

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ)¹

Аннотация. Рассматриваются несколько постановок задачи об оптимальном управляемом возбуждении колебаний шарнирно закрепленной балки. Колебания происходят под воздействием нескольких внешних периодических сил. В простейшей постановке задачи предполагается, что структура балки однородна. В более сложной постановке допускается наличие неоднородностей (дефектов) на балке. Цель управления колебаниями балки состоит в обеспечении заданной формы и заданной поточечной фазы колебаний в определенном частотном диапазоне. Задача состоит в определении того, сколько необходимо приложенных сил (включая их характеристики — места приложения, амплитуды и фазы колебаний) для обеспечения желаемой формы колебаний с заданной точностью. С помощью аналитических математических методов рассматриваемые задачи сводятся к более простым многоэкстремальным задачам минимизации основных функционалов, которые численно решаются с помощью многофункционального пакета AORDA PSG.

Ключевые слова: вибрация, форма колебаний, оптимальные характеристики возбуждения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу об оптимальном управляемом возбуждении колебаний шарнирно закрепленной балки. Данная задача является развитием подхода, предложенного в [1]. Под оптимальным управлением понимаем обеспечение такого режима колебаний балки, при котором форма колебаний будет наиболее близкой к желаемой относительно среднеквадратичного отклонения. Колебания происходят под воздействием нескольких внешних периодических сил. В простейшей постановке задачи предполагается, что структура балки является однородной. В более сложной постановке учитывается наличие неоднородностей (дефектов) на балке. При этом предполагается, что известна полная информация о параметрах дефекта (его длина, место локализации на балке и изменение модуля Юнга). Цель управления колебаниями балки состоит в обеспечении заданной формы и заданной поточечной фазы колебаний в фиксированном частотном диапазоне.

1. УПРАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ БАЛКОЙ

Рассмотрим упрощенный вариант модельной задачи об оптимальном управляемом возбуждении колебаний шарнирно закрепленной упругой однородной балки под влиянием периодических сосредоточенных сил. Задача состоит в определении количества сил и их характеристик (места приложения, амплитуды и фазы колебаний), которые обеспечивают желаемую форму колебаний с заданной точностью.

1.1. Определяющие уравнения в безразмерном виде. Согласно модели Кирхгофа проблема возбуждения шарнирно закрепленной упругой однородной балки с использованием I сил с комплексными амплитудами F_i , $i = 1, \dots, I$, с частотой ω сводится к следующей краевой задаче [2, 3]:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского офиса аэрокосмических исследований (European Office of Aerospace Research and Development), грант EOARD #: 16IOE094/STCU #: P695.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(ED \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^I F_i e^{i\omega t} \delta(x - \xi_i), \quad x \in (0, L), \quad (1)$$

$$\begin{cases} w(0, t) = w(L, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

где E, D, ρ — соответственно модуль Юнга, момент инерции поперечного сечения и плотность балки. При рассмотрении вынужденных колебаний предполагаем, что $w(x, t) = w(x)e^{i\omega t}$, где $w(x)$ — комплексная амплитуда прогиба.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\hat{w} = \frac{w}{w_0}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{k}^4 = \frac{\omega^2 \rho}{\pi EI}, \quad \hat{F}_i = \frac{F_i L^4}{EI w_0}.$$

Опуская для удобства символ $\hat{}$, получаем следующую безразмерную краевую задачу:

$$w^{(4)} - \pi^4 k^4 w = \sum_{i=1}^I F_i \delta(x - \xi_i), \quad i = 1, \dots, I; \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

$$\begin{cases} w(0) = w(1) = 0, \\ w''(0) = w''(1) = 0. \end{cases}$$

При этом значение $k=1$ соответствует первой форме колебаний. Определяем решение уравнения (2) в виде

$$w(x) = \sum_{i=1}^I F_i G(x, \xi_i), \quad (3)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина для уравнения (2):

$$\begin{cases} G_x^{(4)} - \pi^4 k^4 G = \delta(x - \xi), \quad x \in (0, 1), \\ \begin{cases} G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \\ G_x''(0, \xi) = G_x''(1, \xi) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

1.2. Постановка задачи управления. Пусть задана требуемая форма колебаний

$$W(x) = A(x)e^{i\Phi(x)} \quad (5)$$

при невязке $R(x) = w(x) - W(x) = A_R e^{i\varphi_R}$, где $w(x)$ — решение уравнения (2) при заданных $I, F_i, \xi_i, i = 1, \dots, I$. Пусть $I(\cdot)$ — положительно-определенный выпуклый функционал в пространстве L_2 , который используется в качестве критерия оптимальности в следующих задачах управления системой.

Задача 1. Для заданного количества сил I и требуемой формы колебаний $W(x)$ определить значения параметров $F_i, \xi_i, i = 1, \dots, I$, при которых достигается минимальное значение функционала $I(R)$.

Задача 2. Определить минимальное количество сил I и соответствующие ему значения параметров $F_i, \xi_i, i = 1, \dots, I$, при которых $I(R) \leq \varepsilon^2$, где ε — заданная точность.

Утверждение 1. Если

$$I(f) = \int_0^1 f \bar{f} dx, \quad (6)$$

то минимизация функционала $I(R)$ эквивалентна минимизации одновременно невязки амплитуды и фазы.

Доказательство. Пусть $w = re^{i\varphi}$ — решение задачи (2), $0 \leq \varphi - D < \pi$. Тогда

$$I(R) = \int_0^1 R \bar{R} dx = \int_0^1 \left\{ (r-A)^2 + 4rA \sin^2 \left(\frac{\varphi-D}{2} \right) \right\} dx.$$

Из положительности r и A следует выпуклость функционала $I(R)$ относительно $(r-A)$ и $(\varphi-D)$.

Замечание 1. В дальнейшем в качестве функционала $I(R)$ будем выбирать выражение (6).

1.3. Необходимые условия минимума функционала. Очевидно, что функционал $I(R)$ имеет вид

$$I(R) = \int_0^1 |w|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \int_0^1 w W dx + \int_0^1 |W|^2 dx. \quad (7)$$

Утверждение 2. Пусть $F_j = u_j + iv_j$. Тогда

$$\frac{\partial I}{\partial u_j} + i \frac{\partial I}{\partial v_j} = 2 \int_0^1 G_j (w - W) dx.$$

Доказательство. Из выражения (3) следует, что

$$\frac{\partial I}{\partial u_j} = 2 \int_0^1 G_j \operatorname{Re} (w - W) dx, \quad \frac{\partial I}{\partial v_j} = 2 \int_0^1 G_j \operatorname{Im} (w - W) dx,$$

где $G_j = G(x, \xi_j)$.

Следовательно, функционал $I(R)$ — выпуклый относительно F_j , $j = 1, \dots, I$. Поскольку минимизация среднеквадратичных функционалов сводится к методу Галеркина [4, 5], то необходимым условием оптимальности функционала $I(R)$ относительно v_j является ортогональность R и G_j .

Введем следующие обозначения:

$$G_j = G(x, \xi_j), \quad K_{ij} = \int_0^1 G_i G_j dx, \quad \mathbf{K} = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^I, \quad b_j = \int_0^1 G_j W dx, \quad (8)$$

$$\vec{b}^T = \{b_j\}_{j=1}^I, \quad \vec{F}^T = \{F_j\}_{j=1}^I.$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial I(R)}{\partial \vec{F}} = 2(\mathbf{K}\vec{F} - \vec{b}), \quad (9)$$

где

$$\left(\frac{\partial I(R)}{\partial \vec{F}} \right)^T = \left\{ \frac{\partial I(R)}{\partial u_j} + i \frac{\partial I(R)}{\partial v_j} \right\}_{j=1}^I.$$

При удовлетворении уравнения

$$\frac{\partial I(R)}{\partial \vec{F}} = 0 \quad (10)$$

значения \vec{F} , которые минимизируют $I(R)$, вычисляются по формуле

$$\vec{F} = \mathbf{K}^{-1} \vec{b}. \quad (11)$$

Используя обозначения (8), представим (7) в следующем виде:

$$I(R) = \bar{F}^T \mathbf{K} \bar{F} - 2\operatorname{Re}(\bar{F} \bar{b}^T) + \int_0^1 |W|^2 dx. \quad (12)$$

Утверждение 3. Матрица \mathbf{K} — действительная, симметричная и положительно-определенная.

