УДК 519.8

ОЦІНЮВАННЯ ЗА ЗАШУМЛЕННИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ НЕВІДОМИХ ДАНИХ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗМІШАНЕ ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ

© Горбатенко М.Ю.

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича
факультет прикладної математики
вул. Університетська 28, м. Чернівці, 58000, Україна
e-mail: *Mikola.Gorbatenko@gmail.com*

Abstract. We obtain a new class of systems of variational equations via whose solutions the minimax estimates of values of functionals from unknown right-hand sides of the second order linear elliptic equations are expressed.

Вступ

Більшість результатів в галузі мінімаксного оцінювання була одержана з використанням традиційної постановки відповідних варіаційних крайових задач, доведення існування і єдиності розв'язків яких істотно спирається на відому лему Лакса–Мільграма (див. [1] і вказану там літературу).

Такий підхід дозволяє, наприклад, в стаціонарних задачах теплопровідності оцінювати невідомий розподіл щільності джерел за спостереженнями температури. Однак не менший інтерес являє собою також задача оцінювання цього розподілу за спостереженнями теплового потоку. Відмітимо, що відомі на цей час методи оцінювання не дозволяють розв'язувати подібні задачі.

В роботі запропоновано новий метод, який дає змогу оцінювати невідомий розподіл щільністі джерел, як за спостереженнями температури, так і за спостереженнями теплового потоку.

Розроблений метод спирається на змішані варіаційні постановки, започатковані в роботах І. Бабушки і Ф. Брецці (див. [12]).

Названі задачі оцінювання мають важливе прикладне значення в багатьох галузях, тому їх теоретичний аналіз є актуальним.

1. Допоміжні факти

В роботі використовуються наступні позначення:

H – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ і нормою $\|\cdot\|_H$;

$J_H \in \mathscr{L}(H, H')$ – оператор, що називається ізометричним ізоморфізмом, який діє з H на його спряжений простір H' та визначається рівністю[1] $(v,u)_H = < v, J_H u >_{H\times H'}$ $\forall u, v \in H$, де $< x, f >_{H\times H'} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$;

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ – просторова змінна, що змінюється в обмеженій відкритій множині $D \subset \mathbb{R}^n$, з ліпшицевою границею Γ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$;

$L^2(D)$ – простір функцій, сумовних з квадратом в області D;

[1]Цей оператор існує в силу теореми Рісса.

$H^k(D)$ і $H_0^k(D)$ – стандартні простори Соболєва цілого порядку $k > 0$ в області D з відповідною нормою;

$\mathbf{grad}\, p := (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n})^T$; $\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$;[2]

$H(\operatorname{div}; D) := \{\mathbf{v} \in L^2(D)^n, \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(D)\}$ – гільбертів простір з нормою $\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div};D)} := \{\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(D)^n} + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2_{L^2(D)}\}^{1/2}$;

Позначимо через $L^2(\Omega, H)$ простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi = \xi(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ зі значеннями в H таких, що

$$\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty. \tag{1}$$

В цьому випадку існує інтеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, що називається математичним сподіванням або середнім випадкового елемента $\xi(\omega)$, що задовольняє умову

$$(h, \mathbb{E}\xi)_H = \int_\Omega (h, \xi(\omega))_H \, dP(\omega) \quad \forall h \in H. \tag{2}$$

Застосовуючи до випадкової величини ξ це визначення приводить до традиційного означення її математичного сподівання, оскільки інтеграл Бохнера (1) переходить у звичайний інтеграл Лебега по ймовірнісній мірі $dP(\omega)$. У $L^2(\Omega, H)$ можна ввести скалярний добуток:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int_\Omega (\xi(\omega), \eta(\omega))_H \, dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \tag{3}$$

Використовуючи знак математичного сподівання для випадкових величин, рівності (1)–(3) можна записати у вигляді:

$$\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \mathbb{E}\|\xi(\omega)\|^2_H, \tag{4}$$

$$(h, \mathbb{E}\xi)_H = \mathbb{E}(h, \xi(\omega))_H \quad \forall h \in H, \tag{5}$$

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \mathbb{E}(\xi(\omega), \eta(\omega))_H \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \tag{6}$$

Простір $L^2(\Omega, H)$, оснащений нормою (4) і скалярним добутком (6), є гільбертовим.

