УДК 517.97

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ

© Ибрагимов Н.С.

Бакинский Государственный Университет
Кафедра экономической информатики
ул. Академика Захид Халилова 23, Баку, Азербайджанская Республика
e-mail: *ns.ibragimov@gmail.com*

Abstract. In this paper we study the identification problem of determining the complex-valued coefficient for non-stationary equation quasi optics. In this case we prove existence and uniqueness of the solution of identification problem. In addition, the necessary condition for solution of identification problem of the variational inequality type is established.

Введение

Задачи идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики часто возникают в нелинейной оптике при изучении процессов распространения светового пучка в неоднородной среде, в которых неизвестными функциями обычно являются показатели преломления и поглощения среды, а также начальная фаза излученной волны [1]. Отметим, что ранее задачи идентификации об определении фазы излученной волны для стационарного уравнения квазиоптики изучены, например, в работах [1–3] и др., а задачи идентификации об определении вещественнозначного коэффициента, то есть коэффициента преломления среды в стационарном уравнении квазиоптики, другими словами, в нестационарном уравнении Шредингера ранее исследованы, например, в работах [4–10] и др.

В данной работе рассматривается задача идентификации об определении комплекснозначного коэффициента нестационарного уравнения квазиоптики, где вещественная часть комплексного коэффициента является показателем преломления, а мнимая часть является показателем поглощения неоднородной нелинейной среды. Следует отметить, что задача идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики впервые была изучена в работах [11, 12], которая по постановке и по классу решений начально-краевой задачи для уравнения квазиоптики отличается от настоящей работы. Поэтому исследование задачи идентификации об определении комплекснозначного коэффициента в нестационарном уравнении квазиоптики в настоящей работе представляет немалый интерес.

1. Постановка задачи

Пусть D – ограниченная область n-мерного евклидова пространства E^n, Γ – граница области D, которая предполагается достаточно гладкой, например, $\Gamma \subset C^2$, $T > 0, L > 0$ – заданные числа, $0 \le t \le T$, $0 \le z \le L$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная точка области D, $\Omega_t = D \times (0,t)$, $\Omega_z = D \times (0,z)$, $\Omega_{tz} = D \times (0,t) \times (0,z)$, $\Omega = \Omega_{TL}$, $S_{tz} = \Gamma \times (0,t) \times (0,z)$, $S = S_{TL}$, $C^k([0,T],B)$ – банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \ge 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B, $L_p(D)$ – лебегово пространство функций, суммируемых в области D со степенью $p \geq 1$; $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(Q)$, $p \geq 1, k \geq 0$, $m \geq 0$ – соболевы пространства, которые определены, например, в [13]; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x,t,z)$ из $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ из пространства $L_2(\Omega)$, скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(u_1 \overline{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial z} \right) dxdtdz,$$

$$\|u\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty;$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x,t,z)$ пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_p}$, $j,p = \overline{1,n}$, из пространства $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(u_1 \overline{u}_2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_j} + \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_p}\frac{\partial^2 \overline{u}_2}{\partial x_j \partial x_p} \right) dxdtdz,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ – подпространство пространства $W_2^{2,1,1}(\Omega)$, элементы которого обращаются в нуль на $S = \Gamma \times (0,T) \times (0,L)$; символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через $c_j, j = 0,1,2,\ldots$.

Рассмотрим процесс, состояние которого описывается следующим нестационарным линейным уравнением квазиоптики [1]:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial \psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_p} \right) + a(x)\psi +$$
$$+ v_0(x,t,z)\psi + iv_1(x,t,z)\psi = f(x,t,z), \quad (x,t,z) \in \Omega, \tag{1}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\psi = \psi(x,t,z)$ – волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля световой волны (светового пучка), распространяющейся вдоль оси z, $a_0 > 0$ – заданное число, a_{jp}, $j,p = \overline{1,n}$, $a(x)$ – заданные вещественнозначные измеримые ограниченные функции с измеримыми ограниченными производными $\dfrac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l}$, $j,p,l = \overline{1,n}$, удовлетворяющие условиям:

$$a_{jp}(x) = a_{pj}(x),\ j,p = 1,2,\ldots,n,\ \mu_0 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \leq \sum_{j,p=1}^{n} a_{jp}(x)\xi_j\bar{\xi}_p \leq$$

$$\leq \mu_1 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2, \ \forall \xi_j \in \mathbf{C}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \overset{\circ}{\forall} x \in D, \ \mu_0, \mu_1 = \text{const} > 0; \tag{2}$$

$$\left| \frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l} \right| \leq \mu_2, \ \overset{\circ}{\forall} x \in D, \ j, p, l = \overline{1, n}, \ \mu_2 = \text{const} > 0; \tag{3}$$

$$0 \leq a(x) \leq \mu_3, \ \overset{\circ}{\forall} x \in D, \ \mu_3 = \text{const} > 0; \tag{4}$$

