УДК 519.4

О КЛАССИФИКАЦИИ ПАРЫ q-КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© **Ахрамович М.В., Муратов М.А.**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *mustafa_muratov@mail.ru fromen@bk.ru*

Abstract. We prove that the problem of classification (up to a similarity transformation) the pair of nilpotent operators (A, B), $A^3 = B^3 = 0$ with condition of q-commutation $BA = qAB$, where $q \in \mathbf{C}$, $q \neq 0$, is "wild".

Введение

В работах И. М. Гельфанда, В. Ф. Пономарева [1] и С. А. Кругляка [2] (см. также [3]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов A и B в конечномерном комплексном линейном пространстве $\mathbf{V}$ относительно преобразования подобия содержит задачу о классификации любого конечного числа произвольных некоммутирующих линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Поэтому попытка непосредственного нахождения канонического вида пары коммутирующих операторов (A, B), с точностью до преобразования подобия, не имеет смысла, т.е. является «дикой» (см. [4],[5])). В данной заметке мы показываем, что «дикой» является и задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов (A, B), $A^3 = B^3 = 0$, связанных соотношением q-коммутации: $BA = qAB$, где $q \in \mathbf{C}$, $q \neq 0$.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим конечное семейство $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathscr{B}(\mathbf{V})$. Такое семейство при $m \geqslant 1$ будем называть также *m-кой* или *набором операторов* в $\mathbf{V}$.

Определение 1. m-ка $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathscr{B}(\mathbf{V})$ называется *неразложимой*, если векторное пространство $\mathbf{V}$ нельзя представить в виде прямой суммы нетривиальных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N},$$

инвариантных относительно каждого оператора A_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Имеет место следующий критерий неразложимости.

Предложение 1. m-ка $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ операторов из $\mathscr{B}(\mathbf{V})$ является неразложимой тогда и только тогда, когда из условия:

$$RA_k = A_kR,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ R^2 = R$$

следует, что $R = 0$ или $R = I$.

Определение 2. Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ два векторных пространства. Наборы операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ в $\mathbf{V}$ и $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ в $\mathbf{W}$ называются подобными, если существует обратимый оператор $S : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ такой, что

$$SA_kS^{-1} = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Подобие наборов операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ и $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ будем обозначать

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m) \sim (B_1, B_2, \ldots, B_m)$$

или

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m) \overset{S}{\sim} (B_1, B_2, \ldots, B_m)$$

2. q-КОММУТИРУЮЩИЕ ПАРЫ ОПЕРАТОРОВ

Пусть (A, B) — произвольная пара операторов из $\mathscr{B}(\mathbf{V})$. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathscr{V} = \bigoplus \sum_{k=1}^{4} \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}, \ k = 1, 2, 3, 4,$$

и пару операторов $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{B}(\mathscr{V})$:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $q \in \mathbf{C}, \ q \neq 0$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Предложение 2. Операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ удовлетворяют соотношениям:
1)$\mathscr{B}\mathscr{A} = q\mathscr{A}\mathscr{B}$;
2)$\mathscr{A}^3 = \mathscr{B}^3 = 0$.

Допустим, что имеется две пары операторов (A, B) в пространстве $\mathbf{V}$ и $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{V}}$. Построим, как и выше, операторы $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ в пространстве $\mathscr{V} = \bigoplus \sum\limits_{k=1}^{4} \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}, \quad k = 1, 2, 3, 4$ и операторы $(\widetilde{\mathscr{A}, \mathscr{B}})$ в пространстве $\widetilde{\mathscr{V}} = \bigoplus \sum\limits_{k=1}^{4} \widetilde{\mathbf{V}}_k, \ \widetilde{\mathbf{V}}_k = \widetilde{\mathbf{V}}, \ k = 1, 2, 3, 4.$

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{S} : \mathscr{V} \to \widetilde{\mathscr{V}}$ — такой оператор, что*

$$\mathscr{S}\mathscr{A} = \widetilde{\mathscr{A}}\mathscr{S}, \; \mathscr{S}\mathscr{B} = \widetilde{\mathscr{B}}\mathscr{S}.$$

Тогда оператор $\mathscr{S}$ имеет вид:

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть оператор $\mathscr{S}$ имеет вид:

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathscr{S}\mathscr{A} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{11} & S_{12}A + S_{13} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22}A + S_{23} \\ 0 & 0 & S_{31} & S_{32}A + S_{33} \\ 0 & 0 & S_{41} & S_{42}A + S_{43} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathscr{A}}\mathscr{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \widetilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ \widetilde{A}S_{41} & \widetilde{A}S_{42} & \widetilde{A}S_{43} & \widetilde{A}S_{44} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{S}\mathscr{B} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & qS_{11} & 0 & S_{12}B + S_{13}A \\ 0 & qS_{21} & 0 & S_{22}B + S_{23}A \\ 0 & qS_{31} & 0 & S_{32}B + S_{33}A \\ 0 & qS_{41} & 0 & S_{42}B + S_{43}A \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathscr{B}}\mathscr{S} = \begin{pmatrix} 0 & q\widetilde{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{B} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} qS_{21} & qS_{22} & qS_{23} & qS_{24} \\ \widetilde{B}S_{41} & \widetilde{B}S_{42} & \widetilde{B}S_{43} & \widetilde{B}S_{44} \\ \widetilde{A}S_{41} & \widetilde{A}S_{42} & \widetilde{A}S_{43} & \widetilde{A}S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\mathscr{S}\mathscr{A} = \widetilde{\mathscr{A}\mathscr{S}},\ \mathscr{S}\mathscr{B} = \widetilde{\mathscr{B}}\mathscr{S},$$

