УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО

МАКСИМИЗИРУЮЩИЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ В ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ЦЕЛЕВЫМ НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ ТИПА-2

Аннотация. Подход Беллмана и Заде применяется для задачи принятия решений, которая задана на нечетких множествах типа-2 (НМТ-2). Определено НМТ-2 решений. Для сравнения нечетких множеств степеней принадлежности альтернатив использовано расширение отношения естественного порядка на класс нечетких множеств. На основе этого отношения предпочтения построено нечеткое множество недоминируемых альтернатив. Введено понятие недоминируемой альтернативы уровня α. Показано, что ее можно получить из оптимизационной задачи, в которой максимизируется первичная степень принадлежности НМТ-2 решений при ограниченной вторичной степени. Исследован вопрос существования недоминируемых альтернатив уровня $\alpha = 1$. Сформулирована задача выбора альтернатив по двум критериям (первичной и вторичной степеням принадлежности НМТ-2 решений).

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое множество типа-2, нечеткое математическое программирование, принятие решений.

ВВЕДЕНИЕ

Подход Bellman и Zadeh [1] к решению задачи с нечетко определенной целью состоит в том, что цель принятия решений и множество допустимых альтернатив рассматриваются как равноправные нечеткие множества некоторого универсального множества альтернатив. Это позволяет достаточно просто найти решение задачи.

Практическое использование данного подхода показало его высокую эффективность и широту спектра применения. Он дал импульс для развития методов решения оптимизационных задач в условиях нечеткой информации различной природы. Модели и методы нечеткого математического программирования хорошо развиты. Более детально достижения в этой области описаны в [2–4].

Нечеткие множества являются основным инструментом формализации неопределенности в описании задачи принятия решений в подходе Bellman и Zadeh, однако и они могут быть неопределенными. Mendel и John в [5] отметили, что существует по крайней мере четыре источника неопределенностей в классических нечетких множествах Это, например, значения слов, используемых в описании нечетких множеств (слова имеют различный смысл для разных людей). Причиной неопределенности может быть также неоднозначность мнений различных экспертов. Кроме этого, она обусловлена как шумами измерений, так и шумами данных. Все это приводит к неопределенности функции принадлежности нечеткого множества. Такие неопределенности могут моделировать нечеткие множества типа-2 (НМТ-2), поскольку их функции принадлежности сами по себе нечеткие. В то же время НМТ-2 трудно интерпретировать и их использование вычислительно более сложно. Несмотря на эти проблемы, НМТ-2 широко используются.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нечеткие множества типа-2 введены Zadeh в 1971 г. [6] как расширение классических нечетких множеств (типа-1). Степень принадлежности элементов нечетких множеств определяется значением в интервале [0, 1], а степень принадлежности элементов НМТ-2 представляет собой нечеткое множество на [0, 1].

Поэтому НМТ-2 A [7, 8] — отображение $A: X \to [0,1]^{[0,1]}$. Mendel и John в [8] дали следующее определение, основанное на идеях Karnik и Mendel [9].

Нечеткое множество типа-2 A характеризуется функцией принадлежности типа-2 (ФПТ-2) $\tilde{\mu}_A(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y(x) \subseteq [0,1]$, т.е. $A = \{(x, \tilde{\mu}_A(x, y)) : x \in X,$ $y \in Y(x) \subseteq [0,1]\}$. Значение $y \in Y(x) \subseteq [0,1]$ называется первичной степенью принадлежности, а $\tilde{\mu}_A(x, y)$ — вторичной оценкой (степенью принадлежности).

Иногда полезно использовать данное определение с замечаниями Harding, Walker, Walker [10] и Aisbett, Rickard, Morgenthaler [11], в которых понятие НМТ-2 A характеризуется ФПТ-2

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} \tilde{\mu}_A(x, y), & y \in Y(x), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x \in X$, которая расширена на $Y \subseteq [0,1]$. Отсюда $A = \{(x, \mu_A(x, y)) : x \in X,$ $y \in Y \subseteq [0,1]\}$.