$f(x,t,z)$ – комплекснозначная измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$f \in W_2^{0,1,1}(\Omega), \tag{5}$$

$v_0(x,t,z), v_1(x,t,z)$ – неизвестные коэффициенты или показатели преломления и поглощения среды распространения световых волн. Пусть для уравнения (1) заданы следующие начальное и краевое условия:

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_L, \tag{6}$$

$$\psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{7}$$

$$\psi\big|_S = 0, \tag{8}$$

где $\varphi_0(x,z)$ – начальная комплексная амплитуда электрического поля световой волны, $\varphi_1(x,t)$ – начальный фазовый профиль световой волны, которые удовлетворяют условиям:

$$\varphi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L), \quad \varphi_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T). \tag{9}$$

Наша цель заключается в определении неизвестных коэффициентов $v_0(x,t,z)$, $v_1(x,t,z)$ на основе получения заданного распределения $y_0 = y_0(x,z)$ световых волн в момент времени $t = T$, то есть на основе дополнительной информации:

$$\psi(x, T, z) = y_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_L, \tag{10}$$

или на основе получения заданного распределения $y_1 = y_1(x,t)$ световых волн на поверхности области исследования, расположенного на расстоянии $z = L$ от поверхности передающего объекта, то есть на основе дополнительной информации:

$$\psi(x, t, L) = y_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{11}$$

где $y_0(x,z), y_1(x,t)$ – заданные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$y_0 \in L_2(\Omega_L), \quad y_1 \in L_2(\Omega_T). \tag{12}$$

Пусть функция $v = (v_0, v_1)$, $v_0 = v_0(x,t,z)$, $v_1 = v_1(x,t,z)$, будет отыскана на множестве:

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), \ v_m \in W_2^{0,1,1}(\Omega), \ |v_m(x,t,z)| \leq b_m, \right.$$
$$\left. \left| \frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial t} \right| \leq d_m, \ \left| \frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial z} \right| \leq c_m, \ m = 0, 1, \ \overset{\circ}{\forall} (x,t,z) \in \Omega \right\},$$

где $b_m > 0, \ d_m > 0, \ c_m > 0, \ m = 0, 1$ – заданные числа. Множество V будем называть множеством допустимых элементов. Определение $v = (v_0, v_1)$ из множества V при условиях (1), (6)–(8), (10) или (11) является обратной задачей или задачей идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики (1). Вариационная постановка этой задачи заключается в минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \beta_0\|\psi(\cdot,T,\cdot) - y_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \beta_1\|\psi(\cdot,\cdot,L) - y_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \alpha\|v-\omega\|^2_H \qquad (13)$$

на множестве V при условиях (1), (6)–(8), где $\alpha \geq 0$ – заданное число, $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ – заданные числа такие, что $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$, $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H$ – заданный элемент, $H \equiv W_2^{0,1,1}(\Omega) \times W_2^{0,1,1}(\Omega)$. Ниже будем изучать задачу о минимизации функционала (13) на множестве V при условиях (1), (6)–(8), которую будем называть задачей идентификации (1), (6)–(8), (13).

При каждом $v \in V$ задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v)$ из условий (1), (6)–(8), будем называть прямой задачей для нестационарного уравнения квазиоптики (1). Под решением прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ будем понимать функцию $\psi(x,t,z)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям (1), (6)-(8) для почти всех $(x,t,z) \in \Omega$, то есть уравнению (1) для $\overset{\circ}{\forall}\ (x,t,z) \in \Omega$, условиям (6), (7) для $\overset{\circ}{\forall}\ (x,z) \in \Omega_L$, $\overset{\circ}{\forall}\ (x,t) \in \Omega_T$, соответственно, и краевому условию (8) для $\overset{\circ}{\forall}\ (\xi,t,z) \in S$.