то имеем следующие системы равенств:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & S_{31} \\ 0 & = & S_{32} \\ S_{11} & = & S_{33} \\ S_{12}A + S_{13} & = & S_{34} \\ 0 & = & \widetilde{A}S_{41} \\ 0 & = & \widetilde{A}S_{42} \\ S_{21} & = & \widetilde{A}S_{43} \\ S_{22}A + S_{23} & = & \widetilde{A}S_{44} \\ 0 & = & S_{41} \\ 0 & = & S_{42} \\ S_{31} & = & S_{43} \\ S_{32}A + S_{33} & = & S_{44} \\ S_{41} & = & 0 \\ S_{42}A + S_{43} & = & 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & qS_{21} \\ qS_{11} & = & qS_{22} \\ 0 & = & qS_{23} \\ S_{12}B + S_{13}A & = & qS_{24} \\ 0 & = & \widetilde{B}S_{41} \\ qS_{21} & = & \widetilde{B}S_{42} \\ 0 & = & \widetilde{B}S_{43} \\ S_{22}B + S_{23}A & = & \widetilde{B}S_{44} \\ 0 & = & \widetilde{A}S_{41} \\ qS_{31} & = & \widetilde{A}S_{42} \\ 0 & = & \widetilde{A}S_{43} \\ S_{32}B + S_{33}A & = & \widetilde{A}S_{44} \\ qS_{41} & = & 0 \\ S_{42}B + S_{43}A & = & 0. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} S_{21} = S_{23} = 0 \\ S_{31} = S_{32} = 0 \\ S_{41} = S_{42} = S_{43} = 0 \\ S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = S. \end{array}\right.$$

Таким образом, оператор $\mathscr{S}$ имеет вид

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\begin{cases} S_{12}A + S_{13} &= S_{34} \\ S_{12}B + S_{13}A &= qS_{24} \\ SA &= \widetilde{A}S \\ SB &= \widetilde{B}S. \end{cases}$$

□

Теорема 1. *Пары операторов (A, B) и $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны пары операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ и $(\widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathscr{B}})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A, B) \overset{S}{\sim} (\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Тогда $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \overset{\mathscr{S}}{\sim} (\widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathscr{B}})$, где оператор $\mathscr{S}$ имеет вид

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Достаточность. Если $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \overset{\mathscr{S}}{\sim} (\widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mathscr{B}})$, где

$$\mathscr{S} : \mathscr{V} \to \widetilde{\mathscr{V}},$$

такой невырожденный оператор, что

$$\mathscr{S}\mathscr{A} = \widetilde{\mathscr{A}}\mathscr{S}, \ \mathscr{S}\mathscr{B} = \widetilde{\mathscr{B}}\mathscr{S}.$$

В силу леммы 1, оператор $\mathscr{S}$ имеет вид:

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\begin{cases} SA &= \widetilde{A}S \\ SB &= \widetilde{B}S. \end{cases}$$

Следовательно, $(A, B) \overset{S}{\sim} (\widetilde{A}, \widetilde{B})$.

□

Теорема 2. *Пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда пара операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ неразложима в пространстве $\mathscr{V}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пара операторов (A, B) неразложима в пространстве $\mathbf{V}$. Допустим, что пара операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ разложима в пространстве $\mathscr{V}$. Тогда, в силу утверждения 1, существуют идемпотенты $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ такие, что

$$\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = \mathscr{I}, \ \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2\mathscr{P}_1 = 0, \ \ [\mathscr{P}_j, \mathscr{A}] = [\mathscr{P}_j, \mathscr{B}] = 0, \ j = 1, 2.$$

В силу леммы 1, операторы $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ имеют вид:

$$\mathscr{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}, \ j = 1, 2.$$

Так как $\mathscr{P}_j^2 = \mathscr{P}_j$, то

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \\ P_j S_{12}^{(j)} + S_{12}^{(j)} P_j = S_{12}^{(j)} \\ P_j S_{13}^{(j)} + S_{13}^{(j)} P_j = S_{13}^{(j)} \\ P_j S_{14}^{(j)} + S_{12}^{(j)} S_{24}^{(j)} + S_{13}^{(j)} S_{34}^{(j)} + S_{14}^{(j)} P_j = S_{14}^{(j)} \\ P_j S_{24}^{(j)} + S_{24}^{(j)} P_j = S_{24}^{(j)} \\ P_j S_{34}^{(j)} + S_{34}^{(j)} P_j = S_{34}^{(j)}. \end{cases}$$