Обозначим множество альтернатив X. Нечеткую цель в X обозначим G. Пусть она характеризуется функцией принадлежности $\mu_G(x)$. Множество допустимых альтернатив в X с функцией принадлежности $\mu_F(x)$ обозначим символом F. Согласно подходу Bellman и Zadeh [1] нечеткое решение определяется как нечеткое множество D, полученное в результате пересечения F и G с функцией принадлежности $\mu_D(x) = \min\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}$. «Оптимальным» решением считают любую альтернативу в X, которая максимизирует $\mu_D(x)$; ее называют максимизирующей альтернативой.

Пусть X — набор альтернатив; НМТ-2 G с ФПТ-2 $\mu_G(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y \subseteq [0,1]$, — цель в X. Аналогично определим НМТ-2 F допустимых альтернатив в X, которое характеризуется ФПТ-2 $\mu_F(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y \subseteq [0,1]$. Нечеткое решение D определим как НМТ-2, возникающее в результате пересечения F и G. Согласно [7]

$$\mu_D(x, y) = \max_{u, v \in [0,1];\, \min\{u, v\} = y} \min\{\mu_F(x, u), \mu_G(x, v)\}, \; x \in X, \; y \in Y \subseteq [0,1], \quad (1)$$

является его ФПТ-2.

Какую альтернативу в X следует выбрать в качестве максимизирующей? Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть на универсальном множестве $X = [0,16]$ заданы НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G с ФПТ-2 соответственно $\mu_F(x, y)$ и $\mu_G(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y \subseteq [0,1]$, принимающие значения из двухэлементного множества $\{0{,}5;\ 1\}$. На рис. 1 представлены линии уровней 0,5 (тонкие) и 1,0 (жирные) ФПТ-2: НМТ-2 допустимых альтернатив F (сплошные линии) и НМТ-2 цели G (штриховые линии). Нечетким решением этой задачи будет НМТ-2 $D = F \cap G$, ФПТ-2 которого имеет линии уровней 0,5 (тонкие) и 1,0 (жирные), изображенные на рис. 2. Видно, что альтернатива $x = 5$ имеет максимальную первичную степень принадлежности НМТ-2 решений, равную 0,75 с вторичной оценкой, равной 0,5, а альтернатива $x = 6$ — максимальную первичную степень принадлежности, равную 0,25 с вторичной оценкой, равной 1. Возникает вопрос: какую альтернативу выбрать — первую, вторую или, возможно, еще какую-нибудь?

Поскольку для альтернатив $x \in X$ множества $FY_D(x) = \bigcup_{y \in Y(x)} (y, \mu_D(x, y))$ степеней принадлежности НМТ-2 D нечеткие (например, $FY_D(5) = \{(0;1); (0{,}75; 0{,}5)\}$ для альтернативы $x = 5$ и $FY_D(6) = \{(0{,}25;1); (0{,}5; 0{,}5)\}$ для альтернативы $x = 6$), для решения поставленной проблемы необходимо разработать метод их сравнения. Тогда альтернативу, которой соответствует «лучшее» из нечетких множеств степеней принадлежности, можно считать решением сформулированной задачи выбора максимизирующей альтернативы.

