УДК 517.983

О СТРОЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА ПОЛУУНИТАРНОЙ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВНУТРЕННИМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

© Д. Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *dtyshk@inbox.ru*

Abstract

In this work we analyze and describe the construction of residual subspace of a semiunitary dilation of a linear bounded operator acting in a Banach space with an indefinite inner product.

Введение

О чём здесь речь. *Целью* данной работы является описание конструкции остаточного подпространства полуунитарной дилатации линейного непрерывного оператора, действующего в банаховом пространстве, наделённом (индефинитным) внутренним произведением, при определённых условиях на оператор и пространство, в котором оператор действует.

Дилатация (dilation) оператора — это такое расширение данного оператора, с выходом из основного пространства, которое «сохраняет степени» (см. ниже (13) на стр. 82). Использование полуунитарной и унитарной дилатации явилось, пожалуй, самым мощным средством для изучения неунитарных сжимающих операторов в гильбертовом пространстве при наличии тесных связей с теорией характеристических функций и функциональных моделей сжимающих операторов (хорошо известны книги [4, 9]). Работа [3], в которой приводилась конструкция уже J–унитарной дилатации но уже и для произвольного оператора (несжатия) в гильбертовом пространстве, открыла путь для исследования операторов, действующих в пространствах с индефинитным внутренним произведением. С тех пор разными авторами были построены различные конструкции полуунитарной и унитарной дилатаций в пространстве Понтрягина и в пространстве Крейна, однако позже выяснилась общность этих конструкций (см. список источников на стр. 82). Однако конструкции полуунитарной (и тем более унитарной) дилатации в пространствах с внутренним произведением, более общих, чем пространства Крейна (насколько известно автору) *не исследовались* (также автором *не найдены* работы, в которых бы изучалось строение остаточного подпространства и в случае пространств Крейна). Так что, насколько позволяет делать вывод осведомленность автора[1], конструкция полуунитарной дилатации оператора, действующего в банаховом пространстве с внутренним

[1]Кроме тщательного исследования литературы, сюда входят и довольно многочисленные беседы автора с известным специалистом в этой области Т. Я. Азизовым, который был оппонентом кандидатской диссертации автора [22], и которому автор, пользуясь случаем, ещё раз выражает свою признательность.

произведением, а также конструктивное описание её остаточного подпространства приведены в данной работе *впервые*.

Соглашения и обозначения. «ПВП» — сокращение для «пространство с внутренним произведением». Под *внешней ортогональной суммой* ПВП $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ понимается декартово произведение этих пространств, наделённое внутренним произведением $[\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle] := [x_1, x_2]_{\mathfrak{X}} + [y_1, y_2]_{\mathfrak{Y}}$. Знак $[\dot{+}]$ означает (внутреннюю) прямую ортогональную сумму. Все рассматриваемые в данной работе ПВП полагаются *невырожденными*.

$\mathrm{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ означает совокупность всех линейных ограниченных всюду заданных операторов из банахова пространства $\mathfrak{X}$ в банахово пространство $\mathfrak{Y}$. $\mathrm{R}(T)$ — область значений линейного оператора T. Сильный предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обозначен через $s.\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Через $I_{\mathfrak{X}}$ обозначен единичный оператор в пространстве $\mathfrak{X}$. Под натуральными мы понимаем здесь целые числа, начиная с единицы (а не с нуля); обозначение множества натуральных чисел стандартное – $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}_+$ – обозначение для множества $\{0\}\cup\mathbb{N}$ (расширенный натуральный ряд). Через $\overline{a, b}$ обозначается отрезок расширенного натурального ряда $\{a, a+1, \ldots, b\}$ $(a \leqslant b)$.

С понятиями, которые в данной работе не оговариваются и особо не разъясняются, можно подробнее ознакомится в [7, 12, 18].

Необходимые определения и факты

Правильные банаховы пространства. Банахово пространство $\mathfrak{X}$ с внутренним произведением $[\cdot,\cdot]$ называется *правильным банаховым пространством* (regular Banach space; далее, коротко, п.б.п. – [6, 16, 20, 22]) если

$$\exists\, b > 0 \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{X} \quad |[x, y]| \leqslant b\|x\|\|y\|; \tag{1}$$

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in \mathfrak{X} \quad \sup_{\|y\|\leqslant 1} |[x, y]| \geqslant c\|x\|. \tag{2}$$

В случае, если выполнено лишь условие (1), говорят, что $\mathfrak{X}$ есть пространство *с мажорантой*([7, 20, 22]).

Замечание 1. П.б.п. особенно прозрачно определяется при помощи так называемого *оператора Грама* ([1, 2, 7, 12]) пространства $\mathfrak{X}$, т.е. линейного всюду заданного оператора $G_{\mathfrak{X}}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^a$, определяемого формулой

$$(G_{\mathfrak{X}}x)(y) := [x, y]_{\mathfrak{X}}\,.$$

Здесь $\mathfrak{X}^a$ – *антисопряжённое* пространство к $\mathfrak{X}$, т.е. совокупность всех сильно непрерывных антилинейных функционалов на $\mathfrak{X}$. Так вот, легко видеть, что условия (1), (2) эквивалентны *ограниченности* (усл. (1)) и *ограниченной обратимости* (усл. (2)) оператора Грама $G_{\mathfrak{X}}$.

Разложение Богнара–Крамли. *Разложением Богнара–Крамли* самосопряжённого оператора A в ПВП $\mathfrak{X}$ называется представление оператора A в форме

$$C^{\sharp}C = A\,, \tag{3}$$

где C – сопрягаемый оператор с областью определения – всем $\mathfrak{X}$ и областью значений, лежащей в некотором ПВП $\mathfrak{Y}$ ([18, 20, 22]). Оператор C называется в [20, 22] *квадратичным расщеплением* самосопряжённого оператора A. Особенно важны квадратичные расщепления с нулевым ядром сопряжённого:

$$\ker C^{\sharp} = \{0\} \tag{4}$$

((4) равносильно плотности образа C в определённых топологиях, [7, 8, 22]). Из (4) и (3) следует равенство

$$\ker C = \ker A\,.$$

В случае банаховых ПВП, как правило, необходима ограниченность C и его сопряжённого (см. таблицу категорий в следующем пункте).

