УДК 517.983

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОСОСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ КВАТЕРНИОННОМ БИМОДУЛЕ

© Карпенко И. И., Тышкевич Д. Л.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *dtyshk@inbox.ru, i_karpenko@inbox.ru*

Abstract. In the article the spectral decomposition of a skew–selfadjoint linear operator (including the unbounded case) acting on a quaternion Hilbert bimodule is obtained. Earlier the last results on this topic concerning *infinite dimensional* quaternion spaces had been obtained even in the beginning of 80's (see Viswanath K. *Normal operators on quaternionic Hilbert spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — v. 162. — p. 337–350). We essentially develop ideas and results presented in Viswanath's work and in our earlier works.

Введение

Анализ как ранних так и последних *публикаций* показывает, что имеется хоть и не тотальный, но достаточно устойчивый интерес к кватернионной тематике. Особенно это касается тех или иных сторон дифференциального исчисления и функционального анализа в гильбертовых модулях и бимодулях. Это, в первую очередь, связано с изучением квантовой механики и квантовой теории поля в кватернионной формулировке (см., например, [1] – [5] и ссылки на литературу в этих источниках).

Основной целью данной работы является построение спектрального представления произвольного (в том числе неограниченного) кососамосопряженного оператора, действующего в кватернионном гильбертовом бимодуле. В случае ограниченного нормального оператора спектральное представление было аннонсировано нами в докладе [6] и построено в работе [7]. Результаты нашей статьи [7] и данной работы существенно развивают результаты работы [8].

Цель, сформулированная выше, определяет следующую *постановку проблемы.* Построить такое спектральное представление (как ограниченного так и неограниченного) кососамосопряжённого оператора, которое наследовало бы основные черты соответствующего разложения (косо)самосопряжённого оператора в комплексном пространстве: наличие ортогональной (кватернионно линейной) спектральной меры, исчезающей вне спектра оператора, интегральное разложение по элементарным (косо)самосопряжённым операторам (скалярные операторы в комплексном случае). В такой постановке (включая сюда случай неограниченных операторов) данная проблема оставалась *нерешённой.*

Для удобства читателя, хорошо знакомого со спектральной теорией комплексно линейных операторов, но мало осведомленного по части кватернионов, мы приводим в сжатом виде всю информацию о кватернионах, необходимую для понимания представленных результатов.

О теле $\mathbb{H}$ и $\mathbb{R}$–содержащих 2–мерных подполях $\mathbb{H}$

Итак, главное кольцо, модули над которым изучаются в данной работе – тело кватернионов $\mathbb{H}$, т.е. вещественная алгебра размерности 4 с базисом $\{1, i, j, k\}$ и правилами умножения

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Для любого $q \in \mathbb{H}$ существуют такие (единственные) q_0, q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}$, что $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ (*вещественное представление* кватерниона q). Число q_0 называется *вещественной частью* кватерниона q, и по отношению к последнему обозначается через $\mathrm{Re}\, q$. Полезна также *векторная форма* записи кватерниона: $q = q_0 + \vec{q}$, где $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ – *векторная* или *мнимая часть* q (кватернион, совпадающий со своей векторной частью, называется *мнимым* или *векторным*). Так, например, векторная форма произведения кватернионов q и p есть не что иное как хорошо известная формула умножения $qp = q_0 p_0 - (\vec{q}, \vec{p}) + \big([\vec{q}, \vec{p}] + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p}\big)$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{H}$ относительно ортонормированной четвёрки $\{1, i, j, k\}$, а $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение в 3–мерном подпространстве векторных кватернионов $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$[1].

Сопряженный кватернион к q определяется как $\overline{q} := q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$, при этом отображение $q \to \overline{q}$ является инволюцией в $\mathbb{H}$, и $q\overline{q} = \overline{q}q = \sum_{t=0}^{3} q_t^2 \in \mathbb{R}$. *Модуль* $|q|$ кватерниона q определяется равенством $|q| = (q\overline{q})^{1/2}$, превращая таким образом $\mathbb{H}$ в нормированную алгебру[2]. Мнимый кватернион, по модулю равный 1 называют *мнимой единицей.*

В таком случае множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественную подалгебру в $\mathbb{H}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}\langle 1, i\rangle$. Вложение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ позволяет получить *комплексное* (или *симплектическое*) представление кватернионов. А именно, если $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, то $q = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i)j = z_1 + z_2 j$, где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

На самом деле $\mathbb{C}$ служит всего лишь частным примером поля в $\mathbb{H}$, являющегося расширением $\mathbb{R}$. Всюду в данной работе такие поля мы будем обозначать буквой $\mathbb{F}$. Поле $\mathbb{F}$ – коммутативная и ассоциативная $\mathbb{R}$–алгебра с делением и размерности, большей 1, поэтому из теоремы Фробениуса следует, что размерность $\mathbb{F}$ есть в точности 2, и $\mathbb{F}$ изоморфно $\mathbb{C}$.[3]

[1] Нам приятно напомнить, что современный векторный анализ исторически происходит из кватернионного, и классическое обозначение ортов 3–мерного пространства в физике происходит от обозначений для кватернионных единиц, введённых Гамильтоном.

[2] Инволюция $\mathbb{R}$–алгебры определяется как $\mathbb{R}$–линейное отображение $\mathscr{I}$, удовлетворяющее соотношениям $\mathscr{I}^2(a) = a$, $\mathscr{I}(ab) = \mathscr{I}(b)\mathscr{I}(a)$. Отметим, что в теле кватернионов существуют инволюции, для которых $q\mathscr{I}(q) \notin \mathbb{R}$ при любом невещественном q.

[3] Обратим здесь внимание читателя на следующий замечательный феномен, присущий телу кватернионов и касающийся соотношений между понятиями «равенство» и «изоморфизм». Хотя каждое такое поле $\mathbb{F}$ и изоморфно $\mathbb{C}$, и поэтому с точки зрения *алгебры* является «неинтересным», но

Поле $\mathbb{F}$ однозначно определяется принадлежностью к нему некоторого невещественного кватерниона. Действительно, пусть $q \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$. Запишем этот кватернион в векторной форме: $q = q_0 + \vec{q}$. Тогда $\vec{q} = q - q_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Положим $f := \dfrac{1}{|\vec{q}|}\,\vec{q}$. Система $\{1, f\}$ линейно независима, и, следовательно, образует базис 2–мерной $\mathbb{R}$–алгебры $\mathbb{F}$. Эти рассуждения показывают, что любые два невещественных элемента поля $\mathbb{F}$ имеют пропорциональные векторные части, что является необходимым и достаточным условием коммутирования кватернионов с соответствующими векторными частями. Поэтому всякое поле в $\mathbb{H}$, удовлетворяющее описанным выше условиям, можно охарактеризовать как максимальное коммутативное расширение некоторого множества попарно коммутирующих кватернионов из $\mathbb{H}$[4]. Кроме того, упомянутое необходимое и достаточное условие приводит к тому, что соответствующая мнимая единица f определяется полем $\mathbb{F}$ с точностью до знака. Далее мы будем предполагать что каждому полю $\mathbb{F}$ такой кватернион f сопоставлен *однозначно* (аксиома выбора здесь избегается, например, выбором ориентации ортов $1, i, j, k$ в $\mathbb{H}$).