Постановка задачі оцінювання. Нехай стан системи характеризується функцією $\varphi(x)$, яка визначаються як узагальнений розв'язок крайової задачі Діріхле:

$$-\operatorname{div} (\mathbf{A}\, \mathbf{grad}\, \varphi) = f \quad \text{в} \quad D, \tag{7}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{8}$$

яку, увівши змінну $\mathbf{j} = -\mathbf{A}\, \mathbf{grad}\, \varphi$, можна записати у вигляді еквівалентної системи першого порядку:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{j} = \mathbf{grad}\, \varphi \quad \text{в} \quad D, \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = f \quad \text{в} \quad D, \quad \varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{10}$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ симетрична $n \times n$-матриця з елементами $a_{ij} \in L^\infty(D)$, для якої існують такі додатні числа μ_1 і μ_2, що виконується нерівність

[2]Частинні похідні, що входять до виразів $\mathbf{grad}\, p$ і $\operatorname{div} \mathbf{v}$ слід розуміти у сенсі розподілів у D.

$\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall x \in D, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, через $\mathbf{A}^{-1}$ позначена, обернена до $\mathbf{A}$. У відповідності з [12], під узагальненим розв'язком задачі (9)–(10) будемо розуміти пару функцій $(\mathbf{j}, \varphi) \in H(\mathrm{div}; D) \times L^2(\Omega)$, що задовольняє співвідношенням

$$\int\limits_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{j}(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int\limits_D \varphi(x)\mathrm{div}\, \mathbf{q}(x)\, dx = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}; D) \tag{11}$$

$$\int\limits_D v\mathrm{div}\, \mathbf{j}(x)\, dx = \int\limits_D f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in L^2(D). \tag{12}$$

Зауважимо, що із (11) і (12) випливає $\varphi \in H_0^1(D)$.

З фізичної токи зору, крайова задача (4)–(6), або еквівалента до неї задача (9)–(10), моделює усталений процесс розповсюдження тепла в області D, при цьому функції $\varphi(x)$, $A^{-1}(x)\mathbf{j}(x)$ і $f(x)$ відповідно мають смисл температури, теплового потоку і об'ємної щільності теплових джерел в точці x.

Відзначимо ще, що для знаходження узагальненого розв'язку в [12] на базі так званого змішаного методу скінченних елементів, розроблені ефективні чисельні алгоритми.

Вважається, що функція $f(x)$ у рівняннях (10) і (12) – невідома і належить множині

$$G_0 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(D) : \Big(Q(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0 \Big)_{L^2(D)} \le 1 \right\}, \tag{13}$$

де $f_0 \in L^2(D)$ – задана функція, $Q : L^2(D) \to L^2(D)$ – неперервний додатньо визначений самоспряжений оператор, обернений для якого обмежений.

Задача, що досліджується в даній роботі, полягає в тому, щоб за спостереженням випадкових елементів вигляду

$$y_1(\mathbf{j}; \eta_1) = C_1\mathbf{j} + \eta_1, \quad y_2(\varphi; \eta_2) = C_2\varphi + \eta_2, \tag{14}$$

що належать сепарабельним гільбертовим просторам H_1 і H_2 над $\mathbb{R}$ відповідно, оцінити значення лінійного функціоналу

$$l(f) := \int\limits_D l_0(x)f(x)\, dx \tag{15}$$

в класі оцінок вигляду

$$\widehat{l(f)} := (y_1(\mathbf{j}; \eta_1), u_1)_{H_1} + (y_2(\varphi; \eta_2), u_2)_{H_2} + c, \tag{16}$$

де $(\mathbf{j}, \varphi)$ – невідомий узагальнений розв'язок задачі (9)–(10), l_0 – заданий елемент із $L^2(D)^n$ і $L^2(D)$, $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$, $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathscr{L}(L^2(D)^n, H_1)$ і $C_2 \in \mathscr{L}(L^2(D), H_2)$– лінійні неперервні оператори, $(\eta_1, \eta_2) \in G_1$, а через G_1 позначено множину випадкових елементів $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_1(\omega) \in L^2(\Omega, H_1)$ і $\tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}_2(\omega) \in L^2(\Omega, H_2)$ з нульовими середніми, що задовольняють умову

$$\mathbb{E}(\tilde{Q}_1\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + \mathbb{E}(\tilde{Q}_2\tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} \le 1, \tag{17}$$

в якій $\tilde{Q}_1$ і $\tilde{Q}_2$ – задані в H_1 і H_2 обмежені самоспряжені додатньо визначені оператори, що мають обмежені обернені.