Категории ПВП. В [19, 20, 22] вводятся понятия *категории с сопряжением* и *категории с квадратичным расщеплением*. Охарактеризовать эти категории, не вдаваясь в детали, можно следующим образом. Категория с сопряжением, в которой объектами являются ПВП, а стрелками – линейные всюду определённые операторы между ПВП – замкнуты относительно образования матричных операторов, относительно сопряжения операторов и содержат нулевой объект – нулевое пространство. Категория с квадратичным расщеплением – это категория с сопряжением, в которой произвольный самосопряжённый объект должен обладать квадратичным расщеплением с нулевым ядром сопряжённого, и это квадратичное расщепление – стрелка категории. Мы приведём три примера категорий с сопряжением (банаховых ПВП) в следующей табличке:

Категория	*Объекты*	*Стрелки*
$\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$	Банаховы пространства с мажорантой	Ограниченные сопрягаемые операторы, для которых сопряжённый ограничен
$\mathbf{RegB}^{(\mathbf{adj})}$	Правильные банаховы пространства	Ограниченные сопрягаемые операторы
$\mathbf{Kr}$	Пространства Крейна	Ограниченные операторы

Снизу вверх они образуют башню полных подкатегорий. Из них $\mathbf{Kr}$ и $\mathbf{RegB}^{(\mathbf{adj})}$ являются категориями с квадратичным расщеплением (доказательство того, что $\mathbf{Kr}$ – категория с квадратичным расщеплением содержится, вне рамок теории категорий, в [18]; доказательства для $\mathbf{RegB}^{(\mathbf{adj})}$, в теоретико–категорных рамках, – в [22] и частично в [20]).

О пространстве $\ell_2(\mathfrak{X})$. Для банахова пространства $\mathfrak{X}$ линейное пространство $\ell_2(\mathfrak{X})$ определяется (см., например, [17]) как совокупность всех бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов из $\mathfrak{X}$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$. Норма в $\ell_2(\mathfrak{X})$ определяется как

$$\|(x_1, x_2 \ldots)\|_{\ell_2(\mathfrak{X})} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2\Big)^{1/2}.$$

С такой нормой $\ell_2(\mathfrak{X})$ становится банаховым пространством. Если $A \in \mathrm{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то естественным образом определяется оператор $\ell_2(A) \in \mathrm{B}\left(\ell_2(\mathfrak{X}), \ell_2(\mathfrak{Y})\right)$:

$$\ell_2(A)(x_1, x_2 \ldots) := (Ax_1, Ax_2, \ldots).$$

При этом для произвольных $A \in \mathrm{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $B \in \mathrm{B}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X})$

$$\ell_2(I_{\mathfrak{X}}) = I_{\ell_2(\mathfrak{X})}, \quad \ell_2(AB) = \ell_2(A)\ell_2(B), \quad \|\ell_2(A)\| = \|A\|;$$

таким образом, $\ell_2(\cdot)$ *является* (ковариантным) *функтором* в категории банаховых пространств. Также, в частности, это влечёт *одновременную ограниченную обратимость* операторов A и $\ell_2(A)$. Существует естественный изометрический изоморфизм между $\ell_2(\mathfrak{X}^*)$ и $\ell_2(\mathfrak{X})^*$, осуществляемый отображением

$$\begin{gathered} \big(\Phi(f_1, f_2, \ldots)\big)\big((x_1, x_2, \ldots)\big) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n), \\ (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2(\mathfrak{X}), \quad (f_1, f_2, \ldots) \in \ell_2(\mathfrak{X}^*). \end{gathered} \tag{5}$$

Эта же конструкция приводит к изометрической изоморфности $\ell_2(\mathfrak{X}^a)$ и $\ell_2(\mathfrak{X})^a$.

Если $\mathfrak{X}$ – банахово ПВП, то на $\mathfrak{X}$ естественным образом индуцируется внутреннее произведение

$$[(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)]_{\ell_2(\mathfrak{X})} := \sum_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]_{\mathfrak{X}}.$$

В таком случае имеет место связь между сопряжёнными:

$$\ell_2(A)^\sharp = \ell_2(A^\sharp), \tag{6}$$

а операторы Грама в $\mathfrak{X}$ и $\ell_2(\mathfrak{X})$, как нетрудно видеть, связаны соотношением

$$G_{\ell_2(\mathfrak{X})} = \Phi \ell_2(G_{\mathfrak{X}}) \tag{7}$$

(для антисопряжённой версии Φ). Действительно, согласно (5)

$$\begin{aligned} \big(G_{\ell_2(\mathfrak{X})}(x_1, x_2, \ldots)\big)\big((y_1, y_2, \ldots)\big) &= [(x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)]_{\ell_2(\mathfrak{X})} = \sum_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]_{\mathfrak{X}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (G_{\mathfrak{X}} x_n)(y_n) &= \big(\Phi(G_{\mathfrak{X}} x_1, G_{\mathfrak{X}} x_2, \ldots)\big)\big((y_1, y_2, \ldots)\big) = \\ &= \big(\Phi \ell_2(G_{\mathfrak{X}})(x_1, x_2, \ldots)\big)\big((y_1, y_2, \ldots)\big). \end{aligned}$$

Из (6), (7) и замечания 1 следует, что если $\mathfrak{X}$ – п.б.п. (пространство с мажорантой), то и $\ell_2(\mathfrak{X})$ – п.б.п. (пространство с мажорантой). Кроме того, ясно, что если $\mathfrak{X}$ – пространство Крейна, то и $\ell_2(\mathfrak{X})$ является пространством Крейна.

Замечание 2. Более точно, все эти рассуждения показывают, что $\ell_2(\cdot)$ является функтором в категориях $\mathbf{B^{(mutadj)}}$, $\mathbf{RegB^{(adj)}}$ и $\mathbf{Kr}$.