Так как для кватерниона $q = a + bf \in \mathbb{F}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ в силу равенства $\overline{f} = -f$ имеем $\overline{q} = a - bf$, то, очевидно, отображение $\theta(a + bi) := q$ *осуществляет изометрический изоморфизм* полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}$. Отображение θ можно записать и в следующей, полезной для дальнейшего, форме. *Класс сопряжённости* кватерниона $q \in \mathbb{H}$ определяется как $K(q) := \{vq\overline{v} \mid v \in \mathbb{H}, |v| = 1\}$. Нетрудно заключить отсюда, что для мнимого кватерниона q его класс сопряжённости $K(q)$ представляет собой «мнимую сферу» $\{xi + yj + zk \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2\}$. Таким образом, для мнимой единицы f, порождающей поле $\mathbb{F}$ (в смысле, указанном выше), существует такой (единственный) кватернион $u \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$, что $f = ui\overline{u}$, поэтому отображение θ можно записать как

$$\theta(z) = uz\overline{u},\ z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Рассматриваемое на всём $\mathbb{H}$, отображение θ будет представлять собой внутренний автоморфизм $\mathbb{H}$. За этим автоморфизмом (однозначно) определяемом по i и f, мы и закрепим в дальнейшем обозначение θ.

Рассмотрим теперь $\mathbb{H}$ как вещественное евклидово пространство (см. выше с. 60). Выберем некоторый кватернион ϕ, ортогональный кватернионам $1, f$ и по модулю равный 1. Тогда $\phi^2 = (\phi, \phi) = -1$; кватернион $f\phi\,(= [f, \phi])$ ортогонален кватернионам $1, f, \phi$, при этом $f\phi = [f, \phi] = -[\phi, f] = -\phi f$, откуда $(f\phi)^2 = -1$. Таким образом, четвёрка $\{1, f, \phi, f\phi\}$ образует $\mathbb{R}$–базис в $\mathbb{H}$, состоящий из 1 и трёх мнимых единиц. Такой базис позволяет определить однозначное разложение $q = q_0 + \widetilde{q}_1 f + \widetilde{q}_2\phi + \widetilde{q}_3 f\phi$, которое (аналогично комплексному разложению) приводит к разложению относительно поля $\mathbb{F}$: $q = (q_0 + \widetilde{q}_1 f) + (\widetilde{q}_2 + \widetilde{q}_3 f)\phi = u_1 + u_2\phi$, где u_1, $u_2 \in \mathbb{F}$. Заметим, что

оно представляет собой *уникальную* «копию» $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$, что становится весьма существенным для *анализа*. В частности, наша теория дифференцируемости функций кватернионного переменного ([9]) основана именно на «игре» этими свойствами.

[4]Или же как совокупность всех кватернионов, коммутирующих с некоторым фиксированным невещественным кватернионом.

выбор соответствующего кватерниона ϕ для поля $\mathbb{F}$ далеко неоднозначен[5], однако в дальнейшем мы будем предполагать, что каждому полю $\mathbb{F}$ *однозначно* сопоставлен некоторый кватернион ϕ, удовлетворяющий описанным выше условиям[6]. В таком случае кватернион $u_1 = q_0 + \widetilde{q}_1 f$ по отношению к исходному кватерниону q будем обозначать $\mathbb{F}ld(q)$ ($\mathbb{F}$–*часть* q).[7]

Линейные операторы в гильбертовых кватернионных бимодулях

О кватернионных бимодулях и линейных операторах в них. Пусть H — кватернионный бимодуль[8]. Тогда H можно рассматривать как бимодуль и над полем $\mathbb{F}$ и над полем вещественных чисел, обозначая его в этих случаях $H^{\mathbb{F}}$ и $H^{\mathbb{R}}$ соответственно[9]. В $H^{\mathbb{R}}$ структуры левого и правого модуля совпадают; $H^{\mathbb{F}}$ мы рассматриваем как правый модуль, употребляя в этом случае для $H^{\mathbb{F}}$ и $H^{\mathbb{R}}$ естественную терминологию «линейное пространство».

Оператор A, действующий в кватернионном гильбертовом бимодуле H, называется *правосторонне линейным*, если $A(xq + yp) = (Ax)q + (Ay)p$ для любых $p, q \in \mathbb{H}$ и любых векторов $x, y \in H$. Соответствующим образом определяются *левосторонне линейные* операторы. В наших исследованиях кватернионных бимодулей мы склонны отдавать приоритет правому умножению на скаляр, поэтому в дальнейшем правосторонне линейные операторы будем называть просто *линейными*[10] или же *кватернионно линейными*, когда требуется подчеркнуть однородность оператора по $\mathbb{H}$ в отличие от возможной его однородности лишь по $\mathbb{F}$ или по $\mathbb{R}$. Таким образом, наряду с кватернионно линейными операторами в бимодуле H будем рассматривать $\mathbb{F}$–линейные и вещественно линейные операторы.

Если H — нормированный бимодуль (т.е. норма в H однородна по обоим умножениям), то обычным образом вводятся понятия ограниченного оператора и нормы оператора в H. Отметим, что с той же нормой $H^{\mathbb{F}}$ и $H^{\mathbb{R}}$ становятся нормированными

---

[5]Так, например, для $\mathbb{C}$ всевозможные кватернионы ϕ однозначно определяются выбором $\omega \in [0, 2\pi)$ в формуле $\phi = (\cos\omega)i + (\sin\omega)k$.

[6]Аксиомы выбора здесь можно избежать используя элементарные геометричекие соображения для конструктивного однозначного выбора ϕ по $\mathbb{F}$.

[7]Когда $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то согласно традиции $\mathbb{C}$–часть кватерниона q обозначается через $Com(q)$.

[8]Т.е. H есть одновременно левый и правый $\mathbb{H}$–модуль, причём левое и правое умножения в $\mathbb{H}$ связаны условием ассоциативности: $\forall\, h \in H \ \ \forall\, q, p \in \mathbb{H} \ \ (qh)p = q(hp)$. Это пока только определение $\mathbb{H}$–*бимодуля*. В *кватернионном бимодуле* должна дополнительно выполняться аксиома $\forall\, r \in \mathbb{R}\ \forall\, h \in H\ \ rh = hr$ (ср. [10, 12]). «Хитро» определяя (с одной из сторон) действие вещественного числа на вектор, можно строить примеры $\mathbb{H}$–бимодулей, которые не являются кватернионными бимодулями.

[9]Носитель остаётся прежним, обедняется инструментарий.

[10]Это предпочтение обусловлено не столь эстетическими сколь аналитическими соображениями. Дело в том, что при построении матричного исчисления для правосторонне линейных операторов в конечномерном кватернионном бимодуле соответствующая оператору A матрица $\mathbf{A}$ будет действовать на координатный вектор–столбец $\mathbf{x}$ *слева* – $\mathbf{Ax}$ – как и в классическом случае комплексно линейных операторов. Соответствующее матричное сопоставление для левосторонне линейных операторов выглядит менее прозрачно. Это связано, разумеется, с некоммутативностью «косого» поля (skew field) $\mathbb{H}$.

линейными пространствами, поэтому, в частности, запасы ограниченных операторов в H, $H^{\mathbb{F}}$ и $H^{\mathbb{R}}$ совпадают.