Означення 1. Оцінку вигляду

$$\widehat{\widehat{l(f)}} = (y_1(\mathbf{j};\eta_1), \hat{u}_1)_{H_1} + (y_2(\varphi;\eta_2), \hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c} \tag{18}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою $l(f)$, якщо елементи $\hat{u}_1 \in H_1$, $\hat{u}_2 \in H_2$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\sup_{\tilde{f}\in G_0,(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{f}) - \widehat{l(\tilde{f})}|^2 \to \inf_{u_1\in H_1,u_2\in H_2,c\in\mathbb{R}}, \tag{19}$$

де $\widehat{l(\tilde{f})} := (y_1(\tilde{\mathbf{j}};\tilde{\eta}_1), u_1)_{H_1} + (y_2(\tilde{\varphi};\tilde{\eta}_2), u_2)_{H_2} + c$, $(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})$ – розв'язок задачі (9)–(10) при $f(x) = \tilde{f}(x)$. Величину $\varrho := \{\mathbb{E}|l(\tilde{f}) - \widehat{\widehat{l(\tilde{f})}}|^2\}^{1/2}$ будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(f)$.

2. Представлення для мінімаксних оцінок і похибок оцінювання

Введемо до розгляду, при фіксованому $u := (u_1, u_2) \in H_1 \times H_2 := H$, пару функцій $(\mathbf{z}_1(\cdot;u), z_2(\cdot;u)) \in H(\mathrm{div}; D) \times L^2(D)$, як єдиний розв'язок наступної крайової задачі:

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{z}_1(\cdot;u) = \mathbf{grad}\, z_2(\cdot;u) - C_1^t J_{H_1} u_1 \quad \text{в} \quad D, \tag{20}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(\cdot;u) = -C_2^t J_{H_2} u_2 \quad \text{в} \quad D, \tag{21}$$

$$z_2(\cdot;u) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{22}$$

під яким слід розуміти розв'язок варіаційної задачі

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{z}_1(x;u), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x;u)\mathrm{div}\,\mathbf{q}(x)\,dx = \\ = -\int_D ((C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{23}$$

$$\int_D v(x)\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(x;u)\,dx = -\int_D (C_2^t J_{H_2} u_2)(x) v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(D), \text{в} \quad D, \tag{24}$$

де $C_1^t : H_1' \to L^2(D)^n$ і $C_2^t : H_2' \to L^2(D)$ – оператори, транспоновані до C_1 і C_2, що визначаються співвідношеннями $\int_D (v(x), C_1^t w(x))_{\mathbb{R}^n} dx =< Cv, w >_{H_1\times H_1'}$ для всіх $v \in L^2(D)^n$, $w \in H_1'$ і $\int_D v(x) C_2^t w(x)\,dx =< Cv, w >_{H_2\times H_2'}$ для всіх $v \in L^2(D)$, $w \in H_2'$. Із (23) і (24) маємо $z_2 \in H_0^1(D)$.

З теорії варіаційних задач, які допускають змішане формулювання (див., наприклад, [12]), випливає, що функції $\mathbf{z}_1(x;u_1,u_2), z_2(x;u_1,u_2)$ визначаються із рівнянь (23)– (24) єдиним чином.