Полуунитарные операторы и сдвиги в ПВП. Всюду определённый оператор W, действующий из ПВП $\mathfrak{X}$ в ПВП $\mathfrak{Y}$, и сохраняющий внутреннее произведение: $[Wx_1, Wx_2]_{\mathfrak{Y}} = [x_1, x_2]_{\mathfrak{X}}$ (для всех $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$) (т.е. *изометрический* относительно внутреннего произведения), но образ которого *не совпадает* с $\mathfrak{Y}$, называется *полуунитарным* (semiunitary; ср. [8, 12, 21]). Отметим без доказательства[2] следующие свойства полуунитарного оператора W, которые далее нам понадобятся:

$$\mathfrak{Y} = \mathrm{R}(W)[\dot{+}]\ker W^{\sharp}\,; \tag{8}$$

$$\ker W^{\sharp\, n} = \underset{k\in\overline{0,\,n-1}}{[\dot{+}]} W^k \ker W^{\sharp} \quad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{9}$$

Далее, подпространство $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} W^n\mathfrak{X}$ пространства $\mathfrak{Y}$ называется *остаточным подпространством* полуунитарного оператора W (residual subspace; см. [8, 10, 11, 20]).

Пусть далее $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Полуунитарный оператор называется *односторонним сдвигом* (unilateral shift), если его остаточное подпространство – нулевое[3]. Сопрягаемый односторонний сдвиг W назовём *проекционно устойчивым* ([22]), если $s.\lim\limits_{n\to\infty} \|W^n W^{\sharp n} x\| = 0$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Специальный класс проекционно устойчивых односторонних сдвигов составляют *правосторонние сдвиги* в пространствах $\ell_2(\mathfrak{X})$:

$$W(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots) \tag{10}$$

(правосторонний сдвиг служит моделью абстрактного одностороннего сдвига в случае гильбертовых пространств: [10]). При этом W является одновременно изометрическим относительно нормы и внутреннего произведения. Сопряжённый к W есть *левосторонний сдвиг*:

$$W^{\sharp}(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots). \tag{11}$$

Из (10) и (11) непосредственно видна проекционная устойчивость W:

$$\|W^n W^{\sharp n}(x_1, x_2, \ldots)\|^2 = \|(0, \ldots, \underset{n}{0}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

[2]Доказательства данных свойств – чисто технические, при этом не требуется никаких особых топологических выкладок – лишь «линейные» рассуждения и работа понятия сопряжённости. Эти доказательства имеются в наших работах [21, предл. 3, лем. 1], [22, предл. 5.3, лем. 5.17] (соответственно).

[3]Это – косвенное определение. Прямое (равносильное приведённому) определение в случае индефинитности внутреннего произведения требует определённых топологических выкладок и дополнительных определений, которых мы стремимся в данной работе избегать, так как на формулировку и доказательство основного результата они не имеют прямого влияния.

Отметим следующий важный момент: из (11) непосредственно вытекает равенство

$$\ker W^{\sharp} = \big\{(x,0,0,\ldots) \mid x \in \mathfrak{X}\big\} \tag{12}$$

(т.е. $\ker W^{\sharp}$ изометрически изоморфно $\mathfrak{X}$).

Предложение 3. Пусть W – правосторонний сдвиг (10), и $\{x_{kn}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\overline{0,n-1}}}$ – двойная последовательность «треугольного вида» векторов из $\ker W^{\sharp}$. Тогда

$$\Big\{\sum_{k=0}^{n} W^k x_{kn}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} \text{— \textit{сильно сходится}} \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|x_{kn}\|^2<\infty.$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения обеспечивается цепочкой:

$$\Big\|\sum_{k=m}^{n} W^k x_{kn}\Big\|^2 \overset{(10),(12)}{=} \|(0,\ldots,\underset{m}{0},x_{mn},x_{m+1,n},\ldots,x_{nn},0,0,\ldots)\|^2 = \sum_{k=m}^{n}\|x_{kn}\|^2.$$

□

Полуунитарная дилатация. Известное определение дилатации линейного непрерывного (или, по меньшей мере, всюду заданного) оператора ПВП с гильбертовым носителем ([3, 4, 5, 9, 10, 12, 13, 14, 15]) без труда может быть перенесено на случай произвольных ПВП.

Пусть T – всюду заданный линейный оператор в ПВП $\mathfrak{X}$, φ – инъективное изометрическое (относительно внутреннего произведения) вложение $\mathfrak{X}$ в некоторое ПВП $\mathfrak{K}$. Линейный всюду заданный оператор V в $\mathfrak{K}$ называется *дилатацией* оператора T, если

$$[T^n x_1, x_2]_{\mathfrak{X}} = [V^n\varphi x_1, \varphi x_2]_{\mathfrak{K}} \quad (n\in\mathbb{N};\; x_1,x_2\in\mathfrak{X}). \tag{13}$$

В таком общем виде определение (13) ещё слишком «сыро́»; естественно, в зависимости от класса рассматриваемых ПВП, нужно наделить вложение φ дополнительными свойствами (в основном, непрерывностью в той или иной топологии). Например, в случае банаховых ПВП естественно требовать *гомеоморфности* φ относительно *сильных* топологий, что далее будем считать выполненным.

Приведём конструкцию полуунитарной дилатации для операторов из категории $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ (самой широкой для описываемой ниже конструкции). Пусть T – оператор, – стрелка в $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ с началом и концом в $\mathfrak{X}$, – для которого его (самосопряжённый) *дефект по полуунитарности* $\delta_T := I - T^{\sharp}T$ – *ненулевой* (т.е. T *не является полуунитарным*); причём δ_T обладает сопрягаемым квадратичным расщеплением $C\in \mathrm{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ с ограниченным сопряжённым: $C^{\sharp}\in\mathrm{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})$. Если T является стрелкой некоторой подкатегории $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ с квадратичным расщеплением (например, $\mathbf{RegB}^{(\mathbf{adj})}$ или $\mathbf{Kr}$), то такие требования излишни, однако в общем случае мы вынуждены ограничиться специальным классом операторов T в $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{G}$ – некоторый объект в $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ (т.е. банахово ПВП с мажорантой), и ψ – *изометрическое* относительно внутреннего произведения и *гомеоморфное* вложение $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{G}$, обладающее следующим свойством:

$$\psi \text{ – \textit{сопрягаемый оператор}}, \tag{14}$$

откуда автоматически следует, что $\psi^\sharp \in \mathrm{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{Y})$, ибо в данном случае, как показывают простые выкладки, $\psi^\sharp = \psi^{-1} \mid \mathrm{R}(\psi)$.