На кольце всех линейных ограниченных операторов в H введём структуру вещественной алгебры, определяя операцию умножения оператора A на вещественное число α естественным образом: $(\alpha A)x := (Ax)\alpha \big(= \alpha(Ax)\big)$. Полученную алгебру обозначим через $L[H]$.

В свою очередь, совокупности $\mathbb{F}$–линейных операторов в модуле $H^{\mathbb{F}}$ и вещественно линейных операторов в пространстве $H^{\mathbb{R}}$ также образуют алгебры над соответствующими числовыми полями. Обозначим эти алгебры через $L[H^{\mathbb{F}}]$ и $L[H^{\mathbb{R}}]$ соответственно. Очевидно, имеют место строгие теоретико–множественные включения $L[H] \subset L[H^{\mathbb{F}}] \subset L[H^{\mathbb{R}}]$.

Особо выделим необходимые в дальнейшем следующие элементарные алгебраические свойства *оператора правого умножения* $R_q x := xq$ $(x \in H)$, $q \in \mathbb{H}$:

1° $R_q \in L[H^{\mathbb{R}}]$ $(q \in \mathbb{H})$;
2° $R_p R_q = R_{qp}$ $(p, q \in \mathbb{H})$;
3° $R_q A = A R_q$ *для всех* $A \in L[H]$ $(q \in \mathbb{H})$;
4° R_1 – *тождественный оператор*;
5° $A \in L[H^{\mathbb{F}}] \Leftrightarrow R_q A = A R_q$ *для любого* $q \in \mathbb{F}$.

Пусть θ — рассмотренный выше изометрический изоморфизм (1) поля $\mathbb{F}$ и поля $\mathbb{C}$ с соответствующим связующим кватернионом u. Рассмотрим отображение

$$\Theta(A) := R_u A R_{\overline{u}}\,, \quad A \in L[H^{\mathbb{R}}]\,. \tag{2}$$

Предложение 1. Имеют место следующие факты.

$$\Theta \text{ – } \textit{(внутренний) автоморфизм алгебры } L[H^{\mathbb{R}}]. \tag{3}$$

$$\Theta(R_z) = R_{\theta(z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

$$\Theta\big(L[H^{\mathbb{C}}]\big) = L[H^{\mathbb{F}}]. \tag{5}$$

$$\Theta(A) = A, \quad A \in L[H]. \tag{6}$$

Доказательство. Линейность и однородность Θ элементарно следуют из 1°. Так как $|u| = 1$, то $\overline{u} = u^{-1}$, и из 2°, 4° следует равенство $R_{\overline{u}} = R_u^{-1}$; отсюда, в свою очередь, следует оставшаяся часть (3) – мультипликативность Θ. Равенство (4) элементарно следует из 2°. Далее, пусть $q \in \mathbb{F}$ – произвольный фиксированный элемент, $z = \theta^{-1}(q)$ и $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$. Тогда

$$R_q \Theta(A) \overset{2^\circ}{=} \Theta(R_z)\Theta(A) \overset{(3)}{=} \Theta(R_z A) \overset{3^\circ}{=} \Theta(A R_z) = \ldots = \Theta(A) R_q\,,$$

откуда из 5° заключаем, что $\Theta(A) \in L[H^{\mathbb{F}}]$. Включение в (5) слева направо доказано. Обратное включение доказывается подобными рассуждениями. И, наконец, если $A \in L[H]$, то согласно 3°

$$\Theta(A) = R_u A R_{\overline{u}} = A R_u R_{\overline{u}} = A R_u R_u^{-1} = A.$$

□

Замечание. Таким образом, отображение Θ представляет собой (внутренний) автоморфизм вещественной алгебры $L[H^{\mathbb{R}}]$, оставляющий на своих местах кватернионно линейные операторы и переводящий $\mathbb{C}$–линейные операторы в $\mathbb{F}$–линейные.

О гильбертовых кватернионных бимодулях и линейных операторах в них. В дальнейшем мы будем рассматривать *гильбертов кватернионный бимодуль* H со *скалярным произведением* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (т.е. полный относительно нормы, порождённой $\langle\cdot,\cdot\rangle$). В определении скалярного произведения, также как и в определении линейного оператора, мы предполагаем приоритет правого умножения на скаляр. Поэтому будем требовать выполнения аксиомы однородности относительно правого умножения на скаляр:

$$\langle xq, y\rangle = \langle x, y\rangle q,$$

в то время как для левого умножения должно выполняться правило переноса скаляра[11]:

$$\langle qx, y\rangle = \langle x, \overline{q}y\rangle \quad (x, y \in H,\ q \in \mathbb{H}).$$

Пространство $H^{\mathbb{F}}$ также будет гильбертовым относительно согласованного скалярного произведения $(x, y)_{\mathbb{F}} := \mathbb{F}ld(\langle x, y\rangle)$, а пространство $H^{\mathbb{R}}$ — относительно скалярного произведения $(x, y)_0 := \mathrm{Re}\langle x, y\rangle$. Скалярные произведения в H и $H^{\mathbb{F}}$ связаны формулой

$$\langle h, g\rangle = (h, g)_{\mathbb{F}} - (h\phi, g)_{\mathbb{F}}\,\phi\,. \tag{7}$$

Ясно, что нормы вектора в пространствах H, $H^{\mathbb{F}}$ и $H^{\mathbb{R}}$ совпадают (скалярный квадрат – вещественное число). Это, в свою очередь означает, что исходное скалярное произведение в H *порождает одинаковые топологии* в пространствах H, $H^{\mathbb{F}}$, $H^{\mathbb{R}}$.

Также стоит отметить, что полнота H, $H^{\mathbb{F}}$, $H^{\mathbb{R}}$ относительно норм, порождённых соответствующими скалярными произведениями, обеспечивает полноту соответствующих структур $L[H]$, $L[H^{\mathbb{F}}]$, $L[H^{\mathbb{R}}]$.

Так как в кватернионных гильбертовых модулях имеет место лемма Рисса для ограниченных линейных функционалов[12], то каждый ограниченный оператор $A \in L[H]$ имеет *сопряженный* к нему оператор $A^* \in L[H]$, также как и в комплексном случае определяемый равенством $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad (\forall\, x, y \in H)$. Аналогично вводится понятие сопряженного оператора в алгебрах $L[H^{\mathbb{F}}], L[H^{\mathbb{R}}]$. Определение сопряженного к неограниченному оператору также ничем принципиально не отличается от соответствующего определения в комплексных модулях. Понятным образом определяются *самосопряжённые* и *нормальные* операторы (ограниченные и неограниченные).

Замечание. Сопряженные операторы к оператору $A \in L[H]$ во всех модулях H, $H^{\mathbb{F}}$, $H^{\mathbb{R}}$ *совпадают.* Действительно, если оператор A^* является сопряженным к A в модуле H, то на основании определения скалярных произведений в пространствах $H^{\mathbb{F}}$, $H^{\mathbb{R}}$

[11] В работе [12] нами показано, что правило переноса скаляра в рамках остальных аксиом эквивалентно однородности нормы относительно левого умножения на скаляр.

[12] Математический фольклор (например, [1, 8]). Доказательство этого результата состоит в аккуратном переносе классических рассуждений.