Так как $\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = \widetilde{I}$, то

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I \\ S_{12}^{(1)} + S_{12}^{(2)} = 0 \\ S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} = 0 \\ S_{14}^{(1)} + S_{14}^{(2)} = 0 \\ S_{24}^{(1)} + S_{24}^{(2)} = 0 \\ S_{34}^{(1)} + S_{34}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Из условий $\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2\mathscr{P}_1 = 0$ следует, что

$$\begin{cases} P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_1 S_{12}^{(2)} + S_{12}^{(1)} P_2 = P_2 S_{12}^{(1)} + S_{12}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{13}^{(2)} + S_{13}^{(1)} P_2 = P_2 S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{14}^{(2)} + S_{12}^{(1)} S_{24}^{(2)} + S_{13}^{(1)} S_{34}^{(2)} + S_{14}^{(1)} P_2 = \\ = P_2 S_{14}^{(1)} + S_{12}^{(2)} S_{24}^{(1)} + S_{13}^{(2)} S_{34}^{(1)} + S_{14}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{24}^{(2)} + S_{24}^{(1)} P_2 = P_2 S_{24}^{(1)} + S_{24}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{34}^{(2)} + S_{34}^{(1)} P_2 = P_2 S_{34}^{(1)} + S_{34}^{(2)} P_1 = 0. \end{cases}$$

Так как $[\mathscr{P}_j, \mathscr{A}] = 0$ и

$$\mathscr{P}_j\mathscr{A} = \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_j & S_{12}^{(j)} A + S_{13}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j A \\ 0 & 0 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A}\mathscr{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & AP_j \\ 0 & 0 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{cases} S_{12}^{(j)}A + S_{13}^{(j)} = S_{34}^{(j)} \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

Наконец, так как $[\mathscr{P}_j, \mathscr{B}] = 0$ и

$$\mathscr{P}_j\mathscr{B} = \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & qP_j & 0 & S_{12}^{(j)}B + S_{13}^{(j)}A \\ 0 & 0 & 0 & P_jB \\ 0 & 0 & 0 & P_jA \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{B}\mathscr{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & qP_j & 0 & qS_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & BP_j \\ 0 & 0 & 0 & AP_j, \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

то

$$\begin{cases} S_{12}^{(j)}B + S_{13}^{(j)}A = qS_{24}^{(j)} \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \neq 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

и, значит, пара операторов (A, B) разложима в пространстве $\mathbf{V}$, вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ неразложима в пространстве $\mathscr{V}$.

Достаточность. Допустим, что пара операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ неразложима в пространстве $\mathscr{V}$. Если пара операторов (A, B) разложима в пространстве $\mathbf{V}$, то, в силу утверждения 1, существуют идемпотенты P_1 и P_2 такие, что

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \neq 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j. \end{cases}$$

Тогда для операторов

$$\mathscr{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}, j = 1, 2.$$

имеют место соотношения:

$$\mathscr{P}_j^2 = \mathscr{P}_j \neq 0,\ \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = \mathscr{I},\ \mathscr{P}_1\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2\mathscr{P}_1 = 0,\ [\mathscr{P}_j, \mathscr{A}] = [\mathscr{P}_j, \mathscr{B}] = 0,\ j = 1, 2.$$

Это означает, что пара операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ разложима в пространстве $\mathscr{V}$, вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов (A, B) неразложима в простанстве $\mathbf{V}$. $\square$

Таким образом, задача о классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных линейных операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, $\mathscr{A}^3 = \mathscr{B}^3 = 0$, связанных соотношением q-коммутации $\mathscr{A}\mathscr{B} = q\mathscr{B}\mathscr{A}$, является «дикой».

Заключение

Основным результатом данной статьи является утверждение, что задача классификации пары нильпотентных операторов $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, $\mathscr{A}^3 = \mathscr{B}^3 = 0$, удовлетворяющих соотношению

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = q\mathscr{B}\mathscr{A},\ q \neq 0,$$

а значит, и задача классификации произвольной пары q-коммутирующих операторов, содержат задачу классификации пары операторов без дополнительных условий.

Список литературы

1. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве, Функциональный анализ и его приложения, 3, вып. 4, С. 81-82 (1969).
2. *Кругляк С.А.* О представления группы (p, p) над полем характеристики p. ДАН СССР, 1963, 153, №6, С. 1253-1256.
3. *Гудивок П.М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. Ужгородский национальный университет, Ужгород, 2003. – 118 стр.
4. *Donovan P., Freislich M.R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras. Carleton Math. Lecture Notes, 5, P. 1-119.
5. *Дрозд Ю.А.* Ручные и дикие матричные задачи. Представления и квадратичные формы. Сборник научных трудов Института математики НАН Украины, Киев, С. 39-74.

Статья поступила в редакцию 29.11.2010