Пусть W – стрелка в $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ с началом и концом в $\mathfrak{G}$ $\big($т.е. $W \in \mathrm{B}(\mathfrak{G})$, W сопрягаем и $W^\sharp \in \mathrm{B}(\mathfrak{G})\big)$, являющаяся полуунитарным оператором со свойством:

$$\psi\mathfrak{Y} = \ker W^\sharp \,. \tag{15}$$

Пусть $\mathscr{C}$ – распространение на $\mathfrak{G}$ оператора C:

$$\mathscr{C} := \psi C. \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) тривиально следует равенство

$$W^\sharp \mathscr{C} = 0. \tag{17}$$

Так как ψ – изометрическое (относительно внутреннего произведения) и гомеоморфное вложение, то, как легко проверить, $\mathscr{C} \in \mathrm{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{G})$, $\mathscr{C}$ – сопрягаем, $\mathscr{C}^\sharp \in \mathrm{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$, и $\mathscr{C}$ является квадратичным расщеплением дефекта δ_T:

$$\mathscr{C}^\sharp \mathscr{C} = \delta_T \,. \tag{18}$$

Пусть $\mathfrak{K}$ – внешняя ортогональная сумма $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{G}$, φ – естественное изометрическое (относительно внутреннего произведения) и гомеоморфное вложение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{K}$. Рассмотрим оператор V, заданный матрицей

$$V := \begin{bmatrix} T & 0 \\ \mathscr{C} & W \end{bmatrix} . \tag{19}$$

Индукцией легко доказывается формула

$$V^n = \begin{bmatrix} T^n & 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} W^k C T^{n-1-k} & W^n \end{bmatrix} \ (n \in \mathbb{N}). \tag{20}$$

Покажем теперь, что V – полуунитарная дилатация T. Действительно, оператор V – полуунитарный:

$$V^\sharp V = \begin{bmatrix} T^\sharp & \mathscr{C}^\sharp \\ 0 & W^\sharp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ \mathscr{C} & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^\sharp T + \mathscr{C}^\sharp \mathscr{C} & \mathscr{C}^\sharp W \\ W^\sharp \mathscr{C} & W^\sharp W \end{bmatrix} \overset{(17),(18)}{=} \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{X}} & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix} = I_{\mathfrak{K}}$$

и является дилатацией T:

$$[V^n \varphi x_1, \varphi x_2]_{\mathfrak{K}} \overset{(20)}{=} [\begin{bmatrix} T^n & 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} W^k \mathscr{C} T^{n-1-k} & W^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} =$$

$$= [\begin{bmatrix} T^n x_1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} W^k \mathscr{C} T^{n-1-k} x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} = [T^n x_1, x_2]_{\mathfrak{X}} \quad (n \in \mathbb{N};\ x_1, x_2 \in \mathfrak{X}) \,.$$

Дилатация V оператора T (13) называется *минимальной* (см. начало этого пункта и список источников там), если ортогональное дополнение линейной оболочки множеств $V^n \varphi \mathfrak{X}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ – нулевое[4].

[4]Это – косвенное определение. См. сноску на стр. 81.

Важность условия (4) и понятия одностороннего сдвига при работе с полуунитарной дилатацией показывает следующая теорема.

Теорема 1. *Дилатация* V *оператора* T (15), (16), (19) *минимальна тогда и только тогда, когда выполняются условия: ядро сопряжённого к оператору* C, *порождающему* $\mathscr{C}$ *– нулевое, и* W *– односторонний сдвиг.*

Доказательство. Пусть $g \in \mathfrak{G}$. Тогда справедливо равенство (см. чуть выше последнюю цепочку равенств):

$$[V^n \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} = \sum_{k=0}^{n-1} [W^k \mathscr{C} T^{n-1-k} x, g]_{\mathfrak{G}} \,. \tag{21}$$

Необходимость. **I**. Пусть $y \in \ker C^\sharp$. Тогда $\mathscr{C}^\sharp \psi y \overset{(14),(16)}{=} C^\sharp \psi^\sharp \psi y = C^\sharp y = 0$. Отсюда

$$[V^n \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi y \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} \overset{(21)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} [\mathscr{C} T^{n-1-k} x, W^{\sharp k} \psi y]_{\mathfrak{G}} \overset{(15)}{=}$$

$$= [\mathscr{C} T^{n-1} x, \psi y]_{\mathfrak{G}} = [T^{n-1} x, \mathscr{C}^\sharp \psi y]_{\mathfrak{X}} = 0 \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Из последней цепочки по определению минимальной дилатации вытекает равенство $\psi y = 0$, откуда $y = 0$. Итак, показано, что $\ker C^\sharp = \{0\}$.

II. Пусть $g \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} W^n \mathfrak{G}$. Тогда существует такая последовательность $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{G}$, что $g = W^m g_m$. Имеем цепочку:

$$[V^n \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} \overset{(21)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} [W^k \mathscr{C} T^{n-1-k} x, W^m g_m]_{\mathfrak{G}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [W^{\sharp(m-k)} \mathscr{C} T^{n-1} x, g_m]_{\mathfrak{G}} \overset{(17)}{=} 0 \quad (x \in \mathfrak{X},\ n \in \mathbb{N},\ m \geqslant n).$$

Тогда по определению минимальной дилатации получаем равенство $g = 0$. Итак, показано, что W – односторонний сдвиг.