Доказательство. Первые два свойства матрицы \mathbf{K} следуют из (8). Докажем, что \mathbf{K} — положительно-определенная матрица. Из формулы

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^I G(x, \xi_j) F_j e^{i\omega t}$$

следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \omega \sum_{j=1}^I G(x, \xi_j) (-v_j + iu_j).$$

Следовательно, усредненная за период $2\pi/\omega$ кинетическая энергия балки равна

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2 dx = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^1 \left(\operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{i,j=1}^I \int_0^1 G(x, \xi_i) G(x, \xi_j) dx F_i \bar{F}_j = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i,j=1}^I K_{ij} (u_i u_j + v_i v_j). \end{aligned}$$

Поскольку $T > 0$ и F_i — произвольные, то, выбирая $v_i = 0$, получаем $\sum_{i,j=1}^I K_{ij} u_i u_j > 0$ для произвольных u_i .

Утверждение 4. Если выполняется (10), то выражение (12) принимает вид

$$I(R) = -\bar{b}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{b} + \int_0^1 |W|^2 dx. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $\bar{F} = \mathbf{K}^{-1} \bar{b}$ (см. (11)). Тогда

$$I(R) = (\mathbf{K}^{-1} \bar{b})^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^{-1}) \bar{b} - 2\operatorname{Re}((\mathbf{K}^{-1} \bar{b}) \bar{b}^T) + \int_0^1 |W|^2 dx.$$

Поскольку \mathbf{K} и \mathbf{K}^{-1} — действительные и симметричные матрицы, то

$$I(R) = -\bar{b}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{b} + \int_0^1 |W|^2 dx.$$

Утверждение 5. Справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(R)}{\partial \xi_j} &= 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \xi_j} (u_i u_j + v_i v_j) + \frac{\partial K_{jj}}{\partial \xi_j} (u_j^2 + v_j^2) - \\ &- 2 \left(u_j \operatorname{Re} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \xi_j} \right) + v_j \operatorname{Im} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \xi_j} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Формулу (14) легко получить из (12), если учитывать, что выполняются равенства

$$\frac{\partial K_{ki}}{\partial \xi_j} = 0 \text{ для любых } k, i \neq j \text{ и } \frac{\partial K_{ij}}{\partial \xi_j} = \frac{\partial K_{ji}}{\partial \xi_j} \text{ при } i \neq j.$$

Утверждение 6. Если выполняется (10), то

$$\frac{\partial I(R)}{\partial \xi_j} = -\frac{\partial \bar{b}^T}{\partial \xi_j} \mathbf{K}^{-1} \bar{b} - \bar{b}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \bar{b}}{\partial \xi_j} + \bar{b}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_j} \mathbf{K}^{-1} \bar{b}. \quad (15)$$

Доказательство. Формулу (15) легко получить из (13), если учитывать, что

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \xi_j} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_j} \mathbf{K}^{-1}.$$

1.4. Построение функции Грина. Решение уравнения (4) можно легко получить, если представить функцию Грина в виде

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi),$$

где $G_i(x, \xi)$, $i=1,2$, является решением уравнения $\frac{d^4 G_i(x, \xi)}{dx^4} - k^4 \pi^4 G_i(x, \xi) = 0$,

и при этом $G_1(x, \xi)$ имеет в точке $x = \xi$ непрерывные производные по x порядка 0, 1, 2, 3; $G_2(x, \xi)$ имеет в точке $x = \xi$ непрерывные производные по x порядка 0, 1, 2, а $\left[\frac{d^3 G_2(x, \xi)}{dx^3} \right]_{x=\xi} = 1$. Кроме того, функция $G_i(x, \xi)$ удовлетворяет

однородным граничным условиям (4). Легко увидеть, что

$$G(x, \xi) = \begin{cases} g(x, \xi), & x \leq \xi, \\ g(\xi, x), & x > \xi, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$g(x, \xi) = \frac{\sin k\pi x \cdot \sin k\pi(1-\xi) \cdot \operatorname{sh} k\pi - \operatorname{sh} k\pi x \cdot \operatorname{sh} k\pi(1-\xi) \cdot \sin k\pi}{2k^3 \pi^3 \sin k\pi \cdot \operatorname{sh} k\pi}. \quad (17)$$

2. УПРАВЛЕНИЕ БАЛКОЙ С ДЕФЕКТОМ

Под дефектом будем понимать нарушение однородности (геометрическое или физическое) балки. Рассмотрим случай, когда $E = E(x)$, $I = \text{const}$. Однако аналогично можно считать, что $E = \text{const}$, $I = I(x)$.

2.1. Вывод уравнений. Предположим, что:

1) балка возбуждается одной силой интенсивности F , которая приложена в точке ξ ;

2) дефект длиной 2ℓ , который локализован в точке $\chi \neq \xi$, характеризуется изменением модуля Юнга ΔE .

Управление колебаниями описывается уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) I \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho w = F \delta(x - \xi), \quad (18)$$

где

$$E(x) = E_0 (1 - \Delta E f(x)), \quad (19)$$

$$f(x) = H(x - (\chi - \ell)) - H(x - (\chi + \ell)). \quad (20)$$

Таким образом, имеем

$$IE(x) \frac{d^4 w}{dx^4} - \omega^2 \rho w = F \delta(x - \xi) - I \frac{d^2 E}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - 2I \frac{dE}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3},$$

$$\begin{cases} \frac{dE}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} = -E_0 \Delta E f' w''', \\ \frac{d^2 E}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = -E_0 \Delta E f'' w''. \end{cases} \quad (21)$$

При этом

$$f' = \delta(x - (\chi - \ell)) - \delta(x - (\chi + \ell)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(k)}(x - \chi)}{k!} \ell^k -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(k)}(x - \chi)}{k!} (-1)^k \ell^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+1)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1}. \quad (22)$$

Замечание 2. Ряды в (22) слабо сходятся. Аналогично (22) можно получить следующее выражение:

$$f'' = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+2)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1}. \quad (23)$$

Проведя очевидные преобразования выражения (23) и введя в рассмотрение безразмерные величины, получаем

$$(1 - \Delta E f(x)) w_x^{(4)}(x, \xi) - \pi^4 k^4 w(x, \xi) = F \delta(x - \xi) +$$

$$+ 2 \Delta E w'_x(x, \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+1)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1} + 4 \Delta E w_x^{(3)}(x, \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+2)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1},$$

где x, χ, ξ, F — безразмерные величины.

Будем отыскивать решение в виде $w = w_0 + \hat{w}$, где $\hat{w} = \bar{o}(w_0)$ при $\Delta E \sim 0$. Получим

$$\begin{cases} w_{0x}^{(4)}(x, \xi) - \pi^4 k^4 w_0(x, \xi) = F \delta(x - \xi), \\ \hat{w}_x^{(4)}(x, \xi) - \pi^4 k^4 \hat{w}(x, \xi) = \Delta E \left\{ f(w_0 + \hat{w})_x^{(4)} + 2(w_0 + \hat{w})_x^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+1)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1} + \right. \\ \left. + 4(w_0 + \hat{w})_x^{(3)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+2)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1} \right\}. \end{cases} \quad (24)$$

Будем отыскивать \hat{w} в виде

$$\hat{w} = \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots, \quad (25)$$