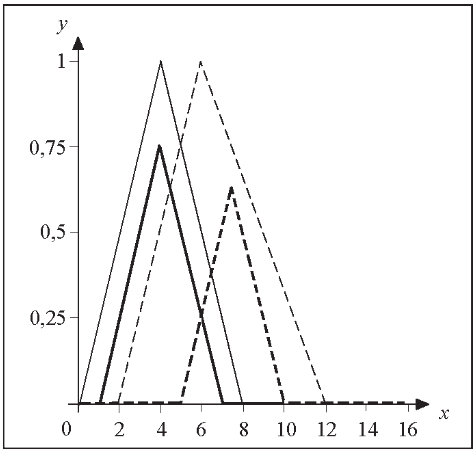

Рис. 1. Линии уровня ФПТ-2 F и G

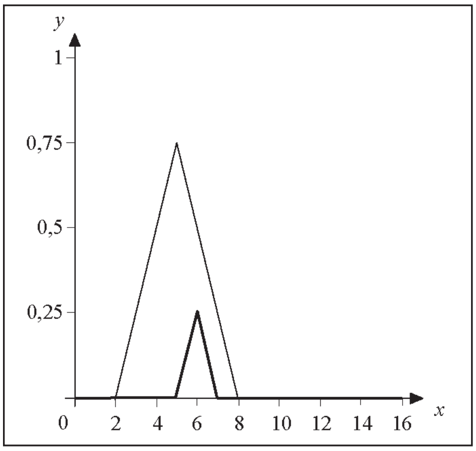

Рис. 2. Линии уровня ФПТ-2 D

В случае, когда нечеткие множества степеней принадлежности НМТ-2 можно представить нечеткими числами, целесообразно использовать известные методы ранжирования, исследованные в последние несколько лет вследствие их применения в нечеткой оптимизации. Существует множество подходов к сравнению нечетких чисел [12], что можно объяснить широкой областью их использования.

Тем не менее нечеткие множества степеней принадлежности НМТ-2 могут быть более общего вида: например, когда степени принадлежности принимают дискретные значения, как в примере 1. Такие НМТ-2 также получаются в результате операций объединения и пересечения нечетких множеств с нечетким множеством операндов [13–16]. В данной работе рассмотрим более общий случай НМТ-2.

НЕЧЕТКОЕ ОТНОШЕНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Приведем некоторые определения из [17], которые понадобятся в дальнейшем.

Нечетким отношением предпочтения (НОП) R на X называется нечеткое подмножество декартового произведения $X \times X$ с функцией принадлежности $\eta_R : X \times X \to [0,1]$. Предполагается, что НОП рефлексивно, т.е. $\eta_R(x, x) = 1\ \forall x \in X$.

Нечеткое отношение предпочтения R порождает нечеткое отношение строгого предпочтения $S = R \setminus R^{-1}$ с функцией принадлежности $\eta_S(x, y) = \max\{0, \eta_R(x, y) - \eta_R(y, x)\}\ \forall x, y \in X$.

На X с НОП R зададим множество ND недоминируемых (оптимальных по Парето) альтернатив с функцией принадлежности

$$\eta_{ND}(x) = \min_{y \in X} \{1 - \eta_S(x, y)\} = 1 - \max_{y \in X} \eta_S(x, y) =$$
$$= 1 - \max_{y \in X} \{\eta_R(y, x) - \eta_R(x, y)\}. \qquad (2)$$

Значение $\eta_{ND}(x)$ понимается как степень, с которой альтернативу x не доминирует ни один элемент множества X.

В контексте проблем принятия решений альтернативы, имеющие степень принадлежности нечеткому множеству ND недоминируемых альтернатив, равную 1, представляют особый интерес. Они называются четко недоминируемыми альтернативами.

РАСШИРЕНИЕ НЕЧЕТКОГО ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ НА КЛАСС НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Формально данную проблему можно сформулировать следующим образом. Пусть $\mu_F : Y \times Y \to [0,1]$ — функция принадлежности НОП F, заданного на универсальном множестве Y, а Φ — класс нечетких множеств в Y. Какой вид должно иметь НОП F на классе Φ?

