УДК 519.21

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

© Нікітін А.В.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича
факультет прикладної математики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: *nik_tol@rambler.ru*

Abstract.We obtain conditions of asymptotical stability in mean square of solutions of systems of stohastic Ito-Skorochod differential equations in space of Hilbert.

Вступ

Асимптотичні задачі для стохастичних диференціальних рівнянь виникали і розв'язувалися одночасно з виникненням теорії стохастичних диференціальних рівнянь, оскільки засновник цієї теорії Й.І. Гіхман розглядав задачі про асимптотичну поведінку як первинні. Самі стохастичні диференціальні рівняння будувалися Й.І. Гіхманом для того, щоб можна було не тільки строго сформулювати асимптотичні задачі, але й їх розв'язувати. Можна виділити такі напрямки дослідження асимптотичних властивостей динамічних систем з випадковими збуреннями:

1) дослідження поведінки динамічної системи при $t \to \infty$;
2) дослідження системи, що залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$ при його прямуванні до 0;
3) дослідження системи при одночасному прямуванні ε до 0, а t до $+\infty$.

При розгляді асимптотичної поведінки динамічної системи дослідників цікавить стабілізація цієї системи. Терміном "стабілізація"системи можна характеризувати деяку закономірність, яка притаманна поведінці системи. Найбільш грубим характером такої стабілізації є обмеженість за ймовірністю, з якої випливає ергодичність динамічної системи. Ця властивість найбільш точно характеризує поведінку системи на проміжку $[0, +\infty)$. При вивченні поведінки динамічних систем на $[0, +\infty)$ природно виникають питання про асимптотичну стійкість цієї системи в околі стану рівноваги чи її нестійкість. Для стохастичних систем при певних припущеннях із стійкості випливає асимптотична стійкість. Особливу зацікавленість представляють собою лінійні системи, для яких фазова нульова точка є єдиною точкою рівноваги. Такі системи або стійкі, або нестійкі, при цьому система або прямує до безмежності, або осцилює. Перенесення результатів, що стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на безмежновимірний випадок далеко не тривіальне. Вивчення стохастичних лінійних систем призвело до поняття стохастичної півгрупи, яке ввів А.В. Скороход. Середньоквадратична стійкість розв'язків лінійних лінійних стохастичних диференціальних рівнянь пов'язана зі стійкістю вже невипадкових півгруп у банаховому просторі лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі. Дана робота продовжує ці дослідження і присвячена аналізу стійкості систем стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями у гільбертовому просторі у нескінченновимірному випадку.

1. Перший розділ

Нехай X – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$;. Розглянемо випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega), t \leq t_0\} \subset R^n$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) як сильний розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{\infty}[B_i x(t)dW_i(t) + \int_U C_i(u)x(t)\tilde{\nu}_i(dt,du)],\ t > t_0, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

де $\{W_1(t)\}, \{W_2(t)\}, ...$ – стандартні вінерівські процеси; $\tilde{\nu}_1(dt,du), \tilde{\nu}_r(dt,du), ...$ – центровані пуассонівські міри; $A, B_i, i = 1,2,...$ – дійсні матриці розміру $n \times n$; $\{C_j(u)\}$, $j = 1,2,...$ – матриці-функції такі, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_U |C_j(u)|^2 \Pi_j(du) < +\infty.$$

Вивчимо питання асимптотичної поведінки розв'язку системи (1), (2) на нескінченному інтервалі часу.

Теорема 1. (критерій асимптотичної стійкості у середньому квадратичному) *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1) матриця A гурвіцева;

2) існує розв'язок $H \equiv H^T > 0_{n\times n}$ узагальненого матричного рівняння Сільвестра

$$A^T H + HA + \sum_{i=1}^{\infty}[B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u)\Pi_i(du)] = -G, \tag{3}$$

де $G \equiv G^T > 0_{n\times n}$.

Доведення. Оскільки система (1) лінійна і автономна, то потрібну функцію Ляпунова слід шукати серед додатно визначених квадратичних форм вигляду

$$v(x) = x^T H x, \tag{4}$$

де невідому матрицю $H \equiv H^T > 0_{n\times n}$ визначимо далі.