Достаточность. Пусть вектор $\begin{bmatrix} x_0 \\ g_0 \end{bmatrix}$ ортогонален каждому из линеалов $V^n \mathfrak{K}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Тогда, в частности, будем иметь:

$$0 = [V^0 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ g_0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} = [\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ g_0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} = [x, x_0]_{\mathfrak{X}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Таким образом, $x_0 = 0$. Далее, по (21) при $n = 1$

$$0 = [V^1 \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} = [\mathscr{C} x, g_0]_{\mathfrak{G}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Покажем при помощи индукции, что

$$[W^n \mathscr{C} x, g_0]_{\mathfrak{G}} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_+,\ x \in \mathfrak{X})\,. \tag{22}$$

Базис индукции уже обоснован. Пусть $n > 0$ и

$$\forall\, x \in \mathfrak{X} \quad \forall\, k \in \overline{0, n} \quad [W^k \mathscr{C} x, g_0]_{\mathfrak{G}} = 0. \tag{23}$$

Тогда

$$0 = [V^{n+2} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix}]_{\mathfrak{K}} \overset{(21)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} [W^k \mathscr{C} T^{n+1-k} x, g_0]_{\mathfrak{G}} \overset{(23)}{=} [W^{n+1} \mathscr{C} x, g_0]_{\mathfrak{G}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Индуктивный переход обоснован, и (22) доказано. Далее, в силу обратимости $C^\sharp$ (по условию теоремы)

$$\mathrm{R}(\mathscr{C})^{[\perp]} = \ker \mathscr{C}^\sharp \overset{(14),(16)}{=} \ker C^\sharp \psi^\sharp = \ker \psi^\sharp = \mathrm{R}(\psi)^{[\perp]} \overset{(15)}{=} \left(\ker W^\sharp\right)^{[\perp]},$$

откуда, в свою очередь, получим цепочку

$$W^{\sharp n} g_0 \overset{(22)}{\in} \mathrm{R}(\mathscr{C})^{[\perp]} = (\ker W^\sharp)^{[\perp]} \;\sim\; g_0 \in (W^n \ker W^\sharp)^{[\perp]} \quad (n \in \mathbb{N}_+)\,. \tag{24}$$

И, наконец,

$$\begin{gathered} \forall\, n \in \mathbb{N}_+ \quad g_0 \in (W^n \ker W^\sharp)^{[\perp]} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_0 \in (\ker W^{\sharp n})^{[\perp]} \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad g_0 \in \mathrm{R}(W^n) \;\Leftrightarrow\; g_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W^n \mathfrak{G}\,. \end{gathered} \tag{25}$$

Так как по условию теоремы W – односторонний сдвиг, то согласно (22), (24), (25) $g_0 = 0$. Итак, показано, что вектор $\begin{bmatrix} x_0 \\ g_0 \end{bmatrix}$, ортогональный каждому из линеалов $V^n \mathfrak{K}\,(n \in \mathbb{N}_+)$ – нулевой, т.е. дилатация V – минимальна. □

✓ **Осуществимость конструкции.** Конструкция полуунитарной дилатации с условиями (14), (15) легко осуществима (при наличии квадратичного расщепления дефекта в общем случае), если задействовать правосторонний сдвиг в $\ell_2(\cdot)$–пространстве. Действительно, пусть $\mathfrak{G} := \ell_2(\mathfrak{Y})$, ψ – естественное вложение $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{G}$:

$$\psi y := (y, 0, 0, \ldots) \quad (y \in \mathfrak{Y}),$$

(изометрическое по внутреннему произведению и норме), а W – правосторонний сдвиг (10). Тогда свойства (14), (15) легко проверяются (см. (12)).

Формулировка и доказательство основного результата

Положим

$$\mathscr{N} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{0, n-1} \times \{n\}$$

(т.е. $\mathscr{N}$ есть совокупность всех пар $\langle k, n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$ – «бесконечный нижний треугольник» декартова квадрата $\mathbb{N}^2$).

Замечание 3. В этом подразделе мы будем считать, что односторонний сдвиг W, используемый в конструкции полуунитарной дилатации, является *проекционно устойчивым.* Это, снижая общность, не снижает силу построений (см. ниже ключевой момент (31)); наоборот, согласно рассуждениям пункта ✓, для любого оператора T, имеющего соответствующее квадратичное расщепление дефекта, всегда можно построить полуунитарную дилатацию «максимальной силы».

Рассмотрим множество

$$\mathscr{X}_V(x) := \left\{ \mathfrak{h} \in \prod_{\langle k,n\rangle \in \mathscr{N}} \left(T^{k+1}\right)^{-1}\big(\{x\}\big) \;\Big|\; \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} W^k C \mathfrak{h}\big(\langle k,n\rangle\big) \Big\}_{n\in\mathbb{N}} \text{— \textit{сильно сходится}} \right\}$$

(иначе говоря, $\mathfrak{h}$ представляет собой двойную последовательность «треугольного вида» $\{h_{kn}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\overline{0,n-1}}}$, в которой $T^{k+1}h_{kn} = x$). Теперь определим множество

$$\mathscr{X}_V^{nd} := \Big\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n \mathfrak{X} \mid \mathscr{X}_V(x) \neq \varnothing \Big\}.$$

Предложение 4. Множество $\mathscr{X}_V^{nd}$ является линейным многообразием.

Доказательство. Множество $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X}$ является линейным многообразием. Далее, совокупность всех двойных последовательностей элементов из $\mathfrak{X}$ «треугольного вида», очевидно, является линейным многообразием относительно обычных операций сложения и умножения на число. При этом, если $\widetilde{0}$ – нулевая последовательность, то $T^{k+1}\widetilde{0}\big(\langle k,n\rangle\big) = 0$, поэтому $0 \in \mathscr{X}_V^{nd}$. Далее, если $T^{k+1}\mathfrak{h}_1\big(\langle k,n\rangle\big) = x_1$ и $T^{k+1}\mathfrak{h}_2\big(\langle k,n\rangle\big) = x_2$, то для произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$T^{k+1}\Big((\alpha_1\mathfrak{h}_1 + \alpha_2\mathfrak{h}_2)\big(\langle k,n\rangle\big)\Big) = T^{k+1}\Big(\alpha_1\mathfrak{h}_1\big(\langle k,n\rangle\big)\Big) + T^{k+1}\Big(\alpha_2\mathfrak{h}_2\big(\langle k,n\rangle\big)\Big) =$$
$$= \alpha_1 T^{k+1}\mathfrak{h}_1\big(\langle k,n\rangle\big) + \alpha_2 T^{k+1}\mathfrak{h}_2\big(\langle k,n\rangle\big) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (n\in\mathbb{N},\ \ k\in\overline{0,n-1}),$$

причём (предел суммы двух сходящихся последовательностей равен...)