оператор A^* будет сопряженным к A также в $H^{\mathbb{F}}$, $H^{\mathbb{R}}$. Единственность сопряженного оператора позволяет сделать необходимый вывод.

В случае гильбертовых кватернионных бимодулей наряду с классом самосопряженных операторов важную роль играют *кососамосопряжённые* операторы, удовлетворяющие равенству $A^* = -A$. *Важно отметить*, что если в комплексных гильбертовых пространствах от самосопряженного оператора к кососамосопряженному можно перейти домножением на мнимую единицу, то в кватернионных гильбертовых бимодулях *нельзя говорить о линейном однородном соответствии* между классами самосопряженных и кососамосопряженных операторов. Поэтому эти классы нормальных операторов *качественно различны*[13].

Наличие скалярного произведение в гильбертовом модуле H задаёт структуру R^*–алгебр[14] на $L[H]$ и $L[H^{\mathbb{R}}]$ и структуру C^*–алгебры[15] на $L[H^{\mathbb{F}}]$. В связи с этим для дальнейшего имеет большое значение приводимый ниже простой результат (предложение 2), для доказательства которого полезно рассмотреть дополнительные аналитические свойства оператора правого умножения:

6° $|R_q x\| = |q|\|x\|$ $\quad (q \in \mathbb{H},\ x \in H)$;

7° $R_q^* = R_{\overline{q}}$ $\quad (q \in \mathbb{H})$.

Свойство 6° есть ничто иное как переформулировка однородности нормы относительно правого умножения на кватернион, а 7° следует из цепочки

$$(R_q x, y)_0 = \mathrm{Re}\langle xq, y\rangle = \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle q) = \mathrm{Re}(q\langle x, y\rangle) = \mathrm{Re}(\langle x, y\overline{q}\rangle) = (x, R_{\overline{q}} y)_0\,.$$

Предложение 2. Справедливы следующие утверждения.

1. Θ – изометрический *–автоморфизм R^*– алгебры $L[H^{\mathbb{R}}]$.

2. Θ – изометрический *–изоморфизм C^*– алгебр $L[H^{\mathbb{C}}]$ и $L[H^{\mathbb{F}}]$.

Доказательство. Действительно ($|u| = 1$ и оператор правого умножения биективен),

$$\|\Theta(A)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|R_u A R_{\overline{u}}\, x\| \overset{6^\circ}{=} \sup_{\|R_{\overline{u}} x\|\leqslant 1} \|A R_{\overline{u}}\, x\| = \|A\|$$

т.е. Θ – изометрическое отображение; далее

$$\big(\Theta(A)\big)^* = R_{\overline{u}}^*\, A^* R_u^* \overset{7^\circ}{=} R_u A^* R_{\overline{u}} = \Theta(A^*)$$

т.е. Θ сохраняет операцию *. Таким образом, вместе с (3) предложения 1 это завершает доказательство. □

Замечание. Предложение 2 позволяет всякий результат, верный для операторов из $L[H^{\mathbb{C}}]$ (сформулированный на базе внутренней аксиоматики операторной банаховой алгебры), автоматически переносить на операторы из $L[H^{\mathbb{F}}]$.

---

[13]И это служит одним из оснований (по меньшей мере, математическим) для построения и изучения *кватернионных* вариантов квантовой механики и квантовой теории поля, где кососамосопряжённые операторы выступают в качестве наблюдаемых (см. [3]).

[14]Напомним, что R^*–алгебра – это вещественная банахова алгебра с инволюцией *, для которой $\|a^* a\| = \|a\|^2$ для любого элемента a алгебры (см., например, [10]).

[15]См. предыдущую сноску и сноску 3 на с. 60.

О спектре линейного оператора в кватернионном бимодуле. Группу обратимых операторов в алгебре $L[H^{\mathbb{R}}]$, обратный к которым лежит в $L[H^{\mathbb{R}}]$, обозначим через $GL[H^{\mathbb{R}}]$. Такие операторы можно назвать *непрерывно обратимыми.* Число $q \in \mathbb{H}$ назовем *резольвентной точкой* оператора A, действующего в бимодуле H (в общем случае $A \in L[H^{\mathbb{R}}]$), если $A - R_q \in GL[H^{\mathbb{R}}]$.

Множество регулярных точек составляет *резольвентное множество* $\rho(A)$ оператора A, а оператор $Res_A(q) = (A - R_q)^{-1}$, $q \in \rho(A)$, есть *резольвента* этого оператора[16] (в точке q).

Предложение 3. Пусть $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$ и θ, Θ – отображения (1), (2). Тогда для $z \in \rho(A)$

$$\Theta\big(Res_A(z)\big) = Res_A\big(\theta(z)\big).$$

Доказательство. Элементарно следует из (3) – (6) предложения 1. □

Множество $\sigma(A) = \mathbb{H} \setminus \rho(A)$ есть *спектр* оператора A.

Спектр кватернионно линейного оператора A *непуст* ([12, сл. 8]), и если $q \in \sigma(A)$, то $K(q) \subseteq \sigma(A)$ (аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для $\rho(A)$).

Замечание 1. Последнее означает, что кватернионы входят в спектр линейного оператора не «единично», а «целыми классами сопряжённости» — феномен, отсутствующий в каком–либо виде в комплексном линейном анализе, и на который было обращено внимание довольно давно (для собственных значений; см., например, [1, 8]). Здесь стоит ещё указать на следующие факты. Известно, что два кватерниона принадлежат одному классу сопряжённости тогда и только тогда, когда равны их вещественные части и совпадают модули векторных частей[17], в силу чего из приведенных выше рассуждений следует справедливость эквиваленции $q \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{q} \in \sigma(A)$. И последнее. Можно показать, что для любого $\mathbb{R}$–содержащего 2–мерного поля $\mathbb{F}$ в $\mathbb{H}$ и для любого $q \in \mathbb{H}$ класс сопряжённости $K(q)$ содержит ровно одну пару взаимно сопряжённых кватернионов из $\mathbb{F}$; поэтому для любого кватернионно линейного оператора A и любого такого поля $\mathbb{F}$ $\sigma(A) \cap \mathbb{F} \neq \varnothing$.

Можно рассмотреть ([12, § 4]) следующую классификацию спектра для линейных операторов, действующих в бимодуле H. Кватернион $q \in \sigma(A)$ принадлежит

1. *точечному спектру* оператора A, если $\ker(A - R_q) \neq \{0\}$;
2. *остаточному спектру* оператора A, если $\ker(A - R_q) = \{0\}$, $\overline{\Im(A - R_q)} \neq H^{\mathbb{R}}$;
3. *непрерывному спектру* оператора A, если $\ker(A - R_q) = \{0\}$, $\overline{\Im(A - R_q)} = H^{\mathbb{R}}$, но оператор $(A - R_q)^{-1}$ неограничен в $H^{\mathbb{R}}$

[16] Мы обозначаем резольвенту оператора A в точке q через $Res_A(q)$, надеясь, что у читателя не возникнет недоразумений по поводу такого обозначения в связи с его схожестью на обозначение вычета в теории аналитических функций. На наш взгляд, существует бóльшая опасность спутать обозначение для резольвенты $R(q)$ с оператором правого умножения на кватернион q, обозначение которого в виде R_q традиционно.