где $\varepsilon_{i+1} = \bar{o}(\varepsilon_i)$ при $\Delta E \sim 0$. Заметим также, что

$$\Phi(\ell) = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\chi - \ell}^{\chi + \ell} f \varphi dx, \quad \Phi(\ell) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1}. \quad (26)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(w_{1x}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_1) + \varepsilon_2(w_{2x}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_2) + \dots = 2\Delta E \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{2k+1}}{(2k+1)!} (w_{0x}^{(4)} \delta^{(2k)}(x-\chi) + \\ + 2w_{0x}^{(3)} \delta^{(2k+1)}(x-\chi) + w_{0x}^{(2)} \delta^{(2k+2)}(x-\chi)) + 2\Delta E \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \\ \times ((\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots)_x^{(4)} \delta^{(2k)}(x-\chi) + 2(\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots)_x^{(3)} \delta^{(2k+1)}(x-\chi) + \\ + (\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots)_x^{(2)} \delta^{(2k+2)}(x-\chi)), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \frac{2\ell^{2i-1} \Delta E}{(2i-1)!}, \quad i=1, 2, \dots, \\ \begin{cases} w_{0x}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_0 = F\delta(x-\xi), \\ w_{ix}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_i = w_{0x}^{(4)} \delta^{(2i-2)}(x-\chi) + 2w_{0x}^{(3)} \delta^{(2i-1)}(x-\chi) + \\ + w_{0x}^{(2)} \delta^{(2i)}(x-\chi), \quad i=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Правая часть уравнений (28) для w_i представляет обобщенную функцию:

$$\Psi = \frac{d^2}{dx^2} (\delta^{(2i-2)}(x-\chi) w_{0x}^{(2)}).$$

Очевидно, что $\forall \varphi \in \Omega([a, b])$ имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dx^2} (\delta^{(2i-2)}(x-\chi) w_{0x}^{(2)}), \varphi(x) \right\rangle = \langle \delta^{(2i-2)}(x-\chi) w_{0x}^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle = \\ = \langle \delta^{(2i-2)}(x-\chi), w_{0x}^{(2)} \varphi^{(2)} \rangle = \left\langle \delta(x-\chi), \frac{d^{2i-2}}{dx^{2i-2}} (w_{0x}^{(2)} \varphi^{(2)}) \right\rangle = \\ = \frac{d^{(2i-2)}}{dx^{2i-2}} (w_{0x}^{(2)}(x, \xi) \varphi^{(2)}(x)) \Big|_{x=\chi} = \left\{ \sum_{s=0}^{2i-2} C_{2i-2}^s \frac{d^{2i-s}}{dx^{2i-s}} w_0(x, \xi) \frac{d^{2+s}}{dx^{2+s}} \varphi(x) \right\} \Big|_{x=\chi}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Psi = \sum_{s=0}^{2i-2} C_{2i-2}^s \frac{d^{2i-s}}{dx^{2i-s}} w_0(x, \xi) \Big|_{x=\chi} \delta^{(2+s)}(x-\chi). \quad (29)$$

Следовательно, функция Грина для балки с дефектом определяется решениями краевых задач:

$$\begin{aligned} G(x, \xi) = G_0(x, \xi) + \varepsilon_1 G_1(x, \xi) + \dots, \\ \begin{cases} G_{0x}^{(4)} - \pi^4 k^4 G_0 = \delta(x-\xi), \\ G_0(0, \xi) = G_0(1, \xi) = 0, \\ G_0^{(2)}(0, \xi) = G_0^{(2)}(1, \xi) = 0; \end{cases} \quad (30) \\ \begin{cases} G_{ix}^{(4)} - \pi^4 k^4 G_i = \sum_{s=0}^{2i-2} C_{2i-2}^s \frac{d^{2i-s}}{dx^{2i-s}} G_0(x, \xi) \Big|_{x=\chi} \delta^{(2+s)}(x-\chi), \\ G_i(0, \xi) = G_i(1, \xi) = 0, \\ G_{ix}^{(2)}(0, \xi) = G_{ix}^{(2)}(1, \xi) = 0, \quad i=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что $G_0(x, \xi)$ — функция Грина для однородной балки (16), (17), третья производная этой функции в точке $x = \xi$ имеет скачок (равный единице). Соответственно $G_1(x, \xi, \chi)$ будет иметь скачок первой производной в точке $x = \chi$.

Таким образом, решение краевых задач (30) представляет формальный слабо сходящийся ряд обобщенных функций и в некотором смысле этот ряд не является физическим. Целесообразно рассматривать приближение $\tilde{G}(x, \xi) = G_0(x, \xi) + \varepsilon_1 G_1(x, \xi, \chi) + \dots + \varepsilon_k G_k(x, \xi, \chi)$ как асимптотическое. В дальнейшем будем считать, что

$$G(x, \xi) = G_0(x, \xi) + \varepsilon_1 G_1(x, \xi, \chi), \quad (31)$$

где G_0 определено в (16), (17), $\varepsilon_1 = 2\ell\Delta E$, а G_1 определяется следующим образом:

$$\begin{cases} G_{1x}^{(4)} - \pi^4 k^4 G_1 = G_{0x}^{(2)}(\chi, \xi) \delta''(x - \chi), \\ G_1(0, \xi, \chi) = G_1(1, \xi, \chi) = 0, \\ G_{1x}^{(2)}(0, \xi, \chi) = G_{1x}^{(2)}(1, \xi, \chi) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Заметим, что

$$\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \xi^2} \right) - \pi^4 k^4 \frac{\partial^2 G_0}{\partial \xi^2} = \delta''(x - \xi).$$

Следовательно,

$$G_1 = \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G_0(x, \chi)}{\partial \xi^2}. \quad (33)$$

Граничные условия выполняются автоматически, например

$$\begin{aligned} G_1(0, \xi, \chi) &= \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G_0(0, \chi)}{\partial \xi^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 G_1(0, \xi, \chi)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi)}{\partial x^2} \frac{\partial^4 G_0(0, \chi)}{\partial x^2 \partial \xi^2} = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $G_0(1-x, 1-\xi) = G_0(x, \xi)$, граничные условия в точке $x = 1$ также выполнены.

2.2. Исследование функционала для первого приближения. Пусть $G(x, \xi, \chi) = G_0(x, \xi) + \varepsilon_1 G_1(x, \xi, \chi)$, где G_0 определено в (16), (17), а G_1 определено в (33). По аналогии с (8) введем обозначение для $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}_{i,j=1}^I$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^1 G_0(x, \xi_i) G_0(x, \xi_j) dx + \varepsilon_1 \int_0^1 (G_0(x, \xi_i) G_1(x, \xi_j, \chi) + G_0(x, \xi_j) G_1(x, \xi_i, \chi)) dx + \\ &+ \varepsilon_1^2 \int_0^1 (G_1(x, \xi_i) G_1(x, \xi_j)) dx = K_{ij}^0 + \varepsilon_1 K_{ij}^1 + \varepsilon_1^2 K_{ij}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Замечание 3. В (34) нельзя пренебрегать членом порядка ε_1^2 , поскольку в этом случае теряется положительная определенность матрицы \mathbf{K} .

Утверждение 7. Матрица \mathbf{K} — действительная, симметричная и положительно-определенная.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 3 с учетом замечания 3.

Таким образом, минимизации подлежит функционал (12), где компоненты матрицы \mathbf{K} определены в (34), и \vec{b} находится следующим образом:

$$\vec{b}^T = \{b_j\}_{j=1}^I, \quad b_j = \int_0^1 G_0(x, \xi_j) w(x) dx + \varepsilon_1 \int_0^1 G_1(x, \xi_j, \chi) w(x) dx = b_j^0 + \varepsilon_1 b_j^1. \quad (35)$$

Поскольку $I(R)$ является выпуклым функционалом, то необходимое условие существования экстремума совпадает с (10), (11).

Представим расчетные формулы:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^0 &= \int_0^1 G_0(x, \xi_i) G_0(x, \xi_j) dx, \quad b_j^0 = \int_0^1 G_0(x, \xi_j) w(x) dx, \\
 K_{ij}^1 &= \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi_j)}{\partial x^2} \int_0^1 G_0(x, \xi_i) \frac{\partial^2 G_0(x, \chi)}{\partial \xi^2} dx + \\
 &\quad + \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi_i)}{\partial x^2} \int_0^1 G_0(x, \xi_j) \frac{\partial^2 G_0(x, \chi)}{\partial \xi^2} dx, \\
 K_{ij}^2 &= \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi_j)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi_i)}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 G_0(x, \chi)}{\partial \xi^2} \right)^2 dx, \\
 b_j^1 &= \frac{\partial^2 G_0(\chi, \xi_j)}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 G_0(x, \chi)}{\partial \xi^2} \right)^2 w(x) dx.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Градиенты вычисляются непосредственно из (36).

2.3. Множественные дефекты. Рассмотрим случай, когда в балке присутствуют K дефектов, k -й дефект расположен в точке χ_k и характеризуется значением $\varepsilon_{1(k)} = 2\ell_k \Delta E_k$. В силу линейности задачи формулы (10)–(12) не изменяются. При этом

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{K}_{(k)}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^K \bar{\mathbf{b}}_{(k)}, \\
 \mathbf{K}_{(k)} &= \mathbf{K}_{(k)}^0 + \varepsilon_{1(k)} \mathbf{K}_{(k)}^1 + \varepsilon_{1(k)}^2 \mathbf{K}_{(k)}^2, \\
 \bar{\mathbf{b}}_{(k)} &= \bar{\mathbf{b}}_{(k)}^0 + \varepsilon_{1(k)} \bar{\mathbf{b}}_{(k)}^1.
 \end{aligned} \tag{37}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИОНАЛА

3.1. Скалярный случай для однородной балки. Пусть $w = \sum_{i=1}^I F_i G(x, \xi_i)$ и значения F_i, ξ_i определены для $i=1, \dots, I-1$. Предположим, что $\text{Im } w = 0$. Тогда $I(R)(\xi_I, F_I) = \int_0^1 (F_I G(x, \xi_I) - f(x))^2 dx$, где $f(x) = w(x) - \sum_{i=1}^{I-1} F_i G(x, \xi_i)$.

Таким образом, для отыскания минимального значения функционала

$$I(R)(\xi, F) = \int_0^1 (FG(x, \xi) - f(x))^2 dx \tag{38}$$

достаточно построить итерационный процесс с использованием метода покоординатного спуска.

Утверждение 8. Имеем

$$\max_{\xi} \min_F I(R) = \int_0^1 f^2(x) dx,$$

где оптимум достигается при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} F = 0, \\ \int_0^1 f(x)G(x) dx = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial F} = F \int_0^1 G^2 dx - \int_0^1 f G^2 dx, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial F^2} = \int_0^1 G^2 dx > 0,$$

то все минимумы по F для $I(R)$ достигаются при значении

$$F = \left(\int_0^1 f G dx \right) / \left(\int_0^1 G^2 dx \right). \quad (40)$$

Рассмотрим отношение $\partial I / \partial \xi$. Будем полагать, что $F = F(\xi)$ и эта величина определяется из выражения (40):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial \xi} = F^2 \int_0^1 G \frac{\partial G}{\partial \xi} dx - F \int_0^1 f \frac{\partial G}{\partial \xi} dx = \int_0^1 f G dx \frac{\left\{ \int_0^1 f G dx \int_0^1 G \frac{\partial G}{\partial \xi} dx - \int_0^1 G^2 dx \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi} f dx \right\}}{\left(\int_0^1 G^2 dx \right)^2}. \quad (41)$$

Таким образом, равенство $\partial I / \partial \xi = 0$ равносильно следующим равенствам:

$$\begin{cases} \int_0^1 f G dx = 0, \\ \int_0^1 f G dx \int_0^1 G \frac{\partial G}{\partial \xi} dx - \int_0^1 G^2 dx \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi} f dx = 0. \end{cases} \quad (42)$$

При этом справедливо следующее соотношение:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_{\int_0^1 f G dx = 0} = - \left(\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi} f dx \right) / \left(\int_0^1 G^2 dx \right) \right)^2 < 0.$$

Следовательно, при выполнении (40) условие $\int_0^1 f G dx = 0$ ($F = 0$) гарантирует,

что $I(R)$ достигает минимума в точке ξ .

Утверждение 9. Условия утверждения 8 выполняются для произвольной функции $f(x)$ при $\xi = \{0, 1\}$.

Доказательство. Из (16) следует

$$\int_0^1 f G dx = \int_0^{\xi} g(x, \xi) f(x) dx + \int_{\xi}^1 g(\xi, x) f(x) dx.$$

В силу непрерывности $g(x, \xi)$ по ξ выполняется равенство

$$\int_0^{\xi} g(x, \xi) f(x) dx \Big|_{\xi=0} = 0.$$

При этом $g(0, x) = 0$. Следовательно, утверждение доказано.

Утверждение 10. Функционал $I(R)$ имеет по крайней мере один минимум. Все локальные минимумы для $I(R)$ определяются следующими необходимыми условиями:

$$\begin{cases} F = \left(\int_0^1 fG dx \right) / \left(\int_0^1 G^2 dx \right), \\ F \neq 0, \\ \int_0^1 fG dx \int_0^1 G \frac{\partial G}{\partial \xi} dx - \int_0^1 G^2 dx \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi} f dx = 0, \end{cases} \quad (43)$$

и значения $\hat{\xi}$, соответствующие им, располагаются между точками ξ^* , которые определяются условием

$$\int_0^1 f(x)G(x, \xi^*) dx = 0, \quad (44)$$

причем $\hat{\xi} \in (0, 1)$.

Доказательство. В соответствии с утверждением 9 при выполнении условия (40) существуют седловые точки (минимумы по F и максимумы по ξ). Следовательно, учитывая непрерывную дифференцируемость функционала $I(R)$ по ξ ,

согласно теореме Ролля $(I(R)) \Big|_{\substack{\xi=0,1 \\ F=0}} = \int_0^1 f^2 dx$ существует по крайней мере один

локальный минимум (по F и по ξ) при $\xi \in (0, 1)$.

Если (44) выполнено во внутренних точках $[0, 1]$, то на каждом таком отрезке справедливо утверждение 10.

Последнее выражение в (43) является необходимым условием экстремума $I(R)$ по ξ при выполнении (40).

3.2. Примеры использования полученных результатов. Запишем функцию Грина, используя однородные решения:

$$G^{(4)} - \pi^4 k^4 G = \delta(x - \xi), \quad x \in (0, 1),$$

$$\begin{cases} G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \\ G^{(2)}(0, \xi) = G^{(2)}(1, \xi) = 0, \end{cases}$$

где $G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \pi n x$.

Граничные условия выполнены для произвольной A_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \pi^4 (n^4 - k^4) \sin \pi n x = \delta(x - \xi) \quad (45)$$

или

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta_{sn} \pi^4 (n^4 - k^4) = \sin \pi s \xi.$$

Таким образом, $A_s = \frac{2 \sin \pi s \xi}{\pi^4 (s^4 - k^4)}$,

$$G(x, \xi) = \frac{2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \xi}{n^4 - k^4} \cdot \sin \pi n x \equiv \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \pi n \xi \cdot \sin \pi n x, \quad (46)$$

где $p_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi^4 (n^4 - k^4)}$.

Пусть

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \pi n x. \quad (47)$$

Тогда условие (39) принимает вид

$$\sum_{r,n=1}^{\infty} p_n f_r \sin \pi n \xi \int_0^1 \sin \pi n x \cdot \sin \pi r x dx = 0$$

или

$$\begin{cases} F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^4 - k^4} \sin \pi n \xi, \\ F(\xi) = 0. \end{cases} \quad (48)$$

Из (48) следует, что минимумы функционала $I(R)$ следует отыскивать между точками $\xi^* : F(\xi^*) = 0$.

Пусть $f_n = \delta_{ns}$ (т.е. $f(x) = \sin \pi s x$). Тогда $F(\xi) = \frac{1}{s^4 - k^4} \sin \pi s \xi$ и $\xi_h^* = n/s$,

$s = 0, \dots, S$. В этом случае $I(R)$ имеет по крайней мере S локальных минимумов.

Проверим условие (43):

$$\begin{cases} \int_0^1 f G dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n p_n \sin \pi n \xi, \\ \int_0^1 G^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n,r=1}^{\infty} p_n p_r \sin \pi n \xi \cdot \sin \pi r \xi \delta_{hr} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \sin^2 \pi n \xi = \\ = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \cos 2\pi n \xi \right\}, \\ \int_0^1 G \frac{\partial G}{\partial \xi} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 G^2 dx = \frac{1}{8} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 h \sin 2\pi n \xi, \\ \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \xi} f dx = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 f G dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n p_n h \cos \pi n \xi. \end{cases} \quad (49)$$

Таким образом, необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} M(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} f_n p_n \sin \pi n \xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n^2 \sin 2\pi n \xi - \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} p_h^2 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \cos 2\pi n \xi \right\} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} n f_n p_n \cos \pi n \xi, \\ M(\hat{\xi}) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \cos 2\pi n \hat{\xi} \neq 0. \end{cases} \quad (50)$$

Если $f_n = \delta_{ns}$, то

$$M(\xi) = p_s \sin \pi s \xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n^2 \sin 2\pi n \xi - p_s \cos \pi s \xi \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (1 - \cos 2\pi n \xi). \quad (51)$$

Если ξ является нулем функции $M(\xi)$, то и $1 - \xi$ является нулем $M(\xi)$. Действительно,

$$M(1-\xi) = p_s \sin \pi s \xi (-1)^s \sum_{n=1}^{\infty} n p_n^2 \sin 2\pi n \xi - s p_s (-1)^s \cos \pi s \xi \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (1 - \cos 2\pi n \xi) =$$

$$= (-1)^s M(\xi). \quad (52)$$

Если $s = 2r - 1$, то $M\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Действительно,

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = p_s \cdot 0 - s p_s \cos \pi \left(r - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (1 - (-1)^n) = 0. \quad (53)$$

Легко показать, что $\xi = 1/2$ при фиксированном s не для всех частот (k) будет определять минимум функционала $I(R)$. Действительно, знак для $(\partial^2 I(R) / \partial \xi^2)|_{\xi=1/2}$

определяется знаком функции $S(s, k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (k)^2 ((-1)^n (2n^2 - s) + s)$. Можно по-

казать, что для всех $s = 2r + 1$, $k \in (0, 2)$ выполнено $S(s, k) > 0$. Для значений $k \in (r, r + 1)$, $r > 2$, функция $S(s, k)$ изменяет знак.

Легко увидеть, что

$$I(R) = \frac{1}{2} - \frac{p_s^2 \sin^2 s \pi \xi}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (1 - \cos 2\pi n \xi)}, \quad (54)$$

$$I(R)|_{s=2r+1, \xi=1/2} = \frac{1}{2} - \frac{p_s^2}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 (1 - (-1)^n)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{32k^7}{\pi(k^4 - s^4) \left(\sec^2 \frac{k\pi}{2} (k\pi - 3 \sin k\pi) + \sec^2 h^2 \frac{k\pi}{2} (-k\pi + 3 \sin hk\pi) \right)}, \quad (55)$$

где $s = 2r + 1$.

Очевидно, что

$$I(R)|_{s=2r+1, \xi=1/2, k=s} = 0, \quad (56)$$

т.е. при этих значениях переменных достигается минимум. В то же время при $s = 2r + 1$, $\xi = \frac{1}{2}$, $k = 2n + 1$, $n \neq r$

$$I(R) = \frac{1}{2},$$

т.е. достигается максимум.

Пусть приложена сила F_ξ в точке ξ и сила $F_{1-\xi}$ в точке $1 - \xi$. В этом случае

$$w = F_\xi G(x, \xi) + F_{1-\xi} G(x, 1 - \xi).$$

Из (46) следует, что

$$G(x, 1 - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n \sin n\pi \xi \cdot \sin n\pi x. \quad (57)$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} G_1(x, \xi) = \frac{G(x, \xi) + G(x, 1-\xi)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1} \sin(2n-1)\pi\xi \cdot \sin(2n-1)\pi x, \\ G_2(x, \xi) = \frac{G(x, \xi) - G(x, 1-\xi)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \sin 2n\pi\xi \cdot \sin 2n\pi x, \\ F_1 = F_{\xi} + F_{1-\xi}, \\ F_2 = F_{\xi} - F_{1-\xi}. \end{cases} \quad (58)$$

Тогда

$$I(R) = \int_0^1 (F_1 G_1 + F_2 G_2 - w)^2 dx. \quad (59)$$

Условия $\partial I / \partial F_i = 0, i=1, 2$, сводятся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \hat{K}\vec{F} = \vec{b}, \\ \hat{K} = \{a_{ij}\}_{i=1}^r, \vec{F}^T = \{F_i\}_{i=1}^r, \vec{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^r, \\ a_{ij} = \int_0^1 G_i G_j dx, b_i = \int_0^1 w G_i dx. \end{cases} \quad (60)$$

При этом легко увидеть, что $a_{12} = a_{21} = \int_0^1 G_1 G_2 dx = 0$. Следовательно,

$$F_i = \left(\int_0^1 w G_i dx \right) / \left(\int_0^1 G_i^2 dx \right), \quad i=1, 2. \quad (61)$$

Если $w = \sum_{h=1} w_h \sin h\pi x$, то

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} w_{2n-1} p_{2n-1} \sin(2n-1)\pi\xi}{\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1}^2 \sin^2(2n-1)\pi\xi}, \\ F_2 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} w_{2n} p_{2n-1} \sin 2n\pi\xi}{\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}^2 \sin^2 2n\pi\xi}. \end{cases} \quad (62)$$

Если $w_h = \delta_{hs}$, то для $s=2k-1, k \in N$, получим $w_{2n} = 0$ и, следовательно, $F_2 = 0 (F_{\xi} = F_{1-\xi})$.

В случае $w_h = \delta_{hs}$ и $s=2k, k \in N$, имеем $w_{2n-1} = 0$ и $F_1 = 0 (F_{\xi} = F_{1-\xi})$. При этом исследования аналогичны рассмотренным выше.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ

Для определения зависимости точности аппроксимации заданной формы колебаний от количества сил и их характеристик (места приложения, амплитуды и фазы колебаний) была проведена серия численных экспериментов с использованием многофункционального пакета PSG (Matlab Interface), предоставленного American Optimal Decision, USA [6]. При этом рассматривалось два случая: колебание однородной балки и колебание балки с дефектом.

4.1. Результаты моделирования колебания однородной балки. Представим результаты численного решения задач оптимального управления колебаниями однородной балки при разном количестве приложенных сил и разной частоте (волнового числа k). При этом использовались математический аппарат, приведенный в разд. 1, и многофункциональный пакет PSG (Matlab Interface).

В качестве целевой функции использовалось среднеквадратичное отклонение решения от заданной формы колебаний на частоте, соответствующей заданному волновому числу k . Из рис. 1 видно, что при любой фиксированной частоте колебаний увеличение числа приложенных сил приводит к уменьшению ошибки аппроксимации. Более того, при любом фиксированном числе приложенных сил ошибка аппроксимации возрастает с увеличением волнового числа k . Например, для любого фиксированного числа приложенных сил ошибка аппроксимации, соответствующая $k = 1.8$, меньше ошибки аппроксимации, соответствующей большим значениям волнового числа k .

Для волновых чисел $k = 1.8, k = 4.6$ при разном количестве сил были определены их оптимальные характеристики (места приложения, действительные и мнимые части амплитуд), которые обеспечивают наилучшую аппроксимацию заданных формы и фазы колебаний однородной балки.

На рис. 2 показаны оптимальные характеристики сил, соответствующие волновому числу $k = 1.8$. Из рисунка следует, что при любом количестве сил из рассматриваемого диапазона оптимальные амплитуды регулярно распределены. Если количество приложенных сил не превосходит четырех, то величины амплитуд соизмеримы между собой. При количестве сил, начиная от пяти и более, величины действительной части амплитуд сил, приложенных по краям балки, намного превышают силы, приложенные к ее внутренним точкам. Знаки мнимых частей амплитуд (if) чередуются при переходе от одной точки приложения сил к следующей. При этом преобладающие значения величин мнимых частей амплитуд соответствуют крайним точкам приложения сил на балке.

На рис. 3 графически показаны оптимальные характеристики сил, соответствующие волновому числу $k = 4.6$. Оптимальные характеристики приложенных к балке сил при $k = 4.6$ существенно отличаются от тех, которые показаны на рис. 2 и соответствуют случаю $k = 1.8$. Эти графики имеют очертания и формы синусоид: график мнимой части амплитуд ассоциируется с полнопериодной синусоидой, а график действительной части — с полупериодной синусоидой.

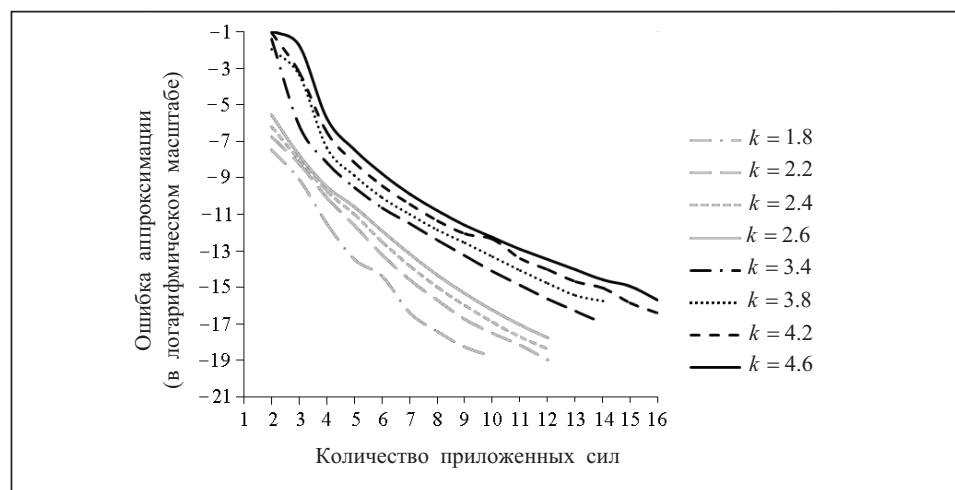


Рис. 1. Зависимость среднеквадратичного отклонения (ошибки аппроксимации) от приложенных сил и частоты (волнового числа k)

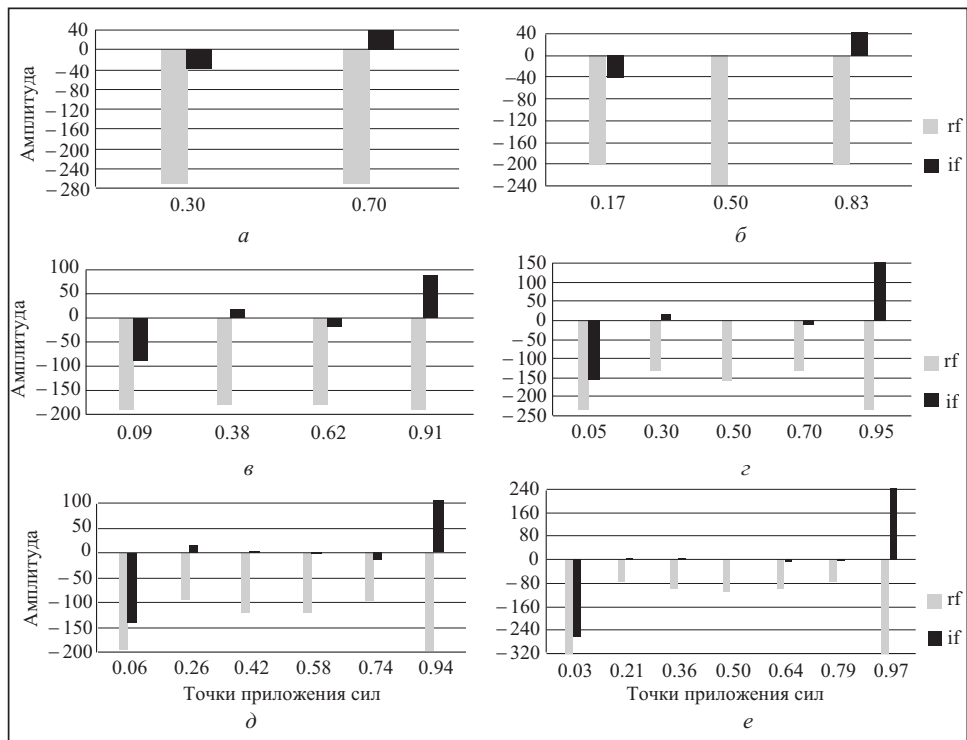


Рис. 2. Оптимальные характеристики приложенных сил (места приложения, действительная (rf) и мнимая (if) части амплитуд) при $k = 1.8$: для двух сил (а), трех сил (б), четырех сил (в), пяти сил (г), шести сил (д), семи сил (е)

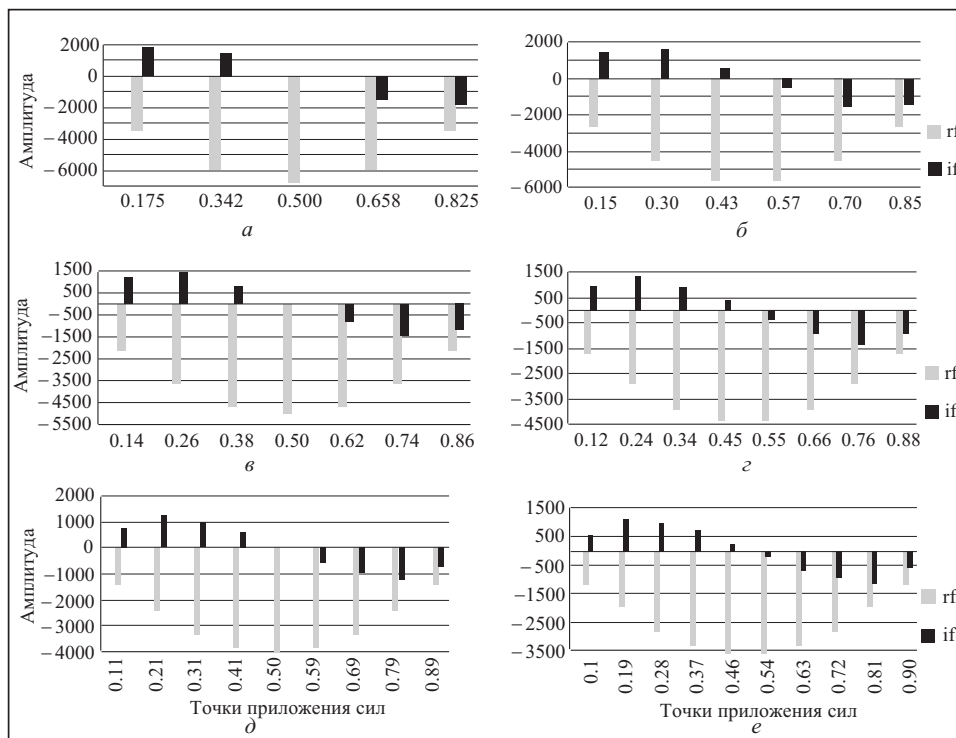


Рис. 3. Оптимальные характеристики приложенных сил (места приложения, действительная (rf) и мнимая (if) части амплитуд) при $k = 4.6$: для пяти сил (а), шести сил (б), семи сил (в), восьми сил (г), девяти сил (д); десяти сил (е)

4.2. Результаты моделирования колебания балки с дефектом. Рассмотрим случай колебания балки с одним дефектом, который характеризуется следующими параметрами: местоположением на балке в точке χ , геометрическим размером $2\ell \in (0, 0.1)$ и относительным изменением значения модуля Юнга ΔE . Дефект может быть на любом участке балки в точке $\chi \in (0, 1)$. Относительное изменение значения модуля Юнга ΔE может варьироваться в пределах интервала $(-0.5, 0.5)$. Отрицательное значение ΔE соответствует укреплению, а положительное — ослаблению сечения. Значение $\Delta E = 0$ означает отсутствие дефекта. В качестве характеристики дефекта в модели используется параметр $Delta = 2\ell \cdot \Delta E$.

В предположении, что известна вся информация о параметрах дефекта, была решена серия задач оптимального управления колебаниями балки с одним дефектом для фиксированных значений волнового числа 1.8 и четырех приложенных сил при разных значениях величины дефекта $Delta$ и его расположения на балке в точке χ . При этом использовались математический аппарат, приведенный в разд. 2.1 и 2.2, и многофункциональный пакет PSG (Matlab Interface), предоставленный American Optimal Decision, USA [6]. В результате для каждой фиксированной пары значений $Delta$ и χ были получены оптимальные характеристики сил и соответствующее им оптимальное (минимальное) значение среднеквадратичного отклонения (ошибки аппроксимации). В дальнейшем для простоты под ошибкой аппроксимации будем понимать минимальное значение ошибки аппроксимации, полученное в результате решения оптимизационной задачи. Полученные результаты графически изображены на рис. 4, 5. Каждая кривая, изображенная на рис. 4, описывает зависимость ошибки аппроксимации от величины дефекта $Delta$ в случае, когда волновое число равно 1.8, количество сил равно четырем и единственный дефект на балке расположен в точке χ . В рассматриваемом случае все кривые убывают на интервале $-0.05 < Delta < 0$ и возрастают на интервале $0 < Delta < 0.05$. Минимальное значение ошибки аппроксимации для всех кривых, равное $1.0E-5$, достигается, когда дефекты на балке практически отсутствуют ($|Delta| \leq 5.0E-6$).

Поведение кривой, когда дефект расположен в центре балки ($\chi = 0.5$), существенно отличается от поведения остальных кривых. В этом случае наибольшее значение ошибки аппроксимации при $Delta = -0.05$ является меньшим, чем при значении $Delta = 0.05$. В остальных случаях наибольшее значение ошибки аппроксимации достигается при $Delta = -0.05$, причем максимальное значение, равное $5.2E-4$, достигается в случаях, когда дефект расположен в точке $\chi = 0.2$ или в точке $\chi = 0.8$.

Поскольку оптимальное значение ошибки аппроксимации при фиксированных значениях параметров $Delta$ и χ соответствует минимуму целевой функции, то в случаях, когда волновое число равно 1.8, количество сил равно четырем, величина дефекта $Delta = -0.05$ и при этом дефект расположен в точке $\chi = 0.2$ или

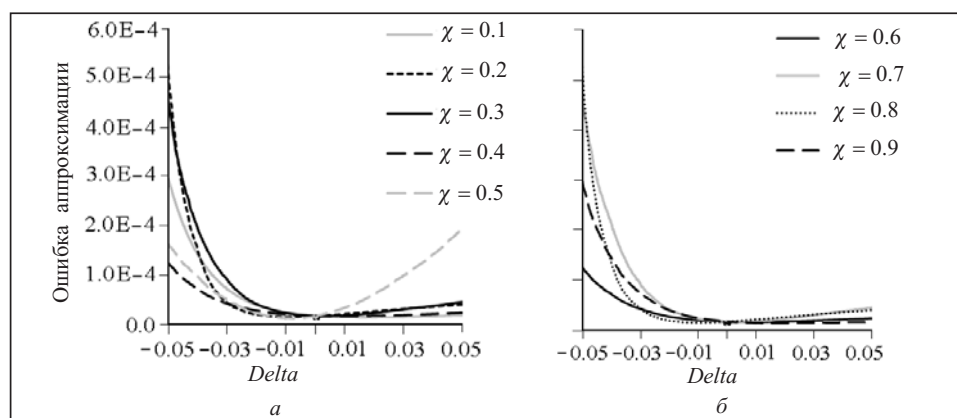


Рис. 4. Зависимость ошибки аппроксимации от $Delta$ при расположениях дефекта на балке $\chi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ (а); $\chi = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ (б) при волновом числе 1.8 и количестве сил, равном 4

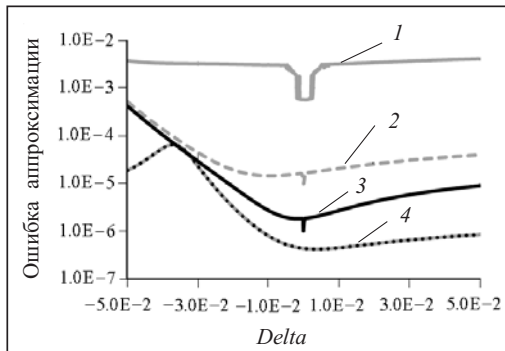


Рис. 5. Зависимость ошибки аппроксимации от Δ при использовании двух сил (1), четырех сил (2), шести сил (3), восьми сил (4), фиксированном расположении дефекта на балке в точке $\chi = 0.2$ и волновом числе 1.8

своих минимальных значений при $\Delta = 0$ (когда дефекты на балке отсутствуют). При любой фиксированной величине дефекта (Δ) кривая, соответствующая большему количеству сил, имеет меньшие значения ошибки аппроксимации. Наибольшие значения ошибки аппроксимации демонстрирует кривая, соответствующая наименьшему количеству сил (две силы).

Как следует из результатов, представленных на рис. 5, для уменьшения оптимального значения ошибки аппроксимации при фиксированных значениях Δ и χ необходимо увеличить количество сил, приложенных к балке.

На рис. 6, а прослеживается изменение значения действительных частей амплитуд по мере того, как величина дефекта (Δ), локализованного в левой части балки ($\chi = 0.4$), возрастает от -0.05 до 0.05 . Как видим, при любом значении Δ на интервале $(-0.05, 0.05)$ знак этих характеристик остается отрицательным. Действительные (rf_1, rf_2) части амплитуд сил, приложенных к левой части балки, больше изменяются, чем соответствующие компоненты сил (rf_3, rf_4), приложенные к ее правой части. На левом конце интервала значений дефекта Δ $|rf_1| > |rf_2|$, а на правом конце $|rf_1| < |rf_2|$. При этом $|rf_4| > |rf_3|$ при любом значении Δ на интервале $(-0.05, 0.05)$. Следовательно, при локализации дефекта в левой части балки изменение его величины оказывает большее влияние на силы, приложенные в этой же части балки. Значения rf_1 и rf_3 возрастают на интервалах изменения Δ $(-5E-2, -4.6E-4)$ и $(0, 5E-2)$, а значения rf_2 и rf_4 убывают на этих интервалах. При $\Delta = 0$ действительные части всех амплитуд достигают своего минимума, который соответствует колебанию балки без дефек-

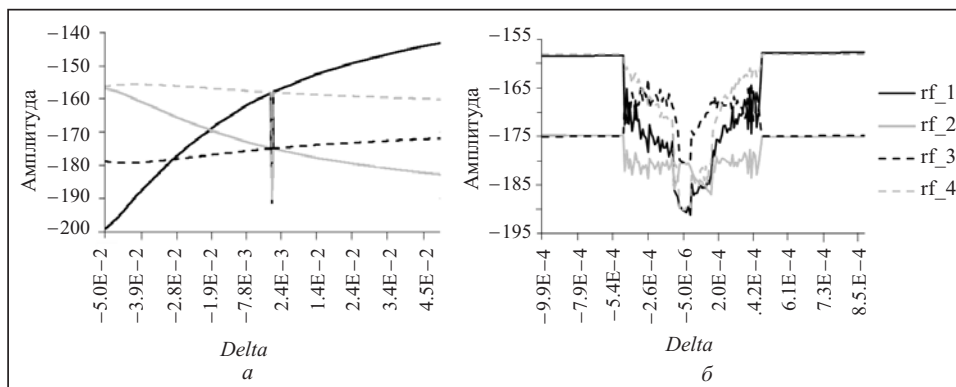


Рис. 6. Зависимость действительной части амплитуд четырех приложенных сил (rf_1, rf_2, rf_3, rf_4) от Δ при фиксированном расположении дефекта на балке в точке $\chi = 0.4$, волновом числе 1.8 при изменении Δ в пределах $(-0.05, 0.05)$ (а), $(-0.001, 0.001)$ (б)

в точке $\chi = 0.8$, оптимальное значение целевой функции (ошибки аппроксимации) не может быть меньше, чем $5.2E-4$, что в 52 раза превышает оптимальное значение ошибки аппроксимации при отсутствии дефектов на балке.

На рис. 5 изображены четыре кривые, каждая из которых описывает зависимость ошибки аппроксимации от величины дефекта (Δ) при фиксированном расположении дефекта на балке в точке $\chi = 0.2$. Несмотря на то, что характеры кривых различны, они имеют некоторые сходства. Все они достигают

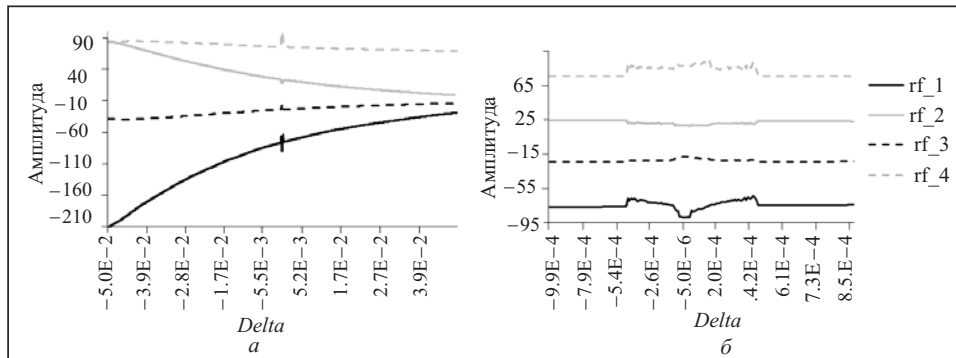


Рис. 7. Зависимость мнимой части амплитуд четырех приложенных сил (if_1 , if_2 , if_3 , if_4) от $Delta$ при фиксированном расположении дефекта на балке в точке $\chi = 0.4$, волновом числе 1.8 при изменении $Delta$ в пределах $(-0.05, 0.05)$ (а), $(-0.001, 0.001)$ (б)

тов. На рис. 6, б крупным планом показано изменение всех характеристик на малом интервале $(-0.001, 0.001)$ значений $Delta$ вблизи точки минимума.

Рис. 7, а демонстрирует изменение значения мнимых частей амплитуд по мере того, как величина дефекта ($Delta$), локализованного в левой части балки ($\chi = 0.4$), возрастает от -0.05 до 0.05 . Как видим, при любом значении $Delta$ на интервале $(-0.05, 0.05)$ знак каждой характеристики не изменяется. Как и в случае отсутствия дефектов (см. рис. 2), знаки мнимых частей амплитуд чередуются при переходе от одной точки приложения сил к следующей. Мнимые части амплитуд сил (if_1 , if_2), приложенных в точках в левой части балки, изменяются сильнее, чем соответствующие компоненты сил (if_3 , if_4), приложенных в точках в ее правой части. На рис. 7, б крупным планом показано изменение всех характеристик на малом интервале $(-0.001, 0.001)$ значений $Delta$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача оптимального управления колебаниями шарнирно закрепленной балки под воздействием внешних периодических сил. Проанализированы две детерминированные постановки этой задачи в предположении, что все параметры точно известны. В простейшей постановке задачи предполагается, что структура балки является однородной. В более сложной постановке допускается наличие неоднородностей (дефектов) на балке. Задача состоит в определении количества сил и их характеристик (места приложения, амплитуды и фазы колебаний), которые обеспечивают требуемую форму колебаний с заданной точностью. С помощью аналитических методов рассматриваемые задачи были сведены к более простым оптимизационным задачам. Получены аналитические выражения для целевых функций и их градиентов.

С использованием аналитических результатов проведена серия численных экспериментов в целях изучения зависимости точности аппроксимации заданной формы колебаний от количества сил и их характеристик (места приложения, амплитуды и фазы колебаний). Установлено, что в случае однородной балки (отсутствие дефектов) при любой фиксированной частоте колебаний увеличение числа приложенных сил приводит к уменьшению ошибки аппроксимации. Более того, при любом фиксированном числе приложенных сил ошибка аппроксимации возрастает с увеличением волнового числа. Были проанализированы зависимости оптимальных характеристик приложенных сил от количества приложенных сил. При моделировании колебания балки с дефектом проанализирован характер зависимости ошибки аппроксимации от величины дефекта, его положения на балке и количества сил, приложенных к балке. Показано, что при фиксированных параметрах дефекта ошибку аппроксимации можно уменьшить увеличением количества сил, приложенных к балке. Показано, что оптимальные характеристики сил зависят от места расположения дефекта и параметров.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зражевський Г.М. Визначення оптимальних параметрів збудження форми коливань балки. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. Фізико-математичні науки.* 2013. Вип. 3. С. 138–141. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKNU_fiz_mat_2013_3_34.
2. Donnell L.H. *Beams, plates, and shells.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.
3. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. 580 p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method for solid and structural mechanics.* Oxford: Butterworth; Heinemann, 2005. 736 p.
5. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* Москва: Наука, 1965. 408 с.
6. AORDA Portfolio Safeguard (PSG). URL: http://www.aorda.com/html/PSG_Help_HTML/index.html?bpoe.htm.

Надійшла до редакції 20.12.2018

Г.М. Зражевський, О.М. Голодніков, С.П. Уряс'єв

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ КОЛИВАННЯМИ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ БАЛКИ (ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ВИПАДОК)

Анотація. Розглянуто кілька постановок задачі про оптимальне кероване збудження коливань шарнірно закріпленої балки. Коливання відбуваються під впливом декількох зовнішніх періодичних сил. У найпростішій постановці задачі вважають, що структура балки є однорідною. У більш складній постановці допускають наявність неоднорідностей (дефектів) на балці. Мета керування коливаннями балки полягає у забезпеченні заданої форми і заданої поточної фази коливань у визначеному частотному діапазоні. Задача полягає у визначенні того, скільки необхідно прикладених сил та їхніх характеристик (місця прикладення, амплітуди і фази коливань) для забезпечення бажаної форми коливань із заданою точністю. За допомогою аналітичних математичних методів розглянуті задачі зводяться до більш простих багатоекстремальних задач мінімізації основних функціоналів, які чисельно розв'язуються за допомогою багатofункціонального пакету AORDA PSG.

Ключові слова: вібрація, форма коливань, оптимальні характеристики збудження.

G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev

MATHEMATICAL METHODS FOR SEARCHING THE OPTIMAL CONTROL OF OSCILLATIONS OF A HINGED BEAM (DETERMINISTIC CASE)

Abstract. We consider several problem statements for the optimal controlled excitation of oscillations of a hinged beam. Oscillations occur under the influence of several external periodic forces. In the simplest statement, it is assumed that the structure of the beam is homogeneous. In a more complex formulation, inhomogeneities (defects) on the beam are allowed. The goal of controlling the oscillations of the beam is to provide a predetermined shape and a predetermined pointwise phase of oscillations in a given frequency range. The task is to determine the number of forces and their characteristics (application, amplitude and phase of oscillations), which provide the desired form of oscillation with a given accuracy. With the help of analytical mathematical methods, the problems in question are reduced to simpler multiextremal problems of minimizing basic functionals, which are numerically solved using the multifunctional package AORDA PSG.

Keywords: vibrations, waveform, optimal actuation.

Зражевський Григорій Михайлович,

кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: zgrig@univ.kiev.ua.

Голодніков Александр Николаевич,

кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев.

Уряс'єв Станислав Павлович,

кандидат физ.-мат. наук, профессор Флоридского университета, Гейнсвилл, Флорида, США, e-mail: uryasev@ufl.edu.