$$s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C(\alpha_1\mathfrak{h}_1 + \alpha_2\mathfrak{h}_2)\big(\langle k,n\rangle\big) =$$
$$= \alpha_1\, s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C\mathfrak{h}_1\big(\langle k,n\rangle\big) + \alpha_2\, s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C\mathfrak{h}_2\big(\langle k,n\rangle\big).$$

Таким образом, линейная комбинация векторов из $\mathscr{X}_V^{nd}$ лежит в $\mathscr{X}_V^{nd}$. □

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Остаточное подпространство полуунитарной дилатации V оператора T имеет следующий вид:*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathfrak{K} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \mid x \in \mathscr{X}_V^{nd},\ g = s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C\mathfrak{h}\big(\langle k,n\rangle\big),\ \mathfrak{h} \in \mathscr{X}_V(x) \right\} \qquad (26)$$

Доказательство. Из (20) следует эквиваленция

$$\begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \in V^n\mathfrak{K} \sim \exists x_n \in \mathfrak{X} \quad \exists g_n \in \mathfrak{G} \qquad \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^n x_n \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} W^k C T^{n-1-k} x_n + W^n g_n \end{bmatrix} . \tag{27}$$

Согласно (27) определим последовательность $\mathfrak{h}$, полагая

$$\mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big) := T^{n-1-k} x_n\,, \quad \langle k, n\rangle \in \mathscr{N}\,. \tag{28}$$

Покажем, что

$$\mathfrak{h} \in \mathscr{X}_V(x)\,. \tag{29}$$

Согласно правой части последнего равенства в (27) (первая строка столбца)

$$T^{k+1}\mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big) \overset{(28)}{=} T^{k+1}T^{n-k-1}x_n = T^n x_n = x \tag{30}$$

и (вторая строка)

$$W^n W^{\sharp n} g = \sum_{k=0}^{n-1} W^n W^{\sharp(n-k)} C T^{n-1-k} x_n + W^n W^{\sharp n} W^n g_n \overset{(17)}{=} W^n g_n\,, \tag{31}$$

откуда из проекционной устойчивости W следует, что $s.\lim\limits_{n\to\infty} W^n g_n = 0$. Последнее равенство влечёт цепочку

$$g \overset{(27)}{=} s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C T^{n-1-k} x_n \overset{(28)}{=} s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C \mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big). \tag{32}$$

Из (32) и (30) непосредственно следует (29). Тогда согласно (27) – (29) справедлива эквиваленция

$$\begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathfrak{K} \sim \Big(x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X}\Big) \& \Big(\exists\, \mathfrak{h} \in \mathscr{X}_V(x) \quad g = s.\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W^k C \mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big)\Big),$$

которая равносильна равенству (26). □

В случае обратимости оператора T, вид остаточного подпространства его полуунитарной дилатации V заметно упрощается (в частности, отпадает необходимость рассмотрения промежуточных множеств $\mathscr{X}_V(x)$).

Следствие 1. *Пусть T – обратимый оператор. Тогда*

$$\mathscr{X}_V^{nd} = \Big\{x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X} \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\infty} W^k C T^{-(k+1)} x \ - \textit{(сильно) сходится}\Big\}\,;$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathfrak{K} = \Big\{ \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} \,\Big|\, x \in \mathscr{X}_V^{nd},\ g = \sum_{k=0}^{\infty} W^k C T^{-(k+1)} x \Big\}\,.$$

Доказательство. Из уравнения $T^{k+1}\mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big) = x$ однозначно определяется вектор $\mathfrak{h}\big(\langle k, n\rangle\big)$: он равен $T^{-(k+1)}x$. □

Описание остаточного подпространства ещё более упрощается, если дилатация V построена по образцу пункта ✓.

Следствие 2. *Пусть V – полуунитарная дилатация оператора T конструкции пункта ✓. Тогда*

$$\mathscr{X}_V(x)=\left\{\mathfrak{h}\in\prod_{\langle k,n\rangle\in\mathscr{N}}\bigl(T^{k+1}\bigr)^{-1}\bigl(\{x\}\bigr)\;\Big|\;\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\|C\mathfrak{h}\bigl(\langle k,n\rangle\bigr)\|^2<\infty\right\},$$

а в случае обратимости T

$$\mathscr{X}_V^{nd}=\bigl\{x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}T^n\mathfrak{X}\mid\sum_{k=0}^{\infty}\|CT^{-(k+1)}x\|^2<\infty\bigr\}.$$

Доказательство. См. предложение 3, теорему 2 и следствие 1. □

Иллюстрации

Замечание 4. Дилатации, рассматриваемые в данном подразделе, имеют конструкцию пункта ✓.

Пример 1. Положим $\mathfrak{X}:=\mathbb{C}^2$, и внутреннее произведение на $\mathfrak{X}$ зададим как

$$[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]_{\mathfrak{X}}:=x_1\overline{y_2}+y_1\overline{x_2}\,. \tag{33}$$

Будем отождествлять операторы с порождающими их матрицами относительно базиса $\{(1,0),(0,1)\}$. Тогда внутреннее произведение (33), очевидно, порождено симметрией $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. Наше $\mathfrak{X}$ является объектом **Kr** (если, на всякий случай, мыслить о пространстве Крейна с возможностью *конечномерности* носителя и равными положительным и отрицательным индексами инерции).

Рассмотрим оператор $T:=\begin{bmatrix}0&\alpha\\0&\beta\end{bmatrix}$. Прямыми вычислениями находим степень и дефект:

$$T^n=\beta^{n-1}T\quad(n\in\mathbb{N})\,,\qquad\delta_T=\begin{bmatrix}0&-2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)\\0&0\end{bmatrix}.$$

Чтобы дефект был ненулевым, числа α и β должны удовлетворять условиям:

$$\alpha\neq0,\quad\beta\neq0,\quad\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)\neq0,$$

которые и будем далее полагать выполненными (формально, первые два неравенства излишни, так как следуют из третьего).

