

**МЕТОД ГЛОБАЛЬНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ОПЕРАТОРА КРАВЧИКА**

**Анотація.** Запропоновано метод глобальної мінімізації двічі неперервно-диференційовних функцій від декількох змінних на заданому інтервалі. Метод ґрунтується на розв'язанні системи нелінійних рівнянь, утвореної частковими похідними цільової функції, за допомогою оператора Кравчика. Застосування методу продемонстровано на чисельних прикладах.

**Ключові слова:** глобальна мінімізація, оператор Кравчика, пошук коренів, гессіан.

**ВСТУП**

Розглянемо задачу глобальної мінімізації функції декількох змінних

$$\min f(x_1, \dots, x_n), \\ a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$$

та припустимо, що  $f(x_1, \dots, x_n) \in C^{(2)}(D)$  (позначення  $C^{(l)}(D)$  використовується для простору  $l$  разів неперервно-диференційовних функцій на інтервалі  $D = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ ).

Найбільш широко використовувані на практиці методи мінімізації функцій ґрунтуються на класичному методі Ньютоні. Так, наприклад, велику популярність здобули квазіньютонівські методи, оскільки вони не потребують обчислення других похідних [1]. Проте ці методи не можуть гарантувати знаходження глобального мінімуму. Іншою категорією є так звані методи прямого пошуку (direct search), такі як метод Нелдера–Міда [2], які використовують виключно значення цільової функції. Також відомі методи стохастичної мінімізації, до яких належать методи імітації відпалу (simulated annealing), генетичні алгоритми, метод Монте-Карло та ін. [3].

Значним поштовхом до розв'язання задач глобальної мінімізації став розвиток програмних і апаратних засобів обчислювальної техніки у 60-х роках минулого століття. Тоді з'явилися алгоритми та програмні пакети, здатні працювати з істотними нелінійностями та відносно великою кількістю змінних. З-поміж основних сучасних підходів слід відзначити методи, що ґрунтуються на інтервальній арифметиці, яка вперше була впроваджена в сучасному вигляді в роботі Мура в 1962 р. [4]. Проте, як зазначено в роботі [5], безпосереднє застосування методів інтервальної арифметики не призводить гарантовано до бажаних результатів і потребує ретельного аналізу можливості її використання для розв'язання тієї чи іншої задачі.

Важливим кроком у розвитку методів мінімізації функцій, що ґрунтуються на інтервальній арифметиці, стало впровадження оператора Кравчика [6]. У роботі [7] показано, що застосування оператора Кравчика дає змогу виявити наявність коренів системи рівнянь на більш широкому інтервалі порівняно з теоремою Канторовича. Крім того, оператор Кравчика має більшу обчислювальну зручність, оскільки не потребує обчислення таких параметрів, як константа Ліпшиця для матриці Якобі.

Зазначимо, що методи мінімізації функцій тісно пов'язані з методами знаходження коренів систем нелінійних рівнянь. Дані задачі не є повністю еквіва-

лентними, проте концептуальні підходи до їхнього розв'язання є схожими і розроблення методів для одного класу дає змогу знайти відповідне рішення для іншого. У цій статті наведено метод глобальної мінімізації, що ґрунтується на розв'язанні системи нелінійних рівнянь, утвореної частковими похідними цільової функції:

$$\begin{cases} \partial f / \partial x_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \partial f / \partial x_2(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ \partial f / \partial x_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

на інтервалі  $D = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ .

Запропонований метод паралельно здійснює пошук локальних мінімумів та відкидання областей, які не можуть містити глобальний мінімум. Для пошуку локальних мінімумів використано оператор Кравчика [6], ефективність застосування якого для розв'язання систем нелінійних рівнянь було продемонстровано, зокрема, у роботах [7, 8, 9]. У статті наведено результативний алгоритм пошуку точок глобального мінімуму. Практичне застосування методу продемонстровано на декількох прикладах.

#### ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Згідно з [3] будемо називати вектор  $\hat{x}$  локальним мінімумом, якщо  $f(\hat{x}) \leq f(x)$  для усіх  $x$  з деякого околу вектора  $\hat{x}$  та глобальним мінімумом, якщо  $f(\hat{x}) \leq f(x)$  для усіх  $x \in D$ . Локальний мінімум є внутрішнім, якщо він не належить границі інтервалу  $D$ .