[17] Данный несложный результат представляется фольклорным, и мы затрудняемся привести ссылку на первоисточники.

(через $\Im(\mathscr{A})$ обозначен образ оператора $\mathscr{A}$). Точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора A обозначаются соответственно через $\sigma_p(A)$, $\sigma_r(A)$, $\sigma_c(A)$. Точечный спектр линейного оператора, в свою очередь, делится на следующие подмножества, называемые соответственно *устойчивым* и *неустойчивым* спектром:

$$\sigma_s(A) = \{q \in \sigma_p(A) \mid \overline{\Im(A - R_q)} \neq H^{\mathbb{R}}\}\,; \quad \sigma_u(A) = \{q \in \sigma_p(A) \mid \overline{\Im(A - R_q)} = H^{\mathbb{R}}\}\,.$$

Для каждого частного вида спектра оператора $A \in L[H]$ также имеет место утверждение о вхождении «классами сопряжённости» ([12, сл. 7]): если $q \in \sigma_k(A)$, то $K(q) \subseteq \sigma_k(A)$; кроме того, $\sigma_k(A)^* = \sigma_k(A)$ $(k \in \{s, u, r, c\})$ ([12, предл. 15]; см. также конец замечания 1; здесь для множества кватернионов $\mathscr{S}$ $\mathscr{S}^* = \{\overline{q} \mid q \in \mathscr{S}\}$).

Замечание 2. Отметим ещё один любопытный и важный спектральный феномен, присущий кватернионному случаю. Для любого $A \in L[H^{\mathbb{R}}]$ спектр оператора A и его сопряжённого A^* ***совпадают***! Более точно ([12, теор. 4]),

$$\sigma_s(A^*) = \sigma_s(A); \quad \sigma_u(A^*) = \sigma_r(A); \quad \sigma_c(A^*) = \sigma_c(A); \quad \sigma_r(A^*) = \sigma_u(A).$$

И напоследок отметим некоторые спектральные свойства нормальных операторов. Как и в комплексном случае, для нормального оператора N $\sigma_u(N) = \sigma_r(N) = \varnothing$ ([12, теор. 5]). Спектр самосопряжённого оператора состоит из вещественных чисел, а кососамосопряжённого – из мнимых кватернионов ([12, предл. 17]).

1. Спектральное разложение кососамосопряженного оператора в кватернионном гильбертовом бимодуле

Пусть A – (кватернионно линейный) кососамосопряженный и, вообще говоря, *неограниченный* оператор, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H, с плотной областью определения $\mathscr{D}(A)$.

Положим $\sigma_{\mathbb{F}}(A) := \sigma(A) \cap \mathbb{F}$ (срез спектра полем $\mathbb{F}$).

Предложение 4. $\theta\big(\sigma_{\mathbb{C}}(A)\big) = \sigma_{\mathbb{F}}(A)$.

Доказательство. Из упомянутого выше свойства $q \in \sigma(A) \Rightarrow K(q) \subseteq \sigma(A)$ имеем равенство $\theta\big(\sigma(A)\big) = \sigma(A)$, откуда

$$\theta\big(\sigma_{\mathbb{C}}(A)\big) = \theta\big(\sigma(A) \cap \mathbb{C}\big) = \theta\big(\sigma(A)\big) \cap \theta(\mathbb{C}) = \sigma(A) \cap \mathbb{F} = \sigma_{\mathbb{F}}(A).$$

□

Вспомогательные спектральные результаты для симплектического образа. На мнимой оси $\mathbf{f} := \{\alpha f \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ поля $\mathbb{F}$ естественным образом вводится мера Лебега μ: множество $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{f}$ считается измеримым тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}f \subseteq \mathbb{R}$ измеримо по классической лебеговой мере, и $\mu(\mathcal{A})$ есть по определению лебегова мера множества $\mathcal{A}f$. Аналогичным образом переносится с $\mathbb{R}$ на $\mathbf{f}$ (с сохранением всех свойств) и произвольная операторная мера. Этот процесс для дальнейшего мы вкратце назовём *переносом меры*.

Лемма 1. *Пусть A – кососамосопряженный оператор, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H. Тогда существует однозначно определённая регулярная счётно аддитивная самосопряжённая спектральная мера $E_{\mathbb{F}}\colon \mathfrak{B}(\mathbf{f}) \to L[H^{\mathbb{F}}]$, связанная с оператором A соотношениями:*

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha) = 0, \quad \alpha \cap \sigma_{\mathbb{F}}(A) = \varnothing \quad \bigl(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f})\bigr)\,; \tag{8}$$

$$\mathscr{D}(A) = \{h \in H \mid \int\limits_{\sigma_{\mathbb{F}}(A)} |q|^2 \langle E_{\mathbb{F}}(dq)h, h\rangle < \infty\}\,; \tag{9}$$

$$Ah = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-nf,nf]} R_q E_{\mathbb{F}}(dq)h\,, \quad h \in \mathscr{D}(A)\,. \tag{10}$$

Доказательство. Суть доказательства заключается в следующем: а) рассматривая A как действующий в $H^{\mathbb{C}}$ (т.е. симплектический образ A) классический результат для произвольного (в том числе и неограниченного) самосопряжённого оператора (см., например, [11, теор. XII.3]) элементарным образом переносим на кососамосопряжённые операторы (переносом спектральной меры), используя связь между этими классами операторов в комплексных пространствах через домножение на мнимую единицу; б) затем переносим этот результат из поля $\mathbb{C}$ на поле $\mathbb{F}$ при помощи отображений (1), (2). После шага а мы получим существование однозначно определённой соответствующей спектральной меры $E_{\mathbb{C}}$, заданной на борелевских подмножествах мнимой оси комплексной плоскости, которая связана с оператором A соотношениями (в нотации правого модуля):

$$(8')\ \ E_{\mathbb{C}}(\alpha) = 0,\ \ \alpha \cap \sigma_{\mathbb{C}}(A) = \varnothing\,; \qquad (9')\ \ \mathscr{D}(A) = \{h \in H \mid \int\limits_{\sigma_{\mathbb{C}}(A)} |z|^2 \langle E_{\mathbb{C}}(dz)h, h\rangle < \infty\}\,;$$

$$(10')\ \ Ah = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-ni,ni]} R_z E_{\mathbb{C}}(dz)h\,,\ \ h \in \mathscr{D}(A).$$

(Шаг б). Положим $E_{\mathbb{F}}(\alpha) := \Theta\bigl(E_{\mathbb{C}}\bigl(\theta^{-1}(\alpha)\bigr)\bigr)$, $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f})$. В силу предложения 2 отображение $E_{\mathbb{F}}\colon \mathfrak{B}(\mathbf{f}) \to L[H^{\mathbb{F}}]$ является регулярной счётно аддитивной самосопряжённой спектральной мерой. Свойство (8) элементарно следует из (8′), предложения 4 и определения $E_{\mathbb{F}}$. Далее,

$$\int\limits_{\sigma_{\mathbb{C}}(A)} |z|^2 \|E_{\mathbb{C}}(dz)h\|^2 \overset{6^\circ}{=} \int\limits_{\sigma_{\mathbb{C}}(A)} |\theta(z)|^2 \|\Theta\bigl(E_{\mathbb{C}}(dz)\bigr)R_u h\|^2 \overset{\text{предл. 4}}{=} \int\limits_{\sigma_{\mathbb{F}}(A)} |q|^2 \|E_{\mathbb{F}}(dq)R_u h\|^2,$$

откуда получаем

$$R_{\overline{u}}h \in \mathscr{D}(A) \Leftrightarrow \int\limits_{\sigma_{\mathbb{F}}(A)} |q|^2 \langle E_{\mathbb{F}}(dq)h, h\rangle < \infty.$$

Из последней эквиваленции следует (9), так как область определения кватернионно линейного оператора есть кватернионно линейное многообразие.