Легко находится квадратичное расщепление C дефекта δ_T с условием $\ker C^\sharp=\{0\}$. Действительно, положим $\mathfrak{Y}:=\mathbb{C}$ и зададим внутреннее произведение:

$$[z_1,z_2]_{\mathfrak{Y}}:=-\operatorname{sgn}\bigl(\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)\bigr)z_1\overline{z_2}\,.$$

Тогда C и его сопряжённый имеют вид:

$$C=\begin{bmatrix}0&\sqrt{2|\alpha\beta|}\end{bmatrix},\qquad C^\sharp=\begin{bmatrix}-\operatorname{sgn}\bigl(\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)\bigr)\sqrt{2|\alpha\beta|}\\0\end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что пространство $\mathfrak{G}$, в котором реализуется односторонний сдвиг, есть просто ℓ_2 с внутренним произведением равным $\pm$ скалярное произведение в зависимости от знака числа $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta)$.

Далее, вполне очевидно, что

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X} = T\mathfrak{X} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ \alpha^{-1}\beta z \end{bmatrix} \mid z\in\mathbb{C} \right\},$$

и уравнение $T^{k+1}\begin{bmatrix} h_{1kn} \\ h_{2kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \alpha^{-1}\beta z \end{bmatrix}$ даёт решение: h_{1kn} – любое, $h_{2kn} = \alpha^{-1}\beta^{-k}z$, откуда находим:

$$C\begin{bmatrix} h_{1kn} \\ h_{2kn} \end{bmatrix} = \sqrt{2|\alpha\beta|}\,\alpha^{-1}\beta^{-k}z, \qquad \|C\begin{bmatrix} h_{1kn} \\ h_{2kn} \end{bmatrix}\|^2 = 2|\alpha|^{-1}|\beta|^{1-2k}|z|^2. \tag{34}$$

Из (34) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\|C\begin{bmatrix} h_{1kn} \\ h_{2kn} \end{bmatrix}\|^2 < \infty$ в том и только том случае, если $|\beta| > 1$ (независимо от z). Таким образом, если $|\beta| \leqslant 1$, то остаточное подпространство минимальной полуунитарной дилатации V оператора T – *нулевое* (т.е. V представляет собой в этом случае односторонний сдвиг). Если же $|\beta| > 1$, то согласно (34) и следствию 2 остаточное подпространство имеет следующее строение:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathfrak{K} \quad \textit{натянуто на вектор} \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \sqrt{2|\alpha\beta|}\,(1,\beta^{-1},\beta^{-2},\dots) \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Положим теперь $\mathfrak{X} := C[-1,1]$, и определим внутреннее произведение:

$$[x,y]_{\mathfrak{X}} := \int_{-1}^{1} x(-t)\,\overline{y(t)}\,dt \tag{35}$$

(симметричность формы (35) обеспечивается симметричностью интервала $[-1,1]$). По стандартным свойствам интеграла (Римана) выполняется (1) (где в качестве b может выступать любое число $\geqslant 2$), т.е. $\mathfrak{X}$ – *пространство с мажорантой.* Однако $\mathfrak{X}$, как можно догадаться, *не является п.б.п.*: отрицание свойства (2) –

$$\forall\, c > 0 \quad \exists\, x_c \in \mathfrak{X} \quad \sup_{\|y\|\leqslant 1} |[x_c,y]| < c\|x_c\| \tag{36}$$

– легко доказать, рассмотрев, например, функции $x_c(t) := |t|^{\frac{2}{\eta(c)}-1}$, где η – произвольная функция, удовлетворяющая условию $0 < \eta(c) < c \leqslant 2$ (справедливость (36) достаточно доказать, в частности, для $c \leqslant 2$). Действительно, тогда

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1} |[x_c,y]| \leqslant \int_{-1}^{1} |x_c(-t)|\,dt = 2\int_{0}^{1} t^{\frac{2}{\eta(c)}-1}\,dt = \eta(c) < c = c\|x_c\|$$

($\|x_c\| = 1$ так как $\frac{2}{\eta(c)} - 1 > 0$ в силу наложенных на η и c условий). Таким образом $\mathfrak{X}$ – объект $\mathbf{B^{(mutadj)}}$, но не является объектом $\mathbf{RegB^{(adj)}}$.

Рассмотрим интегральный оператор $(Tx)(t) := \int\limits_{-1}^{t} x(\tau)\,d\tau$. Оператор T оказывается *самосопряжённым* (!) относительно введённого внутреннего произведения:

$$[Tx,y]_{\mathfrak{X}} = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{-1}^{-t} x(\tau)\,d\tau\Big)\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{-t} x(\tau)\,d\tau \int\limits_{-1}^{t}\overline{y(\tau)}\,d\tau\,\Bigg|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\big(-x(-t)\big)\Big(\int\limits_{-1}^{t}\overline{y(\tau)}\,d\tau\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x(-t)\overline{\Big(\int\limits_{-1}^{t} y(\tau)\,d\tau\Big)}\,dt = [x,Ty]_{\mathfrak{X}},$$

и это позволяет (при помощи трюка) построить квадратичное расщепление его дефекта $\delta_T = I - T^2$. А именно, пусть $\mathfrak{Y}$ – то же пространство $C[-1,1]$, но с внутренним произведением $[x,y]_{\mathfrak{Y}} := -[x,y]_{\mathfrak{X}}$. Обозначим через $\mathscr{T}$ тот же оператор T, но действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Тогда $\mathscr{T}^{\sharp} = -\mathscr{T}$:

$$[\mathscr{T}x,y]_{\mathfrak{Y}} := -[Tx,y]_{\mathfrak{X}} = -[x,Ty]_{\mathfrak{X}} = -[x,\mathscr{T}y]_{\mathfrak{X}} \quad (x\in\mathfrak{X},\ y\in\mathfrak{Y}).$$

Положим $C := I + \mathscr{T}$. Тогда C – квадратичное расщепление δ_T:

$$C^{\sharp}C = (I+\mathscr{T})^{\sharp}(I+\mathscr{T}) = (I-\mathscr{T})(I+\mathscr{T}) = (I-T)(I+T) = I - T^2 = \delta_T.$$

Ядро $C^{\sharp}$ – нулевое. Действительно, если $x_0 \in \ker C^{\sharp}$, то

$$0 = (I+\mathscr{T})^{\sharp}x_0 = (I-\mathscr{T})x_0 = (I-T)x_0 \;\Leftrightarrow\; x_0(t) = \int\limits_{-1}^{t} x_0(\tau)\,d\tau \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x_0'(t) = x_0(t),\ x_0(-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0.$$