Як відомо, внутрішні локальні мінімуми є розв'язками системи (1), що мають позитивно визначений гессіан

$$F'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Згідно з критерієм Сільвестра головні мінори  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  матриці (2) мають бути невід'ємними.

Далі наведемо твердження щодо поведінки функції  $f$  та її похідних на  $n$ -вимірному інтервалі  $D_0 = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]$ ,  $D_0 \subset D$ , з центром  $x^{(0)} = [0.5(c_1 + d_1), 0.5(c_2 + d_2), \dots, 0.5(c_n + d_n)]$ .

Подальші твердження засновані на властивостях оператора Кравчика [6], який для інтервалу  $D_0$  визначається як

$$K(D_0) = x^{(0)} - CF(x^{(0)}) + (I - CF(x^{(0)}, D_0))(D_0 - x^{(0)}),$$

де  $F(x)$  — вектор-функція лівої частини системи (1),  $F(x^{(0)}, D_0)$  — інтервальний приріст (slope) [7] функції  $F$  на  $n$ -вимірному інтервалі  $D_0$  відносно точки  $x^{(0)}$ . Інтервальний приріст визначається у такий спосіб. Спочатку визначимо функцію приросту  $F(x^{(0)}, x)$  як

$$F(x) - F(x^{(0)}) = F(x^{(0)}, x) (x - x^{(0)}).$$

Тоді  $F(x^{(0)}, D_0)$  є інтервальним розширенням [7, 8] функції  $F(x^{(0)}, x)$  на інтервалі  $D_0$ . Це означає, що кожний елемент матриці  $F(x^{(0)}, D_0)$  являє со-

бою одновимірний інтервал, що містить діапазон значень відповідного елемента матриці  $F(x^{(0)}, x)$ . У тому разі, якщо інтервальний приріст важко обчислити, його можна замінити інтервальним розширенням для матриці Гессе (2). Матрицю  $C$  зазвичай обирають у вигляді  $C = [F'(x^{(0)})]^{-1}$ .

**Теорема 1** [6]. Нехай для інтервалу  $D_0$  виконується умова

$$K(D_0) \subset D_0. \quad (3)$$

Тоді система (2) має на інтервалі  $D_0$  єдиний розв'язок.

**Зауваження 1.** Для того, щоб єдиний розв'язок був точкою локального мінімуму необхідно, щоб головні мінори  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  матриці  $F''$  були невід'ємними на інтервалі  $D_0$ . Ця перевірка для інтервалу  $D_0$  може бути виконана за правилами інтервальної арифметики.

Попередні твердження стосувалися, по суті, пошуку коренів системи (1). Проте алгоритм пошуку глобального мінімуму можна значно прискорити за рахунок відкидання інтервалів, що не можуть містити точки глобального мінімуму.

**Теорема 2** [6]. Нехай для інтервалу  $D_0$  виконується умова

$$K(D_0) \cap D_0 = \emptyset, \quad (4)$$

тоді система (1) не має коренів на інтервалі  $D_0$ , і як наслідок, інтервал  $D_0$  не може містити внутрішніх локальних екстремумів.

**Зауваження 2.** Докладні приклади обчислення оператора Кравчика можна знайти в роботах [8, 9].

Наступні твердження ґрунтуються на розкладі функції  $f$  у ряд Тейлора та витікають з лемми 1, наведеної в [10]. Припустимо, що для точок інтервалу  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  виконуються такі обмеження:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq M_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| \leq M_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

**Теорема 3.** Нехай  $f(x_1, \dots, x_n) \in C^{(1)}(D_0)$  та виконуються обмеження (5). Тоді значення функції  $f$  на інтервалі  $D_0$  лежать у таких межах:

$$f(x^{(0)}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (d_i - c_i) \leq f(x) \leq f(x^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (d_i - c_i). \quad (7)$$

Ця теорема дає змогу оцінити верхню та нижню границі функції  $f$  на інтервалі  $D_0$ .

**Теорема 4.** Нехай  $f(x_1, \dots, x_n) \in C^{(2)}(D_0)$  та виконуються обмеження (6). Тоді  $\forall x \in D_0$  та будь-якого  $1 \leq i \leq n$  виконуються обмеження

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_{ki} (d_i - c_i) \leq \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leq \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_{ki} (d_i - c_i).$$

Крім того, якщо існує номер  $i$  такий, що

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right| > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_{ki} (d_i - c_i), \quad (8)$$

то похідна  $\partial f / \partial x_i$  не обнуляється на інтервалі  $D_0$  і, як наслідок, функція  $f$  не може містити на  $D_0$  точку внутрішнього локального мінімуму.

## АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Як відомо, глобальний мінімум функції досягається на границі області його пошуку або у точках локального мінімуму всередині області пошуку мінімуму. Тому структура запропонованого методу складається з двох частин: а) пошук глобальних мінімумів на границі інтервалу  $D$ ; б) пошук глобальних мінімумів всередині інтервалу  $D$ . Перша частина зводиться до розв'язання задачі мінімізації меншої розмірності, отже може бути розв'язана рекурсивним шляхом (в одновимірному випадку це означає порівняння значень функції у граничних точках інтервалу). Як результат першої частини отримуємо точку глобального мінімуму функції  $f$  на границі інтервалу  $D$ , а також відповідне мінімальне значення  $f_{\min}$  (яке буде використовуватись як початкове наближення для другої частини пошуку мінімуму).

Далі розглянемо структуру алгоритму глобальної мінімізації функції  $f$  на інтервалі  $D$ .

**Призначення алгоритму:** знаходження глобального мінімуму (або мінімумів) функції  $f$  на інтервалі  $D = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ .

**Вхідні дані:** формули для обчислення функції  $f$ , її часткових похідних  $\partial f / \partial x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , та інтервального розширення матриці Гессе (2); константи в обмеженнях (5), (6);  $\varepsilon$  — мінімально допустимий розмір аналізованого інтервалу (параметр  $\varepsilon$  дає змогу уникнути розбіжностей алгоритму (безкінечної рекурсії) у випадку похибок заокруглення).

**Вихідні дані:**  $f_{\min}$  — оцінка мінімального значення функції  $f$  на інтервалі  $D$  і  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , — відповідні точки глобального мінімуму; множина підінтервалів  $R$  з розміром (діагоналлю), меншим за  $\varepsilon$  (для яких ситуація є невизначеною).

**Алгоритм:** алгоритм мінімізації складається з наведених нижче кроків, які виконуються для поточного інтервалу  $D_0$ . На початку алгоритму здійснюється ініціалізація  $D_0 = D$ .

1. Якщо розмір інтервалу  $D_0$  не перевищує  $\varepsilon$ ,  $D_0$  додається до множини невизначених інтервалів  $R$ .

2. Оцінюється діапазон значень  $[M_{\min}, M_{\max}]$  функції  $f$  на інтервалі  $D_0$  за допомогою нерівностей (7). Якщо  $M_{\max} < f_{\min}$ , тоді виконується присвоєння  $f_{\min} := M_{\max}$ . Якщо  $M_{\min} > f_{\min}$ , то інтервал  $D_0$  вилучається з розгляду. Якщо жодна з цих двох умов не виконується, переходимо до наступного кроку.

3. Виконується перевірка умов (8) для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Якщо хоча б одна з часткових похідних не обнуляється, інтервал  $D_0$  вилучається з розгляду. В інших випадках переходимо до наступного кроку.

4. Виконується перевірка умови (3). Якщо умову виконано, то приймається рішення про наявність розв'язку системи (1) на інтервалі  $D_0$ . Значення глобального мінімуму уточнюється за допомогою методу Ньютона або ітеративного використання оператора Кравчика. Якщо обчислена точка є дійсно точкою локального мінімуму та відповідне мінімальне значення  $M_{\min}$  є меншим за  $f_{\min}$ , тоді виконується присвоєння  $f_{\min} := M_{\min}$  та інтервал  $D_0$  вилучається з розгляду. В іншому випадку переходимо до наступного кроку.

5. Виконується перевірка умови (4). Якщо умову виконано, то інтервал  $D_0$  вилучається з розгляду. В іншому випадку переходимо до наступного кроку.

6. Якщо жодна із зазначених умов не виконується, інтервал  $D_0$  розділяється на рівні частини, для кожної з яких виконуються кроки 1–5.

Зауважимо, що для прискорення роботи алгоритму доцільним є використання власних обмежень (5), (6) для кожного інтервалу  $D_0$ . Крім того, перевірки, що

містяться в теоремах 3, 4, можуть бути покращені за рахунок використання похідних вищих порядків.