Следует отметить, что прямая задача типа (1), (6)–(8) ранее была предметом исследования в работе [11], где было доказано существование и единственность слабого обобщенного решения из пространства $C^0([0,T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0,L], L_2(\Omega_T))$ при более слабых условиях. В настоящем случае класс решений прямой задачи (1), (6)–(8) является пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и данные задачи являются более гладкими функциями. Поэтому для изучения задачи идентификации (1), (6)–(8), (13) нам необходимо сначала изучить вопрос разрешимости прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$. С этой целью, используя теорию вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве [14, 15] и метод Галеркина, можем установить справедливость утверждения:

Теорема 1. *Пусть функции $a_{jp}(x)$, $j,p = \overline{1,n}$, $a(x)$, $f(x,t,z)$, $\varphi_0(x,z)$, $\varphi_1(x,t)$ удовлетворяют условиям (2)–(5), (9) соответсвенно, а граница области D достаточно гладкая. Тогда прямая задача (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:*

$$\|\psi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \leq c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right), \qquad (14)$$

где $c_0 > 0$ – постоянная, не зависящая от φ_0, φ_1 и f.

Из этой теоремы и из вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0,T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0,L], L_2(\Omega_T))$ следует, что функционал (13) имеет смысл в рассматриваемом классе решений прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом заданном $v \in V$.

2. Существование и единственность решения задачи идентификации

Сначала установим, что задача идентификации (1), (6)–(8), (13) имеет единственное решение при $\alpha > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, функции $y_0(x,z)$, $y_1(x,t)$ удовлетворяют условиям (12), а $\omega \in H$ – заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (6)-(8), (13) имеет единственное решение.*

Доказательство. Сперва докажем непрерывность функционала

$$J_0(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} \tag{15}$$

на множестве V. Пусть $\Delta v \in B \equiv W^{0,1,1}_\infty(\Omega) \times W^{0,1,1}_\infty(\Omega)$ – приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \Delta v \in V$ и $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z; v+\Delta v) - \psi(x,t,z;v)$, где $\psi(x,t,z;v)$ – решение прямой задачи (1), (6)–(8) при $v \in V$. Из условий (1), (6)–(8) следует, что $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t,z)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \Delta\psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_p}\right) + a(x)\Delta\psi + \\ +(v_0(x,t,z) + \Delta v_0(x,t,z))\Delta\psi + i(v_1(x,t,z) + \Delta v_1(x,t,z))\Delta\psi = \\ = -\Delta v_0(x,t,z)\psi - i\Delta v_1(x,t,z)\psi, \ \ (x,t,z) \in \Omega, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\Delta\psi(x,0,z) = 0, \ (x,z) \in \Omega_L, \quad \Delta\psi(x,t,0) = 0, \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{17}$$

$$\Delta\psi\big|_S = 0. \tag{18}$$

Оценим решение этой задачи. С этой целью обе части уравнения (16) умножим на функцию $\Delta\bar{\psi} = \Delta\bar{\psi}(x,t,z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_{tz}. В результате, из полученного равенства вычитая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta + \int\limits_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial z}|\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta = -2\int\limits_{\Omega_{tz}} (v_1 + \Delta v_1)|\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta - \\ -2\int\limits_{\Omega_{tz}} \mathrm{Im}(\Delta v_0 \psi \Delta\bar{\psi}) dx d\tau d\theta - 2\int\limits_{\Omega_{tz}} \mathrm{Re}(\Delta v_1 \psi \Delta\bar{\psi}) dx d\tau d\theta, \ \ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L]. \end{gathered}$$

Из этого равенства с помощью оценки (14) и принятых условий можем установить справедливость оценки:

$$\|\Delta\psi(\cdot,t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\Delta\psi(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_1\left(\|\Delta v_0\|^2_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta v_1\|^2_{L_\infty(\Omega)}\right), \tag{19}$$

для $\forall t \in [0,T], \ \forall z \in [0,L]$.

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v \in V$. Используя формулу (15), приращение функционала можно представить в виде:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v + \Delta v) - J_0(v) =$$
$$= -2\beta_0 \int\limits_{\Omega_L} \mathrm{Re}[(\psi(x,T,z) - y_0(x,z))\Delta\bar{\psi}(x,T,z)]dxdz +$$
$$+2\beta_1 \int\limits_{\Omega_T} \mathrm{Re}[(\psi(x,t,L) - y_1(x,t))\Delta\bar{\psi}(x,t,L)]dxdt +$$
$$+\beta_0 \left\|\Delta\psi(\cdot,T,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \beta_1 \left\|\Delta\psi(\cdot,\cdot,L)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \tag{20}$$

Отсюда в силу оценок (15), (19) и неравенства:

$$\left\|\psi(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \left\|\psi(\cdot,\cdot,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_2 \left\|\psi\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \tag{21}$$

