визначена рівністю (11). При цьому функція $h(t, z, \lambda)$ в околі U є неперервно диференційовною за $(t, z, \lambda) \in U$.

Тоді, підставивши (12) в (11), використовуючи теорему [2–4] про залежність розв'язку задачі Коші від параметра для нормальної системи диференціальних рівнянь, враховуючи (11), робимо висновок, що розв'язок задачі (10), (11), (6) неперервно диференційовний за λ в точці $\lambda = \lambda_0$ при всіх t з деякого околу точки t_0, а отже, функція $x = \varphi(t, \lambda)$ — розв'язок задачі (1), (2) є неперервно диференційовною за λ в точці $\lambda = \lambda_0$ при всіх t з деякого околу точки t_0.

Випадок II. Оскільки в околі $\dot{V}_1$ вектор-функція $\dfrac{\partial g_n(t, z, v_1, \lambda)}{\partial z}$ відмінна від нуля, то хоча б одна з величин $\dfrac{\partial g_n(t, z, v_1, \lambda)}{\partial z_i}$, $i = \overline{1, n-1}$, відмінна від нуля. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $\dfrac{\partial g_n(t, z, v_1, \lambda)}{\partial z_{n-1}} \neq 0$ в околі $\dot{V}_1$. Позначимо $\xi = \operatorname{colon}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})$, тоді, враховуючи неперервну диференційовність за всіма змінними функції $g_n(t, z, v_1, \lambda)$, рівність $g_n(t_0, z_0, v_{10}, \lambda_0) = 0$, єдиність розв'язку задачі (10), (11), (6), на підставі теореми про неявну функцію маємо, що існує окіл U точки $(t_0, \xi_0, v_{10}, \lambda_0)$ та функція $h(t, \xi, v_1, \lambda)$ такі, що для всіх $(t, \xi, v_1, \lambda) \in U$ виконується рівність $h(t, \xi, h(t, \xi, v_1, \lambda), v_1, \lambda) = 0$, тобто

$$z_{n-1} = h(t, \xi, v_1, \lambda) \tag{13}$$

є функцією, що неявно визначена рівністю (11). При цьому функція $h(t, \xi, v_1, \lambda)$ в околі U є неперервно диференційовною за $(t, \xi, v_1, \lambda) \in U$.

Підставивши (13) в (10), одержимо систему вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = R_1(t, \xi, v_1, \lambda), \tag{14}$$

$$R_2(t, \xi, v_1, \lambda) = 0, \tag{15}$$

де

$$R_2(t, \xi, v_1, \lambda) = \frac{h(t, \xi, v_1, \lambda)}{dt} - g_{n-1}(t, \xi, h(t, \xi, v_1, \lambda), v_1, \lambda),$$

$$R_1(t, \xi, v_1 \lambda) = \operatorname{colon}(g_1(t, \xi, h(t, \xi, v_1, \lambda), v_1, \lambda), \ldots, g_{n-2}(t, \xi, h(t, \xi, v_1, \lambda), v_1, \lambda)).$$

Одержана система (14), (15) складається з $n-2$ диференціальних рівнянь і одного функціонального співвідношення. Ця система з початковими умовами для функцій ξ, v_1, які можна однозначно отримати з початкових умов (6), повністю аналогічна задачі (10), (11), (6), але на відміну від неї містить вже лише $(n-1)$-е рівняння для $(n-1)$-ї невідомої функції.

Повторюючи міркування, викладені вище при аналізі задачі (10), (11), (6), порядок системи (14), (15) можна понизити на 1, а отже, за скінченну кількість кроків задачу (10), (11), (6) можна звести або до задачі Коші для деякої системи диференціальних рівнянь з початковими умовами, що випливають з (6), або ж до співвідношень, які неявним чином визначають невідому функцію, та відповідних "початкових" умов для такої функції, які випливають з (6). У кожному з цих випадків розв'язок неперервно диференційовно залежить від λ в точці λ_0.

Теорему доведено.

Таким чином, доведено теорему про неперервно диференційовну залежність від параметра розв'язку задачі Коші для виродженої нелінійної системи диференціальних рівнянь.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Карташов А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1974. – 331 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
5. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. – 1948. – **22 (69)**, № 2. – С. 193–204.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Москва: Высш. шк., 1990. – 208 с.
7. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 228 с.
8. *Шкіль М. І., Старун І. І., Яковець В. П.* Асимптотичне інтегрування лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь. – Київ: Вища шк., 1989. – 287 с.
9. *Потороча В. В. Самойленко В. Г.* Асимптотична оцінка для наближеного розв'язку задачі Коші для сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженням та імпульсною дією у випадку кратних коренів // Доп. НАН України. – 2005. – № 12. – С. 45–50.
10. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
11. *Потороча В. В., Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Неперервно диференційовна залежність розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь від параметра // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 19–24.
12. *Старун И. И., Шкиль Н. И.* Расщепление сингулярно возмущенных систем // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1542–1548.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 20.06.2006