**Зауваження 3.** У багатьох часткових випадках робота алгоритму може бути значно прискорена. Наприклад, якщо функція  $f(x_1, \dots, x_n)$  є симетричною відносно змінних  $(x_1, \dots, x_n)$ , то інтервали  $D_0$ , що заздалегідь не можуть містити точок з рівними координатами, можна одразу відкинути. Те саме стосується випадку, коли із змісту задачі випливає, що координати  $(x_1, \dots, x_n)$  мають бути монотонними.

**Зауваження 4.** Зазвичай методи branch-and-bound, подібним до яких є запропонований метод, мають експоненційну складність, що призводить до значного зростання обчислювальних затрат при збільшенні  $n$ . Такий ефект відомий як «прокляття розмірності» (curse of dimensionality). Зазначимо, однак, що для деяких класів задач цей ефект може бути нівельований завдяки грамотному обчисленню діапазонів зміни (інтервальних розширень) цільової функції та її похідних (приклад такого різкого зниження обчислювальних затрат для високих значень  $n$  наведено, наприклад, у роботі [8]). До того ж ефективність застосування запропонованого методу значною мірою залежить від способу розбиття поточного інтервалу. У зв'язку з цим одним із напрямків подальшого вдосконалення методу є застосування методів векторного квантування [11] для адаптивного розбиття інтервалу.

#### ПРИКЛАДИ

**Приклад 1.** Розглянемо глобальну мінімізацію функції [12]

$$f(x) = a \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 + b \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 0.25)^2 \quad (9)$$

на інтервалі  $[-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$  для значень параметрів  $a = 0.01$ ;  $b = 1$ .

Наприклад, для  $n = 3$  застосування алгоритму [8] для локалізації всіх нулів системи (1) дає три значення стаціонарних точок:  $x^{(1)} = (-0.275, -0.275, -0.275)$ ,  $x^{(2)} = (-0.021, -0.021, -0.021)$ ,  $x^{(3)} = (0.296, 0.296, 0.296)$ . Загальна кількість розбиттів початкового інтервалу становить 1904. Безпосередня перевірка гессіанів показує, що точка  $x^{(3)}$  є локальним мінімумом,  $x^{(2)}$  — локальним максимумом, а  $x^{(1)}$  — простою стаціонарною точкою. Проте, якщо застосувати алгоритм, описаний у цій статті, то точку глобального мінімуму  $x^{(3)}$  можна знайти за 1758 розбиттів. Відповідне мінімальне значення функції (11) становить 61.12. Графік проекції рекурсивного розбиття на площину  $(x_1, x_2)$ , виконаний цим алгоритмом, наведено на рис. 1. Точки  $x^{(1)}$  та  $x^{(3)}$  позначено на графіку. Інтервал, що містить точку  $x^{(2)}$ , відкинуто впродовж роботи алгоритму.

Якщо застосувати в алгоритмі відкидання інтервалів, що не можуть містити мінімуми з однаковими координатами, то кількість розбиттів скорочується до 166, тобто більш ніж у десять разів. Відповідний графік рекурсивного розбиття (проекція на площину  $(x_1, x_2)$ ), виконаний цим алгоритмом, наведено на рис. 2.

Кількість розбиттів  $N_{\text{div}}$  для значень розмірностей  $n = 3, 5, 7, 9, 11$  становить відповідно  $N_{\text{div}} = 166, 778, 3468, 13028, 55910$ .

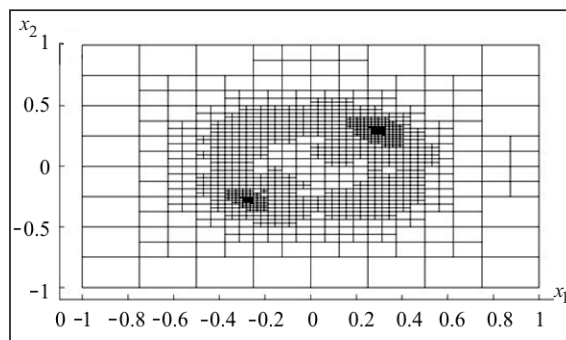


Рис. 1. Приклад застосування розробленого методу до мінімізації функції (9)