для $\forall t \in [0,T]$, $\forall z \in [0,L]$ получим справедливость неравенства:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_3(\|v_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L_\infty(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L_\infty(\Omega)}).$$

Из этого неравенства получим следующее предельное соотношение:

$$|\Delta J_0(v)| \to 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta v\|_B \to 0 \tag{22}$$

для $\forall v \in V$. Из этого предельного соотношения следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Ввиду $J_0(v) \ge 0, \forall v \in V$, получим снизу ограниченность $J_0(v)$ на множестве V. Кроме того, нетрудно доказать, что множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерно выпуклого пространства $H \equiv W_2^{0,1,1}(\Omega) \times W_2^{0,1,1}(\Omega)$ [16, стр.182]. Тогда можем утверждать, что выполняются все условия теоремы о существовании и единственности решения в задачах невыпуклой оптимизации, известной из работы [17]. Поэтому в силу утверждения этой теоремы заключаем, что существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (6)-(8), (13) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана. □

Эта теорема указывает на то, что задача идентификации (1), (6)–(8), (13) при $\alpha > 0$ имеет решение не для всякого $\omega \in H$. Следующее утверждение показывает, что задача идентификации имеет хотя бы одно решение при $\alpha \ge 0$ для любого $\omega \in H$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует хотя бы одно решение задачи идентификации (1), (6)–(8), (13) при $\alpha \ge 0$ для любого $\omega \in H$.*

Доказательство этой теоремы проводится методикой работы [18] с установлением слабой полунепрерывности снизу функционала $J_\alpha(v)$ на множестве v при $\alpha \ge 0$.

3. Дифференцируемость функционала и необходимое условие для решения задачи идентификации

В этом разделе будем изучать вопрос необходимого условия для решения задачи идентификации (1), (6)–(8), (13). Пусть $\phi = \phi(x,t,z)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial\phi}{\partial z} - \sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) + a(x)\phi +$$

$$+v_0(x,t,z)\phi - iv_1(x,t,z)\phi = 0, \ \ (x,t,z)\in\Omega, \tag{23}$$

$$\phi(x,T,z) = -2i\beta_0(\psi(x,T,z) - y_0(x,z)), \ (x,z)\in\Omega_L, \tag{24}$$

$$\phi(x,t,L) = -\frac{2i\beta_1}{a_0}(\psi(x,t,L) - y_1(x,t)), \ (x,t)\in\Omega_T, \tag{25}$$

$$\phi\big|_S = 0, \tag{26}$$

где $\psi = \psi(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v)$ – решение прямой задачи при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи будем понимать функцию $\phi = \phi(x,t,z)$ из пространства $B_0 \equiv C^0([0,T],L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0,L],L_2(\Omega_T))$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_{\Omega}\phi\left(-i\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial t} - ia_0\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\bar\eta_1}{\partial x_p}\right) +\right.$$

$$\left.+a(x)\bar\eta_1 + v_0(x,t,z)\bar\eta_1 - iv_1(x,t,z)\bar\eta_1\right)dxdtdz =$$

$$= -2\beta_0\int\limits_{\Omega_L}(\psi(x,T,z) - y_0(x,z))\bar\eta_1(x,T,z)dxdz -$$

$$-2\beta_1\int\limits_{\Omega_T}(\psi(x,t,L) - y_1(x,t))\bar\eta_1(x,t,L)dxdt +$$

$$+i\int\limits_{\Omega_L}\phi(x,0,z)\bar\eta_1(x,0,z)dxdz + ia_0\int\limits_{\Omega_T}\phi(x,t,0)\bar\eta_1(x,t,0)dxdt \tag{27}$$

для любой функции $\eta_1 = \eta_1(x,t,z)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$.

С помощью замены $\tau = T - t$, $\theta = L - z$ сопряженную задачу (23)–(26) можно свести к начально-краевой задаче, которая является комплексно сопряженной прямой задаче (1), (6)–(8). Поэтому, используя методику сглаживания данных и теорему 1, можем установить справедливость утверждения о том, что сопряженная задача (23)–(26) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi(\cdot,t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\phi(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L_2(\Omega_T)} \leq$$

$$\leq c_4 \left(\|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} \right), \tag{28}$$
$$\forall t \in [0, T], \ \ \forall z \in [0, L].$$