И, наконец, в силу непрерывности оператора правого умножения, для $x \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ получаем (10) в крайних членах цепочки

$$Ah \overset{3^\circ}{=} R_u A R_{\overline{u}} h \overset{(10')}{=} R_u \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-ni,ni]} R_z E_{\mathbb{C}}(dz) R_{\overline{u}}\, h \overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-ni,ni]} R_u R_z R_{\overline{u}} R_u E_{\mathbb{C}}(dz) R_{\overline{u}}\, h =$$

$$\overset{(1),(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-ni,ni]} R_{\theta(z)} \Theta\big(E_{\mathbb{C}}(dz)\big) h = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-nf,nf]} R_q E_{\mathbb{F}}(dq) h\,.$$

Единственность спектральной меры $E_{\mathbb{F}}$, удовлетворяющей соотношениям (8) – (10) следует из биективности Θ и единственности $E_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющей (8′) – (10′). $\square$

Как обычно, $E_{\mathbb{F}}$ будем называть ($\mathbb{F}$–линейным) *разложением единицы* (на $\mathbf{f}$) кососамосопряжённого оператора A.

Лемма 2. *Пусть $E_{\mathbb{F}}$ – разложение единицы оператора A из теоремы 1, и (af, bf) – открытый интервал оси* $\mathbf{f}$ *($a, b \in \mathbb{R},\ a < b$). Тогда имеет место сходимость*

$$E_{\mathbb{F}}\big((af, bf)\big) = \lim_{\delta\to+0} \lim_{\eta\to+0} -R_{2\pi}^{-1} \int\limits_{[(a+\delta)f,\,(b-\delta)f]} \big(Res_A(s+\eta) - Res_A(s-\eta)\big)\, \mu(ds). \qquad (11)$$

в сильной операторной топологии алгебры $L[H^{\mathbb{F}}]$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} := AR_i$. Тогда $\mathscr{A}$ – самосопряжённый оператор в $L[H^{\mathbb{C}}]$ с разложением единицы $E_{\mathbb{C}}$. В таком случае мы можем применить следующую известную формулу, выражающую спектральную меру открытого интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ через резольвенту оператора $\mathscr{A}$ (в нотации правого модуля):

$$E_{\mathbb{C}}\big((a, b)\big) = \lim_{\delta\to+0} \lim_{\eta\to+0} R_{2\pi i}^{-1} \int\limits_{[a+\delta,\, b-\delta]} \big(Res_{\mathscr{A}}(t-\eta i) - Res_{\mathscr{A}}(t+\eta i)\big)\, \mu(dt). \qquad (12)$$

(в смысле сильной сходимости операторов; ср. [11, теор. XII.10]).

Отсюда для *косо*самосопряжённого оператора A получим:[18]

$$E_{\mathbb{C}}\big((ai, bi)\big) = \lim_{\delta\to+0} \lim_{\eta\to+0} -R_{2\pi}^{-1} \int\limits_{[(a+\delta)i,\,(b-\delta)i]} \big(Res_A(s+\eta) - Res_A(s-\eta)\big)\, \mu(ds)$$

(здесь уже $E_{\mathbb{C}}$ и μ – перенесённые меры). Далее, применяя к последней формуле отображение Θ так же, как и при доказательстве теоремы 1 (с учётом предложения 3), получим формулу (11). $\square$

[18] Обычно справа в формуле типа (12) фигурирует *контурный* интеграл по отрезку $[a+\delta,\, b-\delta]$ как по (гладкой) кривой с началом в $a+\delta$ и концом $b-\delta$ (например, [11, теор. XII.10]), равный интегралу Лебега формулы (12) при интегрировании по $[a+\delta,\, b-\delta]$ как по (измеримому) множеству в случае самосопряжённого оператора. Однако при переходе к соответствующей формуле для кососамосопряжённого оператора необходимо помнить про первоначальный «контурный» смысл преобразуемого интеграла, чтобы правильно учесть знак.

Следствие 1. *Если $E_{\mathbb{F}}$ – разложение единицы для кососамосопряженного оператора A, то для любого множества $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f})$ выполняется равенство*

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha)R_{\phi} = R_{\phi}E_{\mathbb{F}}(-\alpha). \tag{13}$$

Доказательство. В силу соотношения

$$Res_A(q)R_{\phi} = R_{\phi}Res_A(\overline{q}) \ (q \in \mathbf{f})$$

(см. свойства 2°, 3° с. 63) имеем:

$$\big(Res_A(s+\eta) - Res_A(s-\eta)\big)R_{\phi} = R_{\phi}\big(Res_A(\overline{s+\eta}) - Res_A(\overline{s-\eta})\big) = \\ = R_{\phi}\big(Res_A(-s+\eta) - Res_A(-s-\eta)\big),$$

откуда (в силу непрерывности R_{ϕ}) для любых достаточно малых $\eta, \delta > 0$ следует равенство

$$\Big(\int\limits_{I_\delta}\big(Res_A(s+\eta) - Res_A(s-\eta)\big)\,\mu(ds)\Big)R_{\phi} = R_{\phi}\Big(\int\limits_{-I_\delta}\big(Res_A(s+\eta) - Res_A(s-\eta)\big)\,\mu(ds)\Big),$$

где $I_\delta := [(a+\delta)f,\,(b-\delta)f]$. Из последней формулы согласно (11) леммы 2 следует равенство

$$E_{\mathbb{F}}\big((af, bf)\big)R_{\phi} = R_{\phi}E_{\mathbb{F}}\big(-(af, bf)\big)$$

для любых вещественных a и b, $a < b$. Последнее в силу регулярности и счётной аддитивности $E_{\mathbb{F}}$, непрерывности R_{ϕ} влечёт (13) для любого *борелевского* подмножества α оси $\mathbf{f}$. □

Спектральная пара кососамосопряжённого оператора. Пусть $E_{\mathbb{F}}$ – $\mathbb{F}$–линейное разложение единицы из леммы 1, и $\mathbf{f}_+ = \{\tau f \mid \tau \geqslant 0\}$ – неотрицательная полуось поля $\mathbb{F}$. Рассмотрим операторнозначную функцию $E\colon \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+) \to L[H^{\mathbb{F}}]$

$$E(\alpha) := \begin{cases} E_{\mathbb{F}}(\alpha) + E_{\mathbb{F}}(-\alpha),\ 0 \notin \alpha, \\ E_{\mathbb{F}}(\alpha) + E_{\mathbb{F}}(-\alpha) - E_{\mathbb{F}}(\{0\}),\ 0 \in \alpha \end{cases} \quad \big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big). \tag{14}$$

Лемма 3. *Функция E обладает следующими свойствами:*

1. $E(\alpha) \in L[H]$ $\big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big)$*;*
2. $E(\alpha)$ *– ортопроектор в* H $\big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big)$*;*
3. $E(\mathbf{f}_+) = I_H$*;*
4. E *регулярна и счётно аддитивна (в сильной операторной топологии);*
5. E *обладает свойством ортогональности:*

$$E(\alpha)E(\beta) = E(\alpha \cap \beta) \ \big(\alpha, \beta \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big).$$

Доказательство.