Для получения необходимого НОП в [17] приведены следующие соображения. Пусть нечеткое множество A из Φ имеет функцию принадлежности $\lambda_A(y)$, $y \in Y$. Значение $\eta(A, y') = \max_{y \in Y} \min \{\lambda_A(y), \mu_F(y, y')\}$ можно понимать как степень, с которой нечеткое множество A предпочтительнее элемента $y' \in Y$. Аналогично значение $\eta(y', A) = \max_{y \in Y} \min \{\lambda_A(y), \mu_F(y', y)\}$ является степенью, с которой верно обратное предпочтение. Если A' и A'' — какие-либо два нечетких множества в Y, то $\eta(A', A'') = \max_{y \in Y} \min \{\lambda_{A'}(y), \max_{z \in Y} \min \{\lambda_{A''}(z), \mu_F(y, z)\}\} =$ $= \max_{y, z \in Y} \min \{\lambda_{A'}(y), \lambda_{A''}(z), \mu_F(y, z)\}$ — степень предпочтения $A' \widetilde{F} A''$, где $\widetilde{F}$ обозначено НОП на Φ с функцией принадлежности η. Данное НОП $\widetilde{F}$ определено на классе Φ и индуцируется НОП F, заданным на универсальном множестве Y. В случае, когда Y — числовая ось и «$\geq$» — естественный порядок на $[0,1]$, индуцированное НОП $\widetilde{F}$ имеет вид

$$\eta(A', A'') = \max_{y, z \in [0,1];\ y \geq z} \min \{\lambda_{A'}(y), \lambda_{A''}(z)\}. \tag{3}$$

В частном случае, когда класс Φ более узкий, эту формулу можно упростить. Согласно [17] для любых двух нормальных выпуклых нечетких множеств A' и A'' на Y необходимо и достаточно, чтобы имело место хотя бы одно из равенств:

$$\eta(A', A'') = 1 \text{ или } \eta(A', A'') = \max_{y \in [0,1]} \min \{\lambda_{A'}(y), \lambda_{A''}(y)\}.$$

НЕЧЕТКОЕ МНОЖЕСТВО НЕДОМИНИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть D — НМТ-2 решения задачи с нечетко определенной целью на универсальном множестве альтернатив X. Его ФПТ-2 $\mu_D(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y \subseteq [0,1]$, определена согласно формуле (1).

Поскольку множества $FY_D(x) = \bigcup_{y \in Y} (y, \mu_D(x, y))$ степеней принадлежности НМТ-2 решения D альтернативы $x \in X$ нечеткие, для сравнения альтернатив $x \in X$ используем НОП $\widetilde{F}$ с функцией принадлежности $\eta(x', x'') = \eta(FY_D(x'), FY_D(x''))$. Нечеткое отношение предпочтения $\widetilde{F}$ представляет собой расширение отношения естественного порядка «$\geq$» на класс нечетких множеств, определенных на $Y \subseteq [0,1]$. Согласно формуле (3) функция принадлежности НОП $\widetilde{F}$ примет вид

$$\eta(x', x'') = \max_{u, v \in Y;\ u \geq v} \min \{\mu_D(x', u), \mu_D(x'', v)\},\ x', x'' \in X.$$

Будем говорить, что НМТ-2 на X с ФПТ-2 $\varphi(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, называется нормальным по вторичной степени принадлежности, если

$$\max_{y \in Y} \varphi(x, y) = 1 \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Лемма 1. Для того чтобы НМТ-2 решения D было нормальным по вторичной степени принадлежности, необходимо и достаточно, чтобы НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G также были нормальными по вторичной степени принадлежности.

Доказательство. Пусть НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G нормальны по вторичной степени принадлежности, т.е.

$$\max_{y \in Y} \mu_F(x, y) = 1, \ \max_{y \in Y} \mu_G(x, y) = 1 \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

Покажем, что

$$\max_{y \in Y} \mu_D(x, y) = 1 \quad \forall x \in X. \tag{6}$$

Предположим противное. Пусть $\exists x' \in X$ такой, что $\forall y \in Y$ справедливо

$$\mu_D(x', y) < 1. \tag{7}$$

Обозначим $u' = \arg\max_{y \in Y} \mu_F(x', y)$, $v' = \arg\max_{y \in Y} \mu_G(x', y)$ и $y' = \min\{u', v'\}$. Из (5) следует $\mu_F(x', u') = 1$ и $\mu_G(x', v') = 1$. Рассмотрим $\mu_D(x', y')$. Согласно (1) имеем

$$\mu_D(x', y') = \max_{u, v \in Y;\ \min\{u, v\} = y'} \min\{\mu_F(x', u), \mu_G(x', v)\} \geq$$

$$\geq \min\{\mu_F(x', u'), \mu_G(x', v')\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

Получили противоречие с (7). Таким образом, имеют место равенства (6) и НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности.