Далее, нетрудно видеть, что $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций x, удовлетворяющих условию $x^{(n)}(-1) = 0$ $(n\in\mathbb{N}_+)$. Оператор T обратим, и $CT^{-(k+1)}x = (I+T)T^{-(k+1)}x = x^{(k+1)} + x^{(k)}$ для $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n\mathfrak{X}$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|CT^{-(k+1)}x\|^2 < \infty$ в том и только том случае, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|(x'+x)^{(k)}\|^2 < \infty$. Но для интегрального оператора известно, что $\|T^n\| \to 0,\ n\to\infty$, и учитывая сходимость $\|(x'+x)^{(n)}\| \to 0,\ n\to\infty$, получим цепочку соотношений:

$$\|x'+x\| = \|T^n(x'+x)^{(n)}\| \leqslant \|T^n\|\|(x'+x)^{(n)}\| \to 0,\ n\to\infty,$$

из которой следует равенство $x'+x = 0$. А функция x, удовлетворяющая этому дифференциальному уравнению с начальным условием $x'(-1) = 0$ – нулевая.

Итак, мы выяснили, что для данного случая множество $\mathscr{X}_V^{nd}$ состоит лишь из нуль–вектора (см. следствие 2). Таким образом, остаточное подпространство минимальной полуунитарной дилатации V интегрального оператора T – *нулевое*, и V представляет собой односторонний сдвиг.

Замечание 5. Рассуждения этого пункта без труда переносятся на чуть более общий случай $\mathfrak{X} = C[a,b]$ с внутренним произведением $[x,y]_{\mathfrak{X}} := \int\limits_a^b x(\frac{a+b}{2} - t)\,\overline{y(t)}\,dt$ и оператором $(Tx)(t) := \int\limits_a^t x(\tau)\,d\tau$.

Заключение

Итак, дано конструктивное описание остаточного подпространства полуунитарной дилатации линейного непрерывного оператора, действующего в банаховом пространстве; а точнее, оператора, являющегося стрелкой категории $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ и имеющего квадратичное расщепление своего дефекта из $\mathbf{B}^{(\mathbf{mutadj})}$ (см. стр. 82). *Основным результатом* работы является теорема 2 (стр. 86). *Дальнейшие перспективы* исследований в таком направлении – это попытки хотя бы наметить те же вехи в «банаховой области», которые были «пройдены гигантами» ([4, 9]) в «гильбертовой»: построение унитарной дилатации, построение и изучение характеристической функции, построение и изучение модели и пр.

Список литературы

1. Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С. *Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой* // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, Вып. 4. – С. 3–56
2. Ароншайн Р. *Квадратичные формы на векторных пространствах* // Математика (сб. переводов). – 1964. – Т. 8, № 5. – С. 105–168
3. Davis Ch. *J–unitary dilation of a general operator* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1970. – Vol. 31. – P. 75–86
4. Сёкефальви–Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Мир, 1970. – 431 с.
5. Davis Ch., Foiaş C. *Operators with bounded characteristic function and their J–unitary dilation* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1971. – Vol. 32. – P. 127–139
6. Штраус В. А. *Некоторые вопросы геометрии и спектральной теории операторов в банаховых пространствах с эрмитовой формой*: Дис... канд. физ.–мат. наук: 01.01.01. – Воронеж, 1972. – 126 с.
7. Bognar J. *Indefinite inner product spaces.* – Berlin: Springer, 1974. – 225 p.
8. McEnnis B. W. *Shifts on indefinite inner product spaces* // Pacific J. Math. – 1979. – Vol. 81. – P. 113–130
9. Сёкефальви–Надь Б. *Унитарные дилатации операторов в гильбертовом пространстве и смежные вопросы*// Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. *Лекции по функциональному анализу. Добавление 2.* – М.: Мир, 1979. – С. 511–560
10. Никольский Н. К. *Лекции об операторе сдвига.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. McEnnis B. W. *Shifts on indefinite inner product spaces. II.* // Pacific J. Math. – 1982. – Vol. 100. – P. 177–183
12. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.
13. Никольский Н. К., Хрущёв С. В. *Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций* // Труды Математического института АН СССР им. Стеклова. – 1987 – Т. 176. – С. 97–210

14. Constantinescu T., Gheondea A. *On unitary dilations and characteristic functions in indefinite inner product spaces* // Oper. Theory: Adv. Appl. – Vol. 24. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1987. – P. 87–102
15. Bruinsma P., Dijksma A., de Snoo H. S. V. *Unitary dilations of contractions in* Π_κ // Oper. Theory: Adv. Appl. – Vol. 28. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1988. – P. 27–42
16. Штраус В. А. *Модельное представление и функциональное исчисление операторов в пространствах с индефинитной метрикой*: Вар–нт дисс... д–ра физ.–мат. наук: 01.01.01. –Челябинск, 1993. – 363 с.
17. Кутателадзе С. С. *Основы функционального анализа.* – 4–е изд., испр. – Новосибирск: Изд–во Ин–та математики, 2001. – xii+354 с.
18. Rovnyak J. *Methods of Krein space operator theory* // Oper. Theory: Adv. Appl. – Vol. 134. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2002. – P. 31–66
19. Тышкевич Д. Л. *Элементарные ротации операторов в категориях с квадратичным расщеплением* // Таврический Вестник Математики и Информатики (ТВИМ). – 2004, Вып. 1. – С. 112–124
20. Tyshkevich D. L. *Elementary rotation of a semiunutary operator in regular Banach spaces* // Fundamental and Applied Mathematics. – 2006. – vol. 12, №6. – P. 175–192
21. Тышкевич Д. Л. *О разложении Вольда полуунитарного оператора в банаховых пространствах с индефинитной метрикой* // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. – 2006. – Т.19(58), №1. – С. 98–124
22. Тышкевич Д. Л. *Об ортогонализации систем векторов и разложении типа Вольда в линейных пространствах с внутренним произведением*: Дис... канд. физ.–мат. наук: 01.01.01. – Харьков, 2008. – 187 с.

Статья поступила в редакцию 25.12.2008