УДК 517.925.51

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© **Анашкин О.В.*, Довжик Т.В.**, Митько О.В.***

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *anashkin@crimea.edu*

**Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, Рязань 390005.

Abstract. The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse perturbation at fixed moments is considered. The system of linear approximation is supposed to be non-asymtotically stable. Sufficient conditions on the uniform asymptotic stability of the complete system are obtained.

Введение

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (короче, импульсная система) моделирует поведение эволюционного процесса с конечномерным вектором состояния, который в некоторые моменты времени резко изменяет свое положение. При этом скорость изменения вектора состояния столь велика, что можно считать это изменение практически мгновенным. Физическими примерами таких явлений являются механические удары, электрические импульсы и т.п. Итоги первых пятнадцати лет развития математической теории систем с импульсным воздействием подведены в монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [1], за которой последовали книги [2]-[5]. К настоящему времени это направление в теории дифференциальных уравнений основательно разработано и библиография исследовательских статей насчитывает сотни наименований.

Одним из важнейших вопросов при анализе любого дифференциального уравнения, является проблема устойчивости решений, рассмотренная уже в первой публикации по системам с импульсами [7]. С прикладной точки зрения важно иметь эффективные инструменты для исследования устойчивости конкретных уравнений. Общепризнано, что именно таким инструментом является метод функций Ляпунова (называемый обычно прямым или вторым методом Ляпунова) [8]. Различным аспектам задачи устойчивости и развития прямого метода для импульсных систем уделено много внимания в монографиях [1]–[6] и посвящены статьи [9]–[20], составляющие лишь малую часть публикаций последнего времени по этой тематике.

Обратимость основных теорем прямого метода Ляпунова (см., например, [12, 20]) свидетельствует о его универсальности. Однако подбор подходящей функции Ляпунова, удовлетворяющей этим теоремам, часто оказывается чрезвычайно трудным. Не зря широко распространено мнение, что практическое применение прямого метода Ляпунова является скорее искусством, чем наукой. Поэтому постоянно актуальна задача поиска условий устойчивости, расширяющих класс подходящих функций типа Ляпунова и, тем самым, облегчающих подбор таких функций. В настоящей работе предложены новые достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени в критическом случае, когда система линейного приближения не позволяет определить характер устойчивости полной системы. Используются идеи, сочетающие прямой метод Ляпунова и асимптотический метод усреднения [21]-[23].

1. Постановка задачи

Общепринятым стандартом записи систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени стала следующая форма

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x|_{t=\tau_k} = h_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ – фиксированные моменты ипульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ – скачок решения $x(t)$ в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Система имеет нулевое решение: $f(t, 0) = h_k(0) = 0$. Следуя установившейся традиции [1], будем предполагать непрерывность решений системы (1) слева, т. е. $x(t) = x(t - 0)$. Предполагается также, что функции $f(t, x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности нуля $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geq 0\}$ и $k = 1, 2, \ldots$. Как обычно, $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ есть решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Обозначим через $B_h \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса h с центром в нуле (*h-окрестность нуля*).

Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Систему (1) назовем *невозмущенной* и будем предполагать, что ее нулевое решение неасимптотически устойчиво. Целью настоящей работы является вывод условий устойчивости *возмущенной* системы

$$\begin{aligned} &\dot{y} = F(t, y) = f(t, y) + R(t, y), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta y|_{t=\tau_k} = H_k(y) = h_k(y) + r_k(y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $|R(t, y)| = o(|y|)$, $|r(t, y)| = o(|y|)$ при $|y| \to 0$. Здесь и далее $|\cdot|$ обозначает норму в соответствующем конечномерном пространстве.

В дальнейших рассуждениях существенную роль играет *линеаризация* невозмущенной системы в нуле

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta z\big|_{t=\tau_k} &= B_k z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $|f(t,x) - A(t)x| = o(|x|)$, $|h_k(x) - B_k x| = o(|x|)$ при $|x| \to 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $Z(t, t_0)$ есть матрицант этой системы, нормированный при $t = t_0$, т. е. $Z(t_0, t_0) = I$ — единичная матрица. Предположим, что найдутся числа $0 < \nu_1 \leq \nu_2$ такие, что решение линеаризации $z(t; t_0, x^0) = Z(t, t_0)x^0$ с начальным условием $z(t_0) = x^0$ удовлетворяет при $t \geq t_0$ и $x^0 \in \mathscr{D}$ неравенствам

$$\nu_1|x^0| \leq |z(t; t_0, x^0)| \leq \nu_2|x^0|$$

Это условие заведомо будет выполнено, если норма $|Z(t, t_0)|$ ограничена.