Для установления необходимого условия в задаче идентификации (1), (6)–(8), (13) сначала необходимо найти формулу для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любой функции $w = w(x, t, z)$ из B и любого элемента $v \in V$ существует первая вариация функционала $J_\alpha(v)$ и справедливо следующее выражение для первой вариации:*

$$\delta J_\alpha(v, w) = \int\limits_\Omega \mathrm{Re}(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z)) w_0(x, t, z) dxdtdz -$$
$$- \int\limits_\Omega \mathrm{Im}(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z)) w_1(x, t, z) dxdtdz +$$
$$+ 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} (v_m(x, t, z) - \omega_m(x, t, z)) w_m(x, t, z) dxdtdz +$$
$$+ 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \frac{\partial w_m(x, t, z)}{\partial t} dxdtdz +$$
$$+ 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_m(x, t, z)}{\partial z} dxdtdz, \tag{29}$$

где $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ – решение прямой, а $\phi = \phi(x, t, z) \equiv \phi(x, t, z; v)$ – решение сопряженной задач при $v \in V$, $w = (w_0, w_1) = (w_0(x, t, z), w_1(x, t, z))$.

Доказательство. Используя формулу (13) и (20) приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$ можем представить в виде:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) =$$
$$= 2\beta_0 \int\limits_{\Omega_L} \mathrm{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)) \Delta\bar{\psi}(x, T, z)] dxdz +$$
$$+ 2\beta_1 \int\limits_{\Omega_T} \mathrm{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)) \Delta\bar{\psi}(x, t, L)] dxdt +$$
$$+ 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} (v_m(x, t, z) - \omega_m(x, t, z)) \Delta v_m(x, t, z) dxdtdz +$$
$$+ 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \frac{\partial \Delta v_m(x, t, z)}{\partial t} dxdtdz +$$

$$+2\alpha\int\limits_{\Omega}\sum_{m=0}^{1}\left(\frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial z}-\frac{\partial\omega_m(x,t,z)}{\partial z}\right)\frac{\partial\Delta v_m(x,t,z)}{\partial z}dxdtdz+$$
$$+\beta_0\|\Delta\psi(\cdot,T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)}+\beta_1\|\Delta\psi(\cdot,\cdot,L)\|^2_{L_2(\Omega_T)}+\alpha\|\Delta v\|^2_H, \qquad (30)$$

где $\Delta\psi=\Delta\psi(x,t,z)$ – решение начально-краевой задачи (16)–(18).

Используя сопряженную задачу и начально-краевую задачу (16)–(18), можно установить справедливость равенства:

$$2\beta_0\int\limits_{\Omega_L}\mathrm{Re}[(\psi(x,T,z)-y_0(x,z))\Delta\bar{\psi}(x,T,z)]dxdz+$$
$$+2\beta_1\int\limits_{\Omega_T}\mathrm{Re}[(\psi(x,t,L)-y_1(x,t))\Delta\bar{\psi}(x,t,L)]dxdt=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\mathrm{Re}[(\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_0(x,t,z)]dxdtdz-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\mathrm{Im}[(\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_1(x,t,z)]dxdtdz+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\mathrm{Re}[(\Delta\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_0(x,t,z)]dxdtdz-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\mathrm{Im}[(\Delta\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_1(x,t,z)]dxdtdz. \qquad (31)$$

С учетом этого приращение функционала $J_\alpha(v)$ можем написать в виде:

$$\Delta J_\alpha(v)=\int\limits_{\Omega}\mathrm{Re}(\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_0(x,t,z)dxdtdz-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\mathrm{Im}(\psi(x,t,z)\bar{\phi}(x,t,z))\Delta v_1(x,t,z)dxdtdz+$$
$$+2\alpha\int\limits_{\Omega}\sum_{m=0}^{1}(v_m(x,t,z)-\omega_m(x,t,z))\Delta v_m(x,t,z)dxdtdz+$$
$$+2\alpha\int\limits_{\Omega}\sum_{m=0}^{1}\left(\frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\omega_m(x,t,z)}{\partial t}\right)\frac{\partial\Delta v_m(x,t,z)}{\partial t}dxdtdz+$$
$$+2\alpha\int\limits_{\Omega}\sum_{m=0}^{1}\left(\frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial z}-\frac{\partial\omega_m(x,t,z)}{\partial z}\right)\frac{\partial\Delta v_m(x,t,z)}{\partial z}dxdtdz+R(\Delta v), \qquad (32)$$

где $R(\Delta v)$ определяется формулой:

$$R(\Delta v) = \beta_0 \|\Delta\psi(\cdot, T, \cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \beta_1 \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, L)\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H + \\ + \int\limits_\Omega \mathrm{Re}(\Delta\psi\bar{\phi})\Delta v_0 dxdtdz - \int\limits_\Omega \mathrm{Im}(\Delta\psi\bar{\phi})\Delta v_1 dxdtdz. \quad (33)$$

Отсюда в силу оценок (14), (19), (3) имеем:

$$|R(\Delta v)| \le c_5 \|\Delta v\|^2_B, \quad (34)$$

где постоянная $c_5 > 0$ не зависит от Δv.