Свойство 1. Непосредственно из следствия 1 получаем, что $E_{\mathbb{F}}(\{0\})$ является кватернионно линейным оператором, и, кроме того,

$$\big(E_{\mathbb{F}}(\alpha) + E_{\mathbb{F}}(-\alpha)\big)R_{\phi} = R_{\phi}\big(E_{\mathbb{F}}(-\alpha) + E_{\mathbb{F}}(\alpha)\big).$$

Отсюда следует, что отображение $E(\alpha)$ является однородным относительно любого кватерниона (см. свойства 1°, 3°, 5° на с. 63).

Свойство 2. Покажем, что $E(\alpha)$ является *самосопряженным* оператором в H. Действительно, оператор $E_{\mathbb{F}}(\{0\})$ является самосопряженным по условию (в $L[H^{\mathbb{F}}]$, следовательно, и в $L[H]$), а (см. (7))

$$\langle (E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))h, g\rangle = ((E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))h, g)_{\mathbb{F}} - (R_\phi(E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))h, g)_{\mathbb{F}}\,\phi =$$
$$= (h, (E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))g)_{\mathbb{F}} - ((E_{\mathbb{F}}(-\alpha)+E_{\mathbb{F}}(\alpha))(h\phi), g)_{\mathbb{F}}\,\phi =$$
$$= (h, (E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))g)_{\mathbb{F}} - (h\phi, (E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))g)_{\mathbb{F}}\,\phi = \langle h, (E_{\mathbb{F}}(\alpha)+E_{\mathbb{F}}(-\alpha))g\rangle$$

для любых векторов $g, h \in H$ и множеств $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)$. Равенство $E(\alpha)^2 = E(\alpha)$ тривиально следует из свойств операторов $E_{\mathbb{F}}(\pm\alpha)$ $\big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\setminus\{0\}\big)$.

Свойства 3, 4, 5 элементарно следуют из соответствующих свойств разложения единицы $E_{\mathbb{F}}$.

□

Операторнозначную функцию E, удовлетворяющую условиям 1 – 5 леммы 3, назовем (кватернионно линейным) *разложением единицы* на $\mathbf{f}_+$ (*кососамосопряженного оператора* A, если это касается последнего).

Рассмотрим оператор

$$J = R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-)\big), \tag{15}$$

где $\mathbf{f}_- = \{\tau f \mid \tau < 0\}$ – отрицательная полуось поля $\mathbb{F}$. Оператор J – F–линейный; кроме того, применяя следствие 1, получим:

$$JR_\phi = R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-)\big)R_\phi = R_fR_\phi\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+)\big) =$$
$$= -R_\phi R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+)\big) = R_\phi R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-)\big) = R_\phi J.$$

Следовательно, оператор J принадлежит алгебре $L[H]$ (см. 1°, 3°, 5° с. 63).

Далее, простая проверка показывает, что оператор J – *кососамосопряжённый*, удовлетворяет равенству $J^2 = -I$ и имеет «единственную» (см. замечание 1) «точку» спектра: $\sigma(J) = \sigma_p(J) = K(f)$. Такой оператор из $L[H]$ будем называть *операторной мнимой единицей*[19]. Операторная мнимая единица (15), как легко убедиться, обладает следующими свойствами:

$$JE(\{0\}) = E(\{0\})J = R_fE(\{0\})\,; \tag{16}$$

$$JE(\alpha) = E(\alpha)J = R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\alpha) - E_{\mathbb{F}}(-\alpha)\big)\ \big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+\setminus\{0\})\big)\,; \tag{17}$$

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha) = \begin{cases} P_-(J)E(\alpha), & \alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+\setminus\{0\}) \\ E(\{0\}), & \alpha = \{0\} \\ P_+(J)E(-\alpha), & \alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_-) \end{cases} \tag{18}$$

где

$$P_\pm(J) := \frac{1}{2}(I_H \pm R_fJ). \tag{19}$$

Пару $\langle E, J\rangle$ назовём *спектральной парой кососамосопряжённого оператора* A.

[19]В комплексном гильбертовом пространстве существуют лишь две операторные мнимые единицы – $\pm iI$.

Руководствуясь свойствами (16) – (17), рассмотрим определение, не зависящее от оператора A.

Определение 1. Пусть E – кватернионно линейное разложение единицы на $\mathbf{f}_+$; J – операторная мнимая единица в $L[H]$. Пару $\langle E, J\rangle$ назовём *спектральной парой*, если J коммутирует с E (т.е. $JE(\alpha) = E(\alpha)J,\ \alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)$).

Замечание 3. Если $\langle E, J\rangle$ – спектральная пара, то, очевидно, проекторы $P_\pm(J)$ коммутируют с E.

Предложение 5. Операторы $P_\pm(J)$ из (19), определённые по произвольной операторной мнимой единице J, являются взаимно дополнительными и взаимно ортогональными самосопряжёнными проекторами в $L[H]^{\mathbb{F}}$. При этом выполняется равенство

$$R_q P_-(J) + R_{-q} P_+(J) = R_{-qf} J \quad (q \in \mathbf{f}). \tag{20}$$

Доказательство. Состоит в непосредственных вычислениях. □

Предложение 6. Отображение $E_{\mathbb{F}} \overset{\mathfrak{f}}{\mapsto} \langle \overset{(14)}{E}, \overset{(15)}{J} \rangle$ является биекцией между множеством всех $\mathbb{F}$–линейных разложений единицы на $\mathbf{f}$ и множеством всех спектральных пар.

Доказательство. Тот факт, что область значений $\mathfrak{f}$ лежит во множестве всех спектральных пар, является содержанием леммы 3 и равенств (16) – (17). Сюръективность и инъективность $\mathfrak{f}$ заключены в формуле (18) (с учётом замечания 3), которая определяет $\mathfrak{f}^{-1}$ (заметим лишь, что после определения согласно (18) $E_{\mathbb{F}}$ однозначно доопределяется затем на оставшиеся α из $\mathfrak{B}(\mathbf{f})$ по аддитивности). □

Спектральная теорема для кососамосопряжённого оператора. Следствием осуществлённых выше построений является следующая теорема – *основной результат* данной работы.

Теорема 1. *Пусть A – кососамосопряжённый оператор, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H, $\mathbb{F}$ – произвольное $\mathbb{R}$–содержащее 2–мерное поле. Тогда существует такая однозначно определённая спектральная пара $\langle E, J\rangle$, связанная с оператором A соотношениями:*

$$E(\alpha) = 0, \quad \alpha \cap \sigma_{\mathbb{F}_+}(A) = \varnothing \quad \big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big)\,; \tag{21}$$

$$\mathscr{D}(A) = \{h \in H \mid \int\limits_{\sigma_{\mathbb{F}_+}(A)} |q|^2 \langle E(dq)h, h\rangle < \infty\}\,; \tag{22}$$

$$Ah = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,nf]} R_{-qf} J E(dq) h\,, \quad h \in \mathscr{D}(A)\,. \tag{23}$$

Доказательство. Меру E строим по мере $E_{\mathbb{F}}$ леммы 1 согласно (14); оператор J строим согласно (15). Как было показано выше, $\langle E, J\rangle$ будет спектральной парой оператора A.