Обозначим через $\mathscr{K}$ «класс Хана» – множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathscr{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$.

Пусть $V(t,x)$ — функция Ляпунова невозмущенной системы (1), непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{R}_+ \times \mathscr{D}$ и удовлетворяющая неравенствам

$$a(|x|) \leq V(t,x) \leq b(|x|), \tag{4}$$

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \leq 0, \quad t \neq \tau_k, \tag{5}$$

$$V(\tau_k, x + h_k(x)) \leq V(\tau_k, x), \tag{6}$$

где $a, b \in \mathscr{K}$. Как следует из [3], эти условия обеспечивают равномерную устойчивость нулевого решения невозмущенной системы (1).

Обозначим $\Phi(t,y) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(t,y) R(t,y)$, $y^k = y(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Как известно [1, стр. 20], решение $y(t; t_0, y^0)$ системы (2) с начальными значениями t_0, y^0 может быть представлено в виде

$$y(t; t_0, y^0) = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} H_k(y^k). \tag{7}$$

Вдоль решения $y(t)$ системы (2) функция $v(t) = V(t, y(t))$ также будет претерпевать разрывы первого рода в моменты импульсных воздействий τ_i. Учитывая (6)–(7), получим

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y^0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,y)\, ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} [V(\tau_k, y^k + H_k(y^k)) - V(\tau_k, y^k + h_k(y^k))]. \tag{8}$$

Разность под знаком суммы представим в виде

$$V(\tau_k, y^k + H_k(y^k)) - V(\tau_k, y^k + h_k(y^k)) = \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y^k + h_k(y^k) + \lambda r_k(y^k))r_k(y^k)\, d\lambda. \quad (9)$$

Обозначая

$$W_k(y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y^k + h_k(y^k) + \lambda r_k(y^k))r_k(y^k)\, d\lambda, \quad (10)$$

окончательно получим

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y^0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, y)\, ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} W_k(y^k). \quad (11)$$

Пусть $\varphi \colon J \to \mathbb{R}^n$ – кусочно-непрерывная на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим

$$\|\varphi\|_J = \sup\{|\varphi(t)|, t \in J\}$$

норму $\varphi \colon J \to \mathbb{R}^n$ в пространстве $KC(J)$ всех таких функций.

Используя лемму Гронуолла, легко получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $J = [t_0, t_0 + T]$: $|x(t; t_0, x^0)| \leq |x^0|\mathrm{const}$, где const зависит только от длины промежутка J. Аналогичная оценка справедлива для решения возмущенной системы (2). Оценку нормы разности решений систем (1) и (2) или систем (2) и (3) на отрезке J можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [5, стр. 25]):

$$|y(t; t_0, y^0) - x(t; t_0, y^0)| \leq \|y - x\|_J = o(|y^0|) \text{ при } |y^0| \to 0.$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и y^0 из заданной окрестности нуля и зависит только от величины T.

2. Условия асимптотической устойчивости

Чтобы не обсуждать возможные паталогии, в дальнейшем будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k распределены более или менее равномерно, а именно, пусть

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2, \quad (12)$$

для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$. Напомним, что нами введены следующие обозначения

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(t, y)R(t, y),$$

$$W_k(y) = r_k(y) \int\limits_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y + h_k(y) + \lambda r_k(y))\, d\lambda.$$

Теорема. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* (5)–(7) *и в области* $\mathbb{R}_+ \times \mathscr{D}$ *выполнены требования:*

1) *существуют константы* $M > 0$, $d_1 > 1$, $d_2 > 1$ *такие, что*

$$|\Phi(t,y)| \le M|y|^{d_1}, \quad |W_k(y)| \le M|x|^{d_2}, \quad |\Phi(t,x) - \Phi(t,y)| \le M\rho^{d_1-1}|x-y|,$$
$$|W_k(x) - W_k(y)| \le M\rho^{d_2-1}|x-y|, \quad \forall x,y \in B_\rho, \quad 0 < \rho < h, \quad k = 1,2,\dots;$$

2) *существуют константы* $T_0 > 0$, *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых* $t_0 \ge 0$, $y^0 \in \mathscr{D}$, $T > T_0$ *верно неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t, z(t;t_0,y^0))\,dt + \sum_{t_0<\tau_k<t_0+T} W_k(z(\tau_k;t_0,y^0)) \le -2\delta|y^0|^d T,$$

где $d = \min\{d_1,d_2\} > 1$, $z(t;t_0,y^0)$ *– решение системы* (3) *с начальным условием* $z(t_0) = y^0$.