Пусть НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности, т.е. имеют место равенства (6). Покажем, что справедливы равенства (5). Предположим противное, что $\exists x' \in X$, для которого хотя бы одно равенство не выполняется. Пусть без ограничения общности $\mu_F(x', u) < 1 \ \forall u \in Y$. Это неравенство справедливо и для $u = u'$, для которого выполняется условие

$$\min\{\mu_F(x', u'), \mu_G(x', v')\} = \max_{u, v \in Y} \min\{\mu_F(x', u), \mu_G(x', v)\}. \tag{8}$$

Обозначим $y' = \min\{u', v'\}$. Тогда (8) запишем в виде

$$\min\{\mu_F(x', u'), \mu_G(x', v')\} = \max_{u, v \in Y;\ \min\{u, v\} = y'} \min\{\mu_F(x', u), \mu_G(x', v)\}.$$

Поскольку $\min\{\mu_F(x', u'), \mu_G(x', v')\} < 1$, из формулы (1) получим $\mu_D(x', y') < 1$, что противоречит равенствам (6). Таким образом, имеют место равенства (5), НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G нормальны по вторичной степени принадлежности.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Для того чтобы нечеткое отношение $\widetilde{F}$ на X было НОП, необходимо и достаточно, чтобы НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G были нормальными по вторичной степени принадлежности.

Доказательство. Отметим, что функция принадлежности нечеткого множества $\bigcup_{y \in Y}(y, \mu_F(x^*, y))$ степеней принадлежности альтернативы $x^* \in X$ НМТ-2 F имеет вид $\mu_F(x^*, y)$. Аналогично $\mu_G(x^*, y)$ и $\mu_D(x^*, y)$ — функции принадлежности нечеткого множества степеней принадлежности альтернативы $x^* \in X$ НМТ-2 G и D соответственно.

Достаточность. Фактически требуется показать рефлексивность нечеткого отношения $\widetilde{F}$, т.е. $\eta(x, x) = 1 \ \forall x \in X$. Пусть НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G нормальны по вторичной степени принадлежности. Тогда согласно лемме 1 НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности и будут выполняться равенства (6). Предположим противное, что $\exists x' \in X$, для которого

$$\eta(x', x') < 1. \tag{9}$$

Обозначим u' и v' произвольные элементы (они могут совпадать) множества $\operatorname{Arg}\max_{y \in Y} \mu_D(x', y)$. Без ограничения общности будем считать, что $u' \geq v'$. Из (6) следует $\mu_D(x', u') = 1$ и $\mu_D(x', v') = 1$. Рассмотрим $\eta(x', x')$. Согласно формуле (3) имеем

$$\eta(x', x') = \max_{u, v \in Y;\, u \geq v} \min \{\mu_D(x', u), \mu_D(x', v)\} \geq$$

$$\geq \min \{\mu_D(x', u'), \mu_D(x', v')\} = \min \{1, 1\} = 1.$$

Получили противоречие с (9). Таким образом, нечеткое отношение $\widetilde{F}$ рефлексивно.