Теорема 1. Задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(f)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, що описується варіаційною задачею (23) – (24) з функцією вартості виду

$$I(u) = \left(Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot;u)), l_0 + z_2(\cdot;u)\right)_{L^2(D)} + \\ + (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2} \to \inf_{u\in H}. \quad (25)$$

Доведення. В наслідок (14)–(16) маємо при $u \in H$

$$l(\tilde{f}) - \widehat{l(\tilde{f})} = (l_0, \tilde{f})_{L^2(D)} - (y_1(\mathbf{j};\eta_1), u_1)_{H_1} - (y_2(\varphi;\eta_2), u_2)_{H_2} - c = \\ = (l_0, \tilde{f})_{L^2(D)} - (u_1, C_1\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, C_2\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c = \\ = (l_0, \tilde{f})_{L^2(D)} - < J_{H_1}u_1, C_1\tilde{\mathbf{j}} >_{H_1'\times H_1} - < J_{H_2}u_2, C_2\tilde{\varphi} >_{H_2'\times H_2} - (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c = \\ = -(C_1^t J_{H_1}u_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} - (C_2^t J_{H_2}u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)} + (l_0, \tilde{f})_{L^2(D)} - (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c. \quad (26)$$

Далі враховуючи, що операторні рівняння (20)–(22) і (9)–(10) при $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}$, в силу (23)–(24) і (11)–(12) еквівалентні відповідно наступним системам варіаційних рівнянь:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\boldsymbol{\chi}_1(x), \mathbf{z}_1(x;u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x;u)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\chi}_1(x)\,dx = \\ = -\int_D ((C_1^t J_{H_1}u_1)(x), \boldsymbol{\chi}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx \quad \forall \boldsymbol{\chi}_1 \in H(\mathrm{div}; D), \quad (27)$$

$$\int_D \chi_2(x)\,\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(x;u)\,dx = -\int_D (C_2^t J_{H_2}u_2)(x)\chi_2(x)\,dx \quad \forall \chi_2 \in L^2(D), \quad (28)$$

і

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x), \boldsymbol{\psi}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi}_1(x)\,dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi}_1 \in H(\mathrm{div}; D), \quad (29)$$

$$\int_D \psi_2(x)\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{j}}(x)\,dx = \int_D \tilde{f}(x)\psi_2(x)\,dx \quad \forall \psi_2 \in L^2(D), \quad (30)$$

перетворимо третій і четвертий доданок в (26). Для цього покладемо в (27) і (28) $\boldsymbol{\chi}_1 = \tilde{\mathbf{j}}$ і $\chi_2 = \tilde{\varphi}$. Тоді отримаємо

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x), \mathbf{z}_1(x;u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D z_2(x;u)\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{j}}(x)\,dx = \\ = -\int_D ((C_1^t J_{H_1}u_1)(x), \tilde{\mathbf{j}}(x))_{\mathbb{R}^n} dx, \quad (31)$$

$$\int_D \tilde{\varphi}(x)\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(x;u)\,dx = -\int_D (C_2^t J_{H_2}u_2)(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx. \quad (32)$$

З іншого боку, підставляючи в (29) і (30) $\boldsymbol{\psi}_1 = \mathbf{z}_1(\cdot; u)$ і $\psi_2 = z_2(\cdot; u)$, знаходимо

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x), \mathbf{z}_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u_1, u_2)\, dx = 0, \tag{33}$$

$$\int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x)\, dx = \int_D \tilde{f}(x) z_2(x; u)\, dx. \tag{34}$$

Із (31)–(34) отримуємо

$$-(C_1^t J_{H_1} u_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} - (C_2^t J_{H_2} u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)} = \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x), \mathbf{z}_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x)\, dx + \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u)\, dx = \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x), \mathbf{z}_1(x; u))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_D \tilde{\varphi}(x) \operatorname{div} \mathbf{z}_1(x; u)\, dx + \int_D z_2(x; u) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}(x)\, dx = (\tilde{f}, z_2(\cdot; u)_{L^2(D)} = (\tilde{f}, z_2(\cdot; u)_{L^2(D)}.$$

Звідси та з (26) випливає, що

$$l(f) - \widehat{l(f)} = (\tilde{f}, l_0 + z_2(\cdot; u)_{L^2(D)} - (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c =$$

$$= (\tilde{f} - f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} + (f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} - (u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2} - c.$$

В силу (5) знаходимо

$$\mathbb{E}\left| l(f) - \widehat{(l(f)}\right|^2 = \left|(\tilde{f}_2 - f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} + (f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} - c\right|^2 +$$

$$+\mathbb{E}[(u_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (u_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]^2.$$

З останньої рівності отримуємо

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f} \in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}) \in G_1} \mathbb{E}|l(f) - \widehat{l(f)}|^2 =$$

$$= \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\tilde{f} - f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} + (f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} - c\right]^2 +$$

$$+ \sup_{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2$$

$$= \sup_{\tilde{f} \in G_0} \left[(\tilde{f}_2 - f_2^{(0)}, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}\right]^2 + \sup_{(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2, \tag{35}$$

де інфімум по c досягається при $c = (f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}$. Далі, застосовуючи нерівність Коші-Буняківського, з (13) отримаємо

$$\left|(\tilde{f} - f_0, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}\right|^2 \leq (Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot; u)), l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)} (Q(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0)_{L^2(D)} \leq$$

$$\leq (Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot; u)), l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)},$$

причому рівність досягається при

$$\tilde{f} = f_0 + \frac{Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot; u))}{(Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot; u)), l_0 + z(\cdot; u))_{L^2(D)}^{1/2}}.$$

Звідси, отримуємо

$$\sup_{\tilde{f}\in G_0} \left[(\tilde{f}_2 - f_2^{(0)}, l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}\right]^2 = (Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot; u)), l_0 + z_2(\cdot; u))_{L^2(D)}.$$

Аналогічно, в силу (17), знаходимо

$$\sup_{(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}[(\tilde{\eta}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{\eta}_2, u_2)_{H_2}]^2 = (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2}.$$

Із останніх двох рівностей та з (30) знаходимо

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde{f}\in G_0,(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta})\in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{f}) - \widehat{l(\tilde{f})}|^2 = I(u),$$

при $c = (l_0 + z_2(\cdot; u), f_0)_{L^2(D)}$, а $I(u)$ визначається формулою (25). □

В результаті розв'язування задачі оптимального керування (23) – (25) приходимо до наступного результату.

Теорема 2. Існує єдина мінімаксна оцінка значення $l(f)$, яка має вигляд

$$\widehat{\widehat{l(f)}} = (y_1(\mathbf{j}; \eta_1), \hat{u}_1)_{H_1} + (y_2(\varphi; \eta_2), \hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c}$$

де

$$\hat{c} = \int_D (l_0(x) + \hat{z}_2(x))f_0(x)\, dx, \quad \hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2, \tag{36}$$

а функції $\hat{\mathbf{z}}_1, \mathbf{p}_1 \in H(\mathrm{div}, D)$ і $\hat{z}_2, p_2 \in L^2(D)$ знаходяться з розв'язку наступної системи варіаційних рівнянь:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\, \hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x)\mathrm{div}\, \mathbf{q}_1(x)\, dx =$$

$$= -\int_D (C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad \forall \mathbf{q}_1 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{37}$$

$$\int_D v_1(x)\mathrm{div}\, \hat{\mathbf{z}}_1(x)\, dx = -\int_D (C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2(x) v_1(x)\, dx \quad \forall v_1 \in L^2(D), \tag{38}$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\, \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D p_2(x)\mathrm{div}\, \mathbf{q}_2(x)\, dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{39}$$

$$\int_D v_2(x)\mathrm{div}\, \mathbf{p}_1(x)\, dx = \int_D v_2(x) Q^{-1}(l_0 + \hat{z}_2(\cdot))(x)\, dx \quad \forall v_2 \in L^2(D). \tag{40}$$

Задача (37) – (40) однозначно розв'язна. Похибка мінімаксного оцінювання ϱ визначається формулою

$$\varrho = l(Q^{-1}(l_0 + \hat{z}_2)). \tag{41}$$

Доведення. Покажемо, що розв'язок задачі оптимального керування (23)–(25) зводиться до розв'язку системи рівнянь (37)-(40). Для цього спочатку зауважимо, що із вигляду функціоналу $I(u)$ існує єдиний елемент $\hat{u} :=\in H$, на якому досягається мінімум цього функціоналу, тобто $I(\hat{u}) = \inf_{u\in H_0} I(u)$. Тому, для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$ і $w = (w_1, w_2) \in H_0$ виконується співвідношення

$$0 = \frac{d}{dt} I(\hat{u} + \tau w)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= (Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot;\hat{u})), \tilde{z}_2(\cdot;w))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1}\hat{u}_1, w_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}\hat{u}_2, w_2)_{H_2}, \tag{42}$$

де через $(\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot;w), \tilde{z}_2(\cdot;w))$ позначино єдиний розв'язок системи рівнянь (23), (24) при $u = w$.

Далі, ввівши функції $\mathbf{p}_1 \in H(\mathrm{div}, D)$ і $p_2 \in L^2(D)$ як єдиний розв'язок задачі

$$\int\limits_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int\limits_D p_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_2(x)\,dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{43}$$

$$\int\limits_D v_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{p}_1(x)\,dx = \int\limits_D v_2(x)Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot;\hat{u}))(x)\,dx \quad \forall v_2 \in L^2(D). \tag{44}$$

і провівши міркування подібні до тих, які використовувались при доведенні теореми 1, прийдемо до наступної рівності

$$(Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot;\hat{u})), \tilde{z}_2(\cdot;w))_{L^2(D)} = -(w_1, C_1\mathbf{p}_1)_{H_1} - (w_2, C_2p_2)_{H_2}.$$

звідки, внаслідок (42), знайдемо

$$(w_1, C_1\mathbf{p}_1)_{H_1} + (w_2, C_2p_2)_{H_2} = (\tilde{Q}_1^{-1}\hat{u}_1, w_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}\hat{u}_2, w_2)_{H_2},$$

Звідси випливає, що $\hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2$. Замінюючи в правих частинах рівностей (23), (24) u_1 і u_2 відповідно на знайдені вирази $\hat{u}_1$ і $\hat{u}_2$ і, вводячи позначення $\mathbf{z}_1(x;\hat{u}_1,\hat{u}_2) =: \hat{\mathbf{z}}_1(x)$, $z_2(x;\hat{u}_1,\hat{u}_2) =: \hat{z}_2(x)$, отримуємо, що функції $(\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{z}_2)$ і $(\mathbf{p}_1, p_2)$ задовольняють системі рівнянь (37) – (40), однозначна розв'язність якої випливає з єдиності елементу $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$.

Знайдемо далі похибку оцінювання. Підставляючи значення $\hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1$ і $\hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2$ у вираз для $I(\hat{u})$, отримуємо

$$\varrho = I(\hat{u}) = (Q^{-1}(l_0 + z_2(\cdot;\hat{u}_1,\hat{u}_2)), l_0 + z_2(\cdot;\hat{u}_1,\hat{u}_2))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1}\hat{u}_1, \hat{u}_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}\hat{u}_2, \hat{u}_2)_{H_2} =$$

$$= (Q^{-1}(l_0 + \hat{z}_2), l_0 + \hat{z}_2)_{L^2(D)} + (C_1\mathbf{p}_1, \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1)_{H_1} + (C_2p_2, \tilde{Q}_2 C_2 p_2)_{H_2}. \tag{45}$$

Підставляючи в (39) і (40) $\mathbf{q}_2 = \hat{\mathbf{z}}_1$ і $v_2 = \hat{z}_2$, знаходимо

$$\int\limits_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \hat{\mathbf{z}}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int\limits_D p_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)\,dx = 0,$$

$$\int_D \hat{z}_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{p}_1(x)\,dx = \int_D \hat{z}_2(x)Q^{-1}(l_0+\hat{z}_2)(x)\,dx.$$

З останніх двох співвідношень і з системи варіаційних рівнянь (37) і (38), в яких покладено $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1$ і $v_1 = p_2$ матимемо

$$(Q^{-1}(l_0+\hat{z}_2), l_0+\hat{z}_2)_{L^2(D)} = (Q^{-1}l_0, l_0+\hat{z}_2)_{L^2(D)} + \int_D \hat{z}_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{p}}_1(x)\,dx +$$

$$+\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \hat{\mathbf{z}}_1(x))_{\mathbb{R}^n}dx + \int_D p_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)\,dx =$$

$$= (l_0, Q^{-1}(l_0+\hat{z}_2))_{L^2(D)} + \int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \hat{\mathbf{z}}_1(x))_{\mathbb{R}^n}dx + \int_D z_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{p}_1(x)\,dx +$$

$$+\int_D p_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)\,dx = (l_0, Q^{-1}(l_0+\hat{z}_2))_{L^2(D)} - \int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1 C_1\mathbf{p}_1(x), \mathbf{p}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx -$$

$$-\int_D C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2 C_2 p_2(x) p_2(x)\,dx = l(Q^{-1}(l_0+\hat{z}_2)) - (C_1\mathbf{p}_1, \tilde{Q}_1 C_1\mathbf{p}_1)_{H_1} - (C_2 p_2, \tilde{Q}_2 C_2 p_2)_{H_2}.$$

Звідси і з (45) випливає співвідношення (41) для виразу похибки оцінювання. □

Інше представлення для мінімаксної оцінки, яке не залежить від кокретного вигляду функционала $l(f)$, міститься в наступному твердженні.

Теорема 3. Мінімаксна оцінка виразу $l(f)$ має вигляд $\widehat{\widehat{l(f)}} = l(\hat{f})$, де $\hat{f}(x,\omega) = Q^{-1}\hat{p}_2(x,\omega) + f^{(0)}(x)$, а випадкове поле $\hat{p}_2 \in L^2(\Omega, L^2(D))$ знаходиться з розв'язку наступноі системи варіаційних стохастичних рівнянь:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{p}}_1(x,\omega), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n}dx + \int_D \hat{p}_2(x,\omega)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_1(x)\,dx =$$

$$= \int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1(y_1(\mathbf{j},\eta_1(\omega)) - C_1\hat{\mathbf{j}}(\cdot,\omega))(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n}dx \ \forall \mathbf{q}_1 \in H(\mathrm{div}, D), \quad (46)$$

$$\int_D v_1(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{p}}_1(x,\omega)\,dx = \int_D (C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2(y_2(\varphi,\eta_2(\omega)) -$$

$$- C_2\hat{\varphi}(\cdot,\omega))(x) v_1(x)\,dx \quad \forall v_1 \in L^2(D), \quad (47)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{j}}(x,\omega), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D \hat{\varphi}(x,\omega)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_2(x)\,dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(\mathrm{div}, D), \quad (48)$$

$$\int_D v_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{j}}(x,\omega)\,dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2(x,\omega) + f_0(x))\,dx \quad \forall v_2 \in V_2, \quad (49)$$

в яких рівності (46) – (49) виконуються з ймовірністю 1. Задача (46) – (49) має єдиний розв'язок.

Доведення цієї теореми є аналогічним доведенню теореми 2.

На завершення зауважимо, що користуючись запропонованими в [12] змішаними методами скінченних елементів, для знаходження розвязків задач (37) – (40) і (46) – (49) можливо розробити наближені методи їх розвязання.

Заключення

В роботі отримані наступні результати: *встановлена еквівалентність задачі мінімаксного оцінювання деякій задачі оптимізації; доведені нові твердження про загальний вигляд мінімаксних середньоквадратичних оцінок функціоналів від невідомих правих частин рівнянь, що входять у постановку розглядуваних в роботі крайових задач, і отримані представлення для похибок оцінювання.*

Список літератури

1. *Наконечний О.Г.* Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними // Київський університет, Київ, 2004 г., 103 с.
2. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods // Springer-Verlag, New York, 1991, 350 p.
3. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Оптимальное прогнозировании решений параболических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей // Доповіді НАН України. – 2003. – №9. с. 107–112.
4. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності //Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – №1. с. 262–269.
5. *Hiptmair R., Schwab C.* / Numerical treatment of partial differential equations. Lecture notes for course held by R. Hiptmair in WS03/04. pp. 1–219
6. *Наконечний О.Г.* Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. – Київський університет, Київ 2004. – 103 с.
7. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
9. *Подлипенко Ю.К.* Задачи минимаксного оценивания для нетеровых уравнений в гильбертовом пространстве // Доповіді НАН України.Серія: Математика. – 2005. – №12. с. 36-44.
10. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104–128.
11. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – №1. с. 262–269.
12. *F. Brezzi, M. Fortin* Mixed and hybrid finite element methods. – Springer-Verlag, New York, 1991. – 350 p.

Статья поступила в редакцию 16.09.2008