Тогда нулевое решение системы (2) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что нулевое решение системы (2) равномерно устойчиво по Ляпунову. Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\tau \in \mathscr{T}$. Положим $\eta = b^{-1}(a(\varepsilon/2))$ и пусть $y(t)$ — решение возмущенной системы, траектория которого выходит в момент τ из точки $y_\tau \in B_\eta \subset B_{\varepsilon/2}$. Тогда $V(\tau, y_\tau) \le b(\eta) < a(\varepsilon/2)$. Пусть при некотором $t_0 \ge \tau$ $V(t_0, y(t_0)) = a(\varepsilon/2)$ и $V(t,y(t)) > a(\varepsilon/2)$ при значениях $t > t_0$, достаточно близких к t_0. Обозначим $y^0 = y(t_0)$ и покажем, что $V(t_0+T, y(t_0+T)) < a(\varepsilon/2)$, где $T \ge T_0$ — не зависящая от t_0 и y^0 постоянная. При этом $y(t) \in B_\varepsilon$ на промежутке $t \in [t_0, t_0+T]$. Отсюда сразу будет следовать искомая равномерная устойчивость.

Оценим изменение функции V на отрезке $[t_0, t_0+T]$. Пусть $x(t) = x(t;t_0,y^0)$, $z(t) = z(t;t_0,y^0)$ – решения невозмущенной системы (1) и линеаризации (3), соответственно, выходящие из одной и той же точки (t_0, y^0). Предполагая, что $t \in [t_0, t_0+T]$, из (8) – (9) получим

$$\begin{aligned} V(t,y(t)) &\le V(t_0,y^0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s,y(s))\,ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} W_k(y^k) \le \\ &\le V(t_0,y^0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s,z(s))\,ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} W_k(z^k) + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} |\Phi(s,y(s)) - \Phi(s,z(s))|\,ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} \left|W_k(y^k) - W_k(z^k)\right|. \qquad (13) \end{aligned}$$

В конце предыдущего раздела мы уже отмечали, что на конечном промежутке $J = [t_0, t_0+T]$ справедливы оценки

$$|y(t;t_0,y^0) - x(t;t_0,y^0)| \le \|y-x\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \to 0, \qquad (14)$$

$$|x(t;t_0,y^0)-z(t;t_0,y^0)| \le \|x-z\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \to 0, \tag{15}$$

$$|y(t;t_0,y^0)-z(t;t_0,y^0)| \le \|y-z\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \to 0. \tag{16}$$

При этом оценки равномерны относительно $t_0 \ge 0$ и y^0 из заданной окрестности нуля и зависят только от величины T. Используя условия теоремы, из этих оценок на основании неравенства (10), нетрудно вывести следующий результат: найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при условии $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ в момент $t_1 = t_0 + T$ будет выполнено неравенство

$$V(t_1, y(t_1)) \le V(t_0, y^0) - \delta |y^0|^d T < V(t_0, y^0). \tag{17}$$

Кроме того, благодаря (6) и (11) при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ траектория решения возмущенного уравнения будет оставаться в ε-окрестности начала при $t_0 \le t \le t_0 + T$.

Мы рассмотрели случай, когда $t_0 \in \mathscr{T}$. Если t_0 совпадает с моментом импульсного воздействия, т.е. $V(t_0, y(t_0)) \le a(\varepsilon/2)$, а $V(t_0{+}0, y(t_0{+}0)) > a(\varepsilon/2)$, то оценки (11)–(13) сохранятся, поскольку $|r_k(x)| = o(|x|)$ при $|x| \to 0$, и все выводы останутся в силе.