Перевіримо умови, якими повинна володіти функція Ляпунова, щоб розвязок системи був асимптотично стійким у середньому квадратичному:

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq v(x) = x^T H x \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2,$$

Обчислимо оператор $Lv(x)$ на розв'язках системи (1):

$$Lv(x) = (\nabla v(x), Ax) + \frac{1}{2} sp \sum_{i=1}^{\infty} \nabla^2 v(x) B_i x (B_i x)^T +$$

$$+ \int_U v(x + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(u)x) - v(x) - (\nabla v(x), \sum_{i=1}^{\infty} C_i(u)x(t))\Pi_i(du) =$$

$$= x^T A^T H x + x^T H A x + \sum_{i=1}^{\infty} [x^T B_i^T H B_i x + \int_U x^T C_i^T(u) H C_i(u) x \Pi_i(du)] =$$

$$= x^T [A^T H + HA + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]] x.$$

Оператор $Lv(x)$ буде від'ємним тоді і тільки тоді, коли матриця

$$A^T H + HA + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]$$

буде від'ємно визначеною, що, у свою чергу, можливо тоді і тільки тоді, коли матриця $H \equiv H^T > 0_{n\times n}$ знаходиться як розв'язок (3). Теорему доведено. □

Розглянемо функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$v(x) = x^T H_0 x, \tag{5}$$

де $H_0 \equiv H_0^T > 0_{n\times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H_0 + H_0 A = -G, \tag{6}$$

де $G \equiv G^T > 0_{n\times n}$. Рівняння (6) виникає з рівняння (3) при відсутності випадкових збурень.

Теорема 2. *Для гурвіцевої матриці A розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді, коли виконуєтсья нерівність*

$$A^T H_0 + H_0 A + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H_0 B_i + \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)] < 0_{n\times n},$$

де $H_0 \equiv H_0^T > 0_{n\times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова (6).

Доведення теореми 2 здійснюється повторенням ходу доведення теореми 1 стосовно функції Ляпунова (5).

Теорема 3. *Розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) з невиродженими матрицями B_i та $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$ асимптотично стійкий у середньому квадратичному, якщо матриця A гурвіцева і виконується матрична нерівність*

$$\sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T (H_{00} - I) B_i + \int_U C_i^T(u)(H_{00} - I) C_i(u) \Pi_i(du)] \le 0_{n\times n},$$

де $H_{00} \equiv H_{00}^T > 0_{n\times n}$ *– розв'язок матричного рівняння Ляпунова*

$$A^T H_{00} + H_{00}A = -\sum_{i=1}^{\infty}[B_i^T B_i + \int\limits_U C_i^T(u)C_i(u)\Pi_i(du)]. \qquad (7)$$

Доведення. Оскільки у випадку невиродженості матриць B_i та $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$, виконуються нерівності

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i^T B_i > 0_{n\times n}, \ \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_U C_i^T(u)C_i(u)\Pi_i(du) > 0_{n\times n},$$

то функцією Ляпунова для збуреної задачі (1), (2) може бути квадратична форма фазових змінних

$$v(x) = x^T H_{00}x, \qquad (8)$$

де $H_{00} \equiv H_{00}^T > 0_{n\times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова (7).

Оскільки вимагається від'ємність $Lv(x)$ на розв'язках задачі (1), (2), то виконується нерівність

$$A^T H_{00} + H_{00}A + \sum_{i=1}^{\infty}[B_i^T H_{00}B_i + \int\limits_U C_i^T(u)H_{00}C_i(u)\Pi_i(du)] < 0_{n\times n},$$

звідки, враховуючи (7), отримуємо твердження теореми 3. □

Теорема 4. *Для стійкої матриці A і невироджених матриць B_i та $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$, достатньою умовою асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) є виконання для сліду матриці H_{00} нерівності*

$$trH_{00} < 1. \qquad (9)$$

Доведення. Згідно твердження теореми 3, достатньою умовою асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) є виконання нерівності

$$\sum_{i=1}^{\infty}[B_i^T(H_{00} - I)B_i + \int\limits_U C_i^T(u)(H_{00} - I)C_i(u)\Pi_i(du)] \le 0_{n\times n},$$

яка справедлива тоді і тільки тоді, коли від'ємно визначеною є матриця $H_{00} - I$. Звідси випливає, що всі власні значення додатно визначеної матриці H_{00} повинні бути менші за одиницю, тобто $\lambda(H_{00}) < 1$. Достатньою умовою того, щоб $\lambda(H_{00}) < 1$ є нерівність (9) для сліду матриці H_{00} [3]. Теорему 4 доведено. □

Заключення

У роботі одержані наступні результати: встановлені необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків ЛСДР Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

Список літератури

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Нікітін А.В.* Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з векторним вінерівським процесом та пуассонівськими перемиканнями // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, В.3, 2001. – С. 312-319.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 04.04.2009