Используя формулу (32) и неравенство (34), с помощью методики работы [19] можем установить формулу (29) для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$. Теорема 4 доказана. □

Наконец, сформулируем необходимое условие для решения задачи идентификации в виде вариационного неравенства.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть, кроме того,* $V_* \equiv \left\{ v^* \in V : \ J_\alpha(v^*) = J_{\alpha^*} = \inf\limits_{v \in V} J_\alpha(v) \right\}$ *– множество решений задачи идентификации (1), (6) –(8), (13). Тогда для любого элемента $v^* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства:*

$$\int\limits_\Omega \mathrm{Re}(\psi^*(x,t,z)\bar{\phi}^*(x,t,z))(v_0(x,t,z) - v_0^*(x,t,z))dxdtdz - \\ - \int\limits_\Omega \mathrm{Im}(\psi^*(x,t,z)\bar{\phi}^*(x,t,z))(v_1(x,t,z) - v_1^*(x,t,z))dxdtdz + \\ + 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} (v_m^*(x,t,z) - \omega_m(x,t,z))(v_m(x,t,z) - v_m^*(x,t,z))dxdtdz + \\ + 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} \left(\frac{\partial v_m^*(x,t,z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x,t,z)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial t} - \frac{\partial v_m^*(x,t,z)}{\partial t} \right) dxdtdz + \\ + 2\alpha \int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{1} \left(\frac{\partial v_m^*(x,t,z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x,t,z)}{\partial z} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial v_m(x,t,z)}{\partial z} - \frac{\partial v_m^*(x,t,z)}{\partial z} \right) dxdtdz \ge 0, \ \ \forall v \in V, \quad (35)$$

где $\psi^*(x,t,z) \equiv \psi(x,t,z;v^*)$, $\phi^*(x,t,z) \equiv \phi(x,t,z;v^*)$ – соответственно решения прямой и сопряженной задач при $v^* \in V$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью формулы (29) для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$, определенного на множестве V.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

– Доказаны теоремы о существовании и единственности решения прямой задачи идентификации (1), (6) –(8), (13) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$.
– Установлена формула для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$.
– Сформулировано необходимое условие для решения задачи идентификации (1), (6) –(8), (13) в виде вариационного неравенства (35).

Список литературы

1. *Воронцов М.А., Шмальгаузен И.И.* Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. – 335 с.
2. *Шамеева Т.Ю.* Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде // Вестн. Московск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. – 1985, №1. – С. 12 –19.
3. *Потанов И.М., Разгулин А.В., Шамеева Т.Ю.* Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения типа Шредингера // Вестн. Московск.ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. – 1987, №1. – С. 8-18.
4. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР. – 1988, т.303, №5. – С. 1044-1048.
5. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами // Автоматика и телемехан. – 1989, №12. – С. 27-38.
6. *Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* О вариационном методе решения методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера // Изв. АН Азерб. Сер. физ-техн. и матем. наук. – 1994, т.XV, №5-6. – С. 58-61.
7. *Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. – 1997, т.33, № 12. – С. 1691-1698.
8. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление квантовомеханическим потенциалом // Труды ИММ АНА. – 1998, т. XVIII. – С. 75-80.
9. *Искендеров А.Д.* Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управления». – Баку, 2001. – С. 6-36.
10. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун.-та. – 2007. – С. 3-56.
11. *Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С.* Задача оптимального управления для нестационарного уравнения квазиоптики // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управление». – Баку, 2001. – С. 49-57.
12. *Yildiz B., Kilicoglu O., Yagubov G.* Optimal control problem for nonstationary Schrodinger equation // Numerical methods for partial differential equations. – 2009, 25. – Pp. 1195-1203.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
14. *Гохберг И.Н., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
15. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. – Изд-во «Наукова Думка», Киев, 1973. – 182 с.
16. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
17. *Goebel M.* On existence of optimal control // Math. Nachr. – 1979, vol.93. – Pp. 67 –73.
18. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
19. *Мину М.* Математическое программирование. – М.:Наука, 1990. – 488 с.

Статья поступила в редакцию 27.10.2010