Обозначим $t_p = t_0 + pT$, $p = 1, 2, \ldots$. Благодаря равномерности всех полученных выше оценок относительно $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $y^0 \in B_{\varepsilon_0}$ для произвольного p имеет место неравенство

$$V(t_{p+1}, y(t_{p+1})) \le V(t_p, y(t_p)) - \delta |y(t_p)|^d T < V(t_p, y(t_p)).$$

Следовательно

$$0 < V(t_{p+1}, y(t_{p+1})) \le V(t_0, y(t_0)) - \delta T \sum_{l=0}^{p} |y(t_l)|^d < V(t_0, y(t_0)). \tag{18}$$

Поэтому $|y(t_l)| \to 0$ при $l \to \infty$. В силу равномерной устойчивости нулевого решения возмущенной системы это означает, что $y(t) \to 0$.

Подчеркнем, что из наших рассуждений следует, что η_0-окрестность, где $\eta_0 = b^{-1}(a(\varepsilon_0/2))$, находится в области притяжения нулевого решения, т.е.

$$y(t;t_0,y^0) \to 0 \ \text{ при } t \to \infty \text{ для любого } t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } y^0 \in B_{\eta_0}.$$

$\square$

Формулировку условий теоремы можно слегка упростить, если положить $d_1 = d_2 = d > 1$.

Как возмущения правой части R, так и возмущения скачков решения r_k существенно влияют на поведение решений системы (2). Если $d_1 < d_2$, то доминировать будет R, если $d_2 < d_1$, то доминировать будут r_k в сложном взаимодействии с h_k и решением линеаризации (3).

Функция Ляпунова, удовлетворяющая, например, теореме 18.1 об асимптотической устойчивости из [1, стр. 132], удовлетворяет и требованиям нашей теоремы (при выполнении неравенств (5)), т.к. монотонно убывает вдоль решений возмущенной системы (2). Поэтому доказанная теорема является обобщением ряда известных теорем об асимптотической устойчивости.

Заключение

В статье получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействиям в фиксированые моменты времени. Условия устойчивости формулируются в терминах свойств функции Ляпунова, которая допускает немонотонное изменение вдоль разрывного решения импульсной системы. Таким образом существено расширяется класс подходящих функций Ляпунова и облегчается построение таких функций для конкретных систем.

Список литературы

1. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев, Вища школа, 1987. – 288 с.
2. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations // World Scientific, Singapure – New Jersey – London, 1989.
3. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – N.-Y., Halsted Press, 1989.
4. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control // Princeton University Press, Princeton, 2006.
5. *Перестюк Н. А. Плотников В. И., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.*. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
6. *Борисенко С. Д, Косолапов В. И., Оболенский А. Ю.* Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях. – К.: Наук. думка, 1988. – 200 с.
7. *Мильман В. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. матем. журнал. – 1060. – Т.1, №2. – С. 233-237.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л.-М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
9. *Akhmetov M. U., Zafer A.* Stability of the zero solution of impulsive differential equations by the Lyapunov second method // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – Vol.248. – P. 69–82.
10. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем диффернциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. сборник. – 2003. – Т.194, №.10. – С. 117-132.
11. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т.55, №8. – С. 1035-1043.
12. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т.55, №8. – С. 1035-1043.
13. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* Об устойчивости периодических импульсных систем // Матем. заметки. – 2004. – Т.76, №1. – Р. 44-51.
14. *Gladilina R. I., Ignatyev A. O.* On Retention of Impulsive System Stability under Perturbations // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol.68, No.8. – P. 1364–1371.
15. *Мартынюк А. А., Слынко В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. – 2004. – Vol.40, No.2. – С. 134-144.
16. *Perestyuk M. O., Chernikova O. S.* Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations // Ukrainian Math. J. – 2008. – Vol.60, No.1. – P. 91-107.
17. *Ignatyev A. O.* On the stability of invariant sets of systems with impulse effect // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2008. – Vol.69, No.1. – P. 53-72.
18. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A., Soliman A. A.* On the asymptotic stability and instability of solutions of systems with impulse effect // Math. Notes. – 2006. – Vol.80, No.4. – P. 516–525.

19. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием // Сиб. матем. журнал. – 2008. – Т.49, No.1. – С. 125–133.
20. *Игнатьев А. О.* О существовании функции Ляпунова в виде квадратичной формы для линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. журнал. – 2010. – Vol.62, No.11. – С. 1451–1458.
21. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
22. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. – М.: Высшая школа, 1988. – 184 с.
23. *Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. «Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов». – К.: Об-во «Знание». – 1990. – С. 3-4.

Статья поступила в редакцию 01.12.2010