**Приклад 2.** Розглянемо задачу оцінювання параметрів імпульсної характеристики каналу зв'язку за наявними зашумленими спостереженнями. Модель дискретного спостережуваного сигналу  $z(n)$  має вигляд

$$z(n) = g \sum_{k=0}^p h_k s(n-k) + v(n), \quad (10)$$

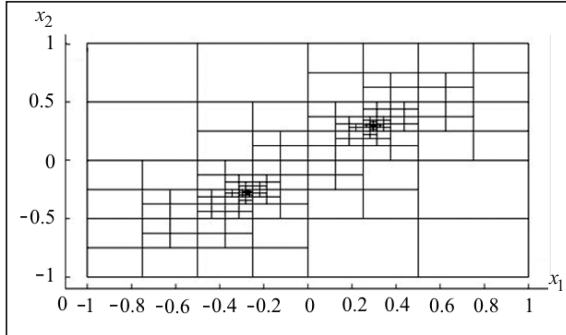


Рис. 2. Приклад застосування розробленого методу до мінімізації функції (9) з урахуванням рівності координат точки мінімуму

на показати, що максимізація функції правдоподібності сигналу (10) зводиться до мінімізації функції

$$f(x_1, \dots, x_{p+1}) = \sum_{j=1}^L (-\log Q_j(x_1, \dots, x_{p+1}) + Z_j Q_j(x_1, \dots, x_{p+1})), \quad (11)$$

де  $Q_j(x_1, \dots, x_{p+1}) = F_j(x_1, \dots, x_p) / [P_v F_j(x_1, \dots, x_p) + x_{p+1}]$ ;  $x_{p+1} = g^2 / 2^{p-1}$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in$  впорядкованим вектором лінійних спектральних пар (LSP) [13] та

$$F_j(x_1, \dots, x_{p+1}) = (1 - c_j) \left( \prod_{k=1,3,\dots,p-1} (c_j - x_k) \right)^2 + (1 + c_j) \left( \prod_{k=2,4,\dots,p} (c_j - x_k) \right)^2,$$

де константи  $c_j = \cos(2\pi j / L)$ .

Тепер розглянемо мінімізацію функції (11) з такими значеннями параметрів:

$$h_1 = -0.9; h_2 = 0.7; g = 0.7; P_v = 0.0001. \quad (12)$$

Із фізичної природи задачі, що розглядається, відомо, що зміст мають лише такі розв'язки, для яких

$$-1 < x_1 \leq x_2 < 1. \quad (13)$$

З урахуванням цього обмеження застосування алгоритму [8] для локалізації всіх нулів системи (1) на інтервалі  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0; 2]$  дає два значення:  $x^{(1)} = (0.298, 0.633, 0.988)$ ,  $x^{(2)} = (0.482, 0.482, 1.647)$ , причому обидві знайдені точки є значеннями локальних мінімумів. Загальна кількість розбиттів початкового інтервалу становить 32237.

Проте, якщо застосувати алгоритм, запропонований у цій статті, то точку глобального мінімуму  $x^{(1)}$  можна знайти за 19336 розбиттів (тобто на 40 % менше). Перерахування знайденої точки мінімуму у значення параметрів  $(h_1, h_2, g)$  дає такі значення:

$$\hat{h}_1 = -0.931; \hat{h}_2 = 0.664; \hat{g} = 0.706,$$

які є близькими до значень (12).

Відповідний графік рекурсивного розбиття (проекція на площину  $(x_1, x_2)$ ), виконаний запропонованим алгоритмом, наведено на рис. 3.

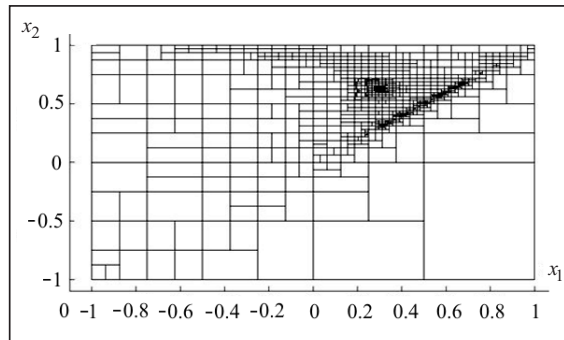


Рис. 3. Приклад застосування розробленого методу до мінімізації функції (11)

Зазначимо, що застосування до цього прикладу відомого методу Нелдера–Міда [2] виявило значну залежність від вибору початкового наближення для ітераційного пошуку точки глобального мінімуму. Так, більше ніж у 50% випадків цей

метод призводив до збіжності до точки  $(0.9535, 0.4482, 0.4405)$ , що не є точкою глобального мінімуму, а також не задовольняє умовам фізичного змісту (13). Застосування широко використовуваного пакету оптимізаційного пакету KNITRO [14] для глобальної мінімізації функції (11) також продемонструвало залежність від якості початкового наближення.

### ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано метод глобальної мінімізації двічі неперервно-диференційовної функції  $f(x_1, \dots, x_n)$  на інтервалі  $D = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ . Метод ґрунтується на розв'язанні за допомогою оператора Кравчика системи нелінійних рівнянь, утвореної частковими похідними цільової функції з паралельним відкиданням областей, що заздалегідь не можуть містити точку мінімуму. Наведено чисельний алгоритм, що реалізує запропонований метод. Практичне застосування методу продемонстровано на прикладах, зокрема для задачі оцінювання характеристики каналу зв'язку.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. Москва: Мир, 1988. 440 с.
2. Lewis R.M., Torczon V., Trosset M.V. Direct search methods: then and now. *J. Comp. Appl. Math.* 2000. Vol. 124, N 1, 2. P. 191–207.
3. Neumaier A. Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta Numerica.* 2004. Vol. 13. P. 271–369.
4. Moore R.E. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing. Ph.D. Thesis. Stanford University, 1962.
5. Kearfott R.B. Empirical evaluation of innovations in interval branch and bound algorithms for nonlinear algebraic systems. *SIAM J. Sci. Comput.* 1997. Vol. 18, N 2. P. 574–594.
6. Moore R.E. A test for existence of solutions to nonlinear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. Vol. 14, N 4. P. 611–615.
7. Neumaier A., Zuhe S. The Krawczyk operator and Kantorovich theorem. *J. Math. Anal. Applications.* 1990. Vol. 149, N2. P. 437–443.
8. Семенов В.Ю. Метод нахождения всех корней системы нелинейных алгебраических уравнений, основанный на операторе Кравчика. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 5. С. 169–175.
9. Семенов В.Ю., Семенова Е.В. Метод локализации нулей аналитических функций на основе оператора Кравчика. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 3. С. 194–200.
10. Семенов В.Ю. Метод нахождения всех действительных некротных корней системы нелинейных уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2007. Т. 47, № 9. С. 1486–1493.

11. Макхоул Дж., Русос С., Гиш Г. Векторное квантование при кодировании речи. *ТИИЭР*. 1985. Т. 73, № 11. С. 19–61.
12. Neculai A. An unconstrained optimization test functions collection. *Advanced Modeling and Optimization*. 2008. Vol. 10, N 1. P. 147–161.
13. Semenov V., Neumaier A. Calculation of local maxima for the likelihood function of speech autoregressive parameters. *Proc. Int. Conf. Computational Management Science*. Vienna, 2010. P. 24.
14. Byrd R., Nocedal J., Waltz R. KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization. In: *Large-Scale Nonlinear Optimization*. Di Pillo G., Roma M. (Eds). Boston: Springer, 2006. P. 35–59.

Надійшла до редакції 06.12.2018

**В.Ю. Семенов, Е.В. Семенова**

**МЕТОД ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРА КРАВЧИКА**

**Аннотация.** В работе предложен метод глобальной минимизации дважды непрерывно-дифференцируемых функций нескольких переменных на заданном интервале. Метод основан на решении системы нелинейных уравнений, образованной частными производными целевой функции с помощью оператора Кравчика. Применение метода продемонстрировано на численных примерах.

**Ключевые слова:** глобальная минимизация, оператор Кравчика, поиск корней, гессиан.

**V.Yu. Semenov, Ye.V. Semenova**

**GLOBAL MINIMIZATION METHOD BASED ON KRAWCZYK OPERATOR**

**Abstract.** Global minimization method for twice differentiable functions of several variables on the given interval is proposed. The method is based on the solution of systems of nonlinear equations formed by partial derivatives of the objective function with the use of Krawczyk operator. The application of the method is illustrated by numerical examples.

**Keywords:** global minimization, Krawczyk operator, rootfinding, Hessian.

**Семенов Василь Юрійович,**

кандидат фіз.-мат. наук, начальник науково-дослідного відділу ТОВ «ДЕЛЬТА СПЕ», Київ,  
e-mail: vasyldelta@gmail.com.

**Семенова Євгенія Вікторівна,**

кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту математики НАН України, Київ,  
e-mail: semenovaevgen@gmail.com.