Соотношение (21) непосредственно следует из (8) и определения меры E. Равенства (22), (23) вытекают соответственно из равенств (8), (10) леммы 1 применением формул (16) – (18), предложения 5 и свойств интеграла. Единственность спектральной пары обеспечивается предложением 6. □

Следствие 2. *Всякий кососамосопряжённый оператор, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H может быть представлен в виде $A = J\mathscr{A}$, где J – мнимая операторная единица, а $\mathscr{A}$ – неотрицательный самосопряжённый оператор, коммутирующий с J.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из теоремы 1, если в качестве $\mathscr{A}$ взять оператор

$$\mathscr{A}h = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,nf]} R_{-qf}E(dq)h\,, \quad h \in \mathscr{D}(A)\,.$$

□

Замечание 4. Если оператор A ограничен, то в формулировке спектральной теоремы 1 равенство (22) опускается, а формула (22) может быть заменена на формулу

$$A = \int\limits_{\mathbf{f}_+} R_{-qf}JE(dq)$$

(в смысле равномерной сходимости операторов). Это следует из того, что в лемме 1 равенство (9) может быть опущено, а предел (10) может быть заменён на соответствующий операторный интеграл по всей оси $\mathbf{f}$ (ср. [11, гл. X]).

Замечание 5. И напоследок обсудим вопрос о зависимости спектральной пары $\langle E, J\rangle$ от выбора поля $\mathbb{F}$.

Пусть $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ порождаются мнимыми единицами f_1 и f_2 соответственно. Будучи мнимыми единицами, кватернионы f_1, f_2 сопряжены в мультипликативной группе $\mathbb{H}^*$, т.е. существует такой нормированный кватернион u, что $f_1 = \overline{u}f_2u$ (см. с. 61).

Рассмотрим оператор $Res_A(s_1 + \eta)$, где $s = tf_1$, $t, \eta \in \mathbb{R}$. Так как

$$s_1 + \eta = tf_1 + \eta = \overline{u}(tf_2 + \eta)u = \overline{u}(s_2 + \eta)u,$$

где $s_2 = tf_2$, то $R_{s_1+\eta} = R_uR_{s_2+\eta}R_{\overline{u}}$. Тогда

$$Res_A(s_1 + \eta) = (A - R_{s_1+\eta})^{-1} = (A - R_uR_{s_2+\eta}R_{\overline{u}})^{-1} = R_uRes_A(s_2 + \eta)R_{\overline{u}}\,,$$

и, следовательно, на основании леммы 2

$$E_{\mathbb{F}_1}\big((af_1, bf_1)\big) = R_uE_{\mathbb{F}_2}\big((af_2, bf_2)\big)R_{\overline{u}}\,.$$

Таким образом, для любого $\alpha_1 \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_1)$

$$E_{\mathbb{F}_1}(\alpha_1) = R_uE_{\mathbb{F}_2}(\alpha_2)R_{\overline{u}}\,,$$

где $\alpha_2 = u\alpha_1\overline{u}$. Теперь, если мы обозначим через E_1, E_2 разложения единицы кососамосопряженного оператора A, порожденные спектральными мерами $E_{\mathbb{F}_1}$ и $E_{\mathbb{F}_2}$ соответственно, то для всякого $\alpha_1 \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_{1+})$

$$E_1(\alpha_1) = R_uE_2(\alpha_2)R_{\overline{u}}\,.$$

С учетом линейности оператора $E_2(\alpha_2)$ (см. лемму 3) имеем равенство

$$E_1(\alpha_1) = E_2(\alpha_2).$$

Что касается операторных мнимых единиц J_1, J_2, то, как показывают простые вычисления, они *совпадают*:

$$\begin{aligned} J_1 &= R_{f_1}\big(E_{\mathbb{F}_1}(\mathbf{f}_{1+}) - E_{\mathbb{F}_1}(\mathbf{f}_{1-})\big) = \\ &= R_u R_{f_2} R_{\overline{u}} R_u \big(E_{\mathbb{F}_2}(\mathbf{f}_{1+}) - E_{\mathbb{F}_2}(\mathbf{f}_{1-})\big) R_{\overline{u}} = R_u J_2 R_{\overline{u}} = J_2\,. \end{aligned}$$

Следовательно, с точностью до изометрии между мнимыми осями полей можно утверждать, что спектральная пара кососамосопряженного оператора определяются в целом *однозначно*.

Заключение

Таким образом, построено спектральное представление произвольного кососамосопряжённого оператора. *Основным результатом* статьи является *теорема 1* о существовании и единственности спектральной пары кососамосопряжённого оператора. Исследована зависимость спектральной пары от выбора 2–мерного $\mathbb{R}$–содержащего поля, на неотрицательной оси которого определено разложение единицы кососамосопряжённого оператора. *Перспективы дальнейших исследований* в этом направлении мы связываем с построением функциональной модели для произвольного (в том числе неограниченного) нормального оператора а также с приложениями спектральной теории для исследования конкретных операторов квантовой механики и квантовой теории поля в кватернионной формулировке.

Список литературы

1. *Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D.* Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. — 1962. — v. 3. – P. 207–220
2. *De Leo S., Rotelly P.* Translation between quaternion and complex quantum mechanics // arXiv:hep-th/9401009 v1. – 1994. – P. 1–15.
3. *Adler S. L.* Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. – Oxford University Press. – 1995. – 586 p.
4. *De Leo S., Ducati G.* Quaternionic differential operators // arXiv:math-ph/0005023v3. – 2002. – P. 1–25.
5. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. – М.: Едиториал УРСС. – 2003. – 200 с.
6. *Karpenko I. I., Tyshkevich D. L.* Spectral decomposition of a normal operator in a quatenionic Hilbert bimodule // Book of abstracts, The Banach Center Conference Analysis and Partial Differential Equations (In honor of Professor Bogdan Bojarski), June 18–24, 2006, Mathematical Research and Conference Center, Poland, Będlewo. – 2006. – P. 21–22
7. *Карпенко И. И., Сухтаев А. И., Тышкевич Д. Л.* Спектральное представление нормальных операторов в кватернионных гильбертовых бимодулях // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика.» — 2006. – Т.19(58), № 1. – С. 3–20

8. *Viswanath K.* Normal operators on quaternionic Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – v. 162. – p. 337–350
9. *Карпенко И. И., Сухтаев А. И., Тышкевич Д. Л.* Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика.» — 2004. – Т.17(56), № 1. – С. 30–37
10. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. – М. : Мир. – 1986. – 543 с.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория // М.: Мир. – 1966. – 1064 с.
12. *Карпенко И. И., Тышкевич Д. Л.* Спектральные свойства линейных операторов над гильбертовыми кватернионными бимодулями // Математичні Студії. – 2008. – Т. 30, №1. – С. 67–82

Статья поступила в редакцию 11.05.2010