Необходимость. Пусть нечеткое отношение $\widetilde{F}$ рефлексивно, т.е.

$$\eta(x, x) = 1 \ \ \forall x \in X. \tag{10}$$

Вначале покажем, что имеют место равенства (6). Предположим противное, что $\exists x' \in X$, для которого $\mu_D(x', y) < 1$ при любых $y \in Y$, в том числе и тех $y = u'$ и $y = v'$, для которых выполняется условие

$$\min \{\mu_D(x', u'), \mu_D(x', v')\} = \max_{u, v \in Y;\, u \geq v} \min \{\mu_D(x', u), \mu_D(x', v)\}.$$

Поскольку $\min \{\mu_D(x', u'), \mu_D(x', v')\} < 1$, из формулы (3) получим $\eta(x', x') < 1$, что противоречит предположению (10). Таким образом, имеют место равенства (6) и поэтому НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности. Отсюда согласно лемме 1 НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G также нормальны по вторичной степени принадлежности.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Фактически условие теоремы 1 определяет область применения рассматриваемого подхода к решению задачи с НМТ-2 цели. Однако отметим, что известны способы коррекции произвольного нечеткого отношения, которые трансформируют его в отношение предпочтения. Например, в [17] используется объединение исходного отношения с единичным. В данной работе не будем анализировать преимущества и недостатки этого подхода, отметим только возможность не учитывать ограничение, которое накладывает теорема 1.

После введения НОП $\widetilde{F}$ на множестве альтернатив X исходная задача сводится к задаче нахождения нечеткого множества недоминируемых альтернатив, а затем выбора в некотором смысле «лучшей» альтернативы.

Зададим на X нечеткое множество ND недоминируемых альтернатив. Согласно формулам (2) и (3) его функция принадлежности имеет следующий вид:

$$\eta_{ND}(x) = 1 - \max_{y \in X} \{\eta(y, x) - \eta(x, y)\} = 1 - \max_{y \in X} \left\{ \max_{u, v \in Y;\, u \geq v} \min \{\mu_D(y, u), \mu_D(x, v)\} - \right.$$

$$\left. - \max_{u, v \in Y;\, u \geq v} \min \{\mu_D(x, u), \mu_D(y, v)\} \right\}. \tag{11}$$

На основе подхода Bellman и Zadeh [1] в качестве «лучшей» альтернативы нечеткого множества обычно выбирают максимизирующую альтернативу (с максимальной степенью принадлежности). В случае, когда ее сложно найти, выбирают альтернативу со степенью принадлежности не менее заданной величины $\alpha \in [0, 1]$. Применим эту идею для решения исходной задачи.

Назовем $x^* \in X$ недоминируемой альтернативой уровня α, $\alpha \in [0, 1]$, в задаче с НМТ-2 цели, если $\eta_{ND}(x) \geq \alpha$. Поскольку величина $\eta_{ND}(x)$ представляет собой степень недоминируемости альтернативы $x \in X$, можно сделать следующий вывод. Если $\eta_{ND}(x) \geq \alpha$, то во множестве X нет ни одной альтернативы, доминирующей альтернативу x со степенью, большей $1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Это замечание дает возможность выбрать конкретное решение со степенью недоминируемости не менее α как решение следующей задачи:

$$y \to \max \tag{12}$$

при ограничениях

$$\mu_D(x, y) \geq \alpha, \ x \in X, \ \ y \in Y \subseteq [0,1]. \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности. Тогда если (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (12), (13), то альтернатива x^* будет недоминируемой альтернативой уровня α.

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (12), (13). Рассмотрим нечеткое отношение $\widetilde{F}$ на X. Согласно теореме 1 оно является НОП с функцией принадлежности $\eta^{ND}(x)$ по формуле (11). Покажем, что

$$\eta^{ND}(x^*) = 1 - \max_{x \in X} \left\{ \max_{u,\, y \in [0,1];\, u \geq y} \min\{\mu_D(x, u), \mu_D(x^*, y)\} - \right.$$

$$\left. - \max_{u,\, y \in [0,1];\, u \geq y} \min\{\mu_D(x^*, u), \mu_D(x, y)\} \right\} \geq \alpha.$$

Предположим противное, что найдется такой $\widetilde{x} \in X$, для которого

$$\max_{u,\, y \in [0,1];\, u \geq y} \min\{\mu_D(\widetilde{x}, u), \mu_D(x^*, y)\} -$$

$$- \max_{u,\, y \in [0,1];\, u \geq y} \min\{\mu_D(x^*, u), \mu_D(\widetilde{x}, y)\} > 1 - \alpha. \tag{14}$$

Покажем, что всегда можно выбрать $\widetilde{y} \in Y$, удовлетворяющий условию

$$\mu_D(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq \alpha. \tag{15}$$

Предположим противное, что неравенство (15) не выполняется. Тогда $\mu_D(x, y) < \alpha \ \ \forall y \in Y$. Отсюда $\max\limits_{y \in Y} \mu_D(x, y) < \alpha$, что противоречит условию (4). Таким образом, неравенство (15) выполняется. Теперь покажем, что $y^* \geq \widetilde{y}$. Предположим противное, что $\widetilde{y} > y^*$. Тогда из этого неравенства и (15) следует, что вектор (x^*, y^*) не оптимальное решение задачи (12), (13). Получили противоречие. Таким образом, $y^* \geq \widetilde{y}$. Отсюда следует

$$\max_{u,\, y \in [0,1];\, u \geq y} \min\{\mu_D(x^*, u), \mu_D(\widetilde{x}, y)\} \geq \min\{\mu_D(x^*, y^*), \mu_D(\widetilde{x}, \widetilde{y})\} \geq \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$$

и из (14) вытекает

$$\max_{u,\, y \in Y;\, u \geq y} \min\{\mu_D(\widetilde{x}, u), \mu_D(x^*, y)\} > 1 - \alpha + \max_{u,\, y \in Y;\, u \geq y} \min\{\mu_D(x^*, u), \mu_D(\widetilde{x}, y)\} \geq$$

$$\geq 1 - \alpha + \alpha = 1.$$

Поскольку $\mu_D(x, y) \leq 1$ для $x \in X$, $y \in Y$, получили противоречие.

Теорема 2 доказана.

ЧЕТКО НЕДОМИНИРУЕМЫЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Очевидно, что альтернатива с максимальным уровнем α максимизирующая. В общем случае этот максимальный уровень может быть произвольным числом из интервала $[0,1]$. Однако в силу замечания 1 определенный интерес представляет вопрос, какого максимального уровня α при условиях теоремы 1 может быть недоминируемая альтернатива.

Лемма 2. Пусть НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности. Тогда если существует

$$M = \max_{x \in X,\ y \in Y} \mu_D(x, y), \tag{16}$$

то $M = 1$.

Доказательство. Обозначим $(x^*, y^*) = \arg \max_{x \in X,\ y \in Y} \mu_D(x, y)$. Предположим противное, что $1 > \mu_D(x^*, y^*)$. Тогда $1 > \mu_D(x^*, y^*) = \max_{x \in X,\ y \in Y} \mu_D(x, y) \geq$ $\geq \max_{y \in Y} \mu_D(x^*, y)$. Отсюда согласно (4) НМТ-2 D не будет нормально по вторичной степени принадлежности. Получили противоречие.

Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Отметим, что достаточные условия существования максимума в задачах вида (16) широко известны: например, если $\mu_D(x, y)$ непрерывна и X, Y — компакты; если $\mu_D(x, y)$ произвольна и X, Y конечны. Далее для упрощения изложения материала будем считать, что эти условия выполняются.

Отметим, что условию $\max_{x \in X,\ y \in Y} \mu_D(x, y) = 1$ в примере 1 соответствуют альтернативы $x^* \in [5, 7]$ с первичными степенями принадлежности $y^* \in [0; 0{,}25]$ и вторичными $\mu_D(x^*, y^*) = 1$.

Из теорем 1, 2 и леммы 2 с учетом замечания 2 вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть НМТ-2 допустимых альтернатив F и цели G нормальны по вторичным степеням. Тогда существует оптимальное решение (x^*, y^*) задачи (12), (13) для $\alpha = 1$, причем x^* — четко недоминируемая альтернатива.

Если исходить из примера 1, то легко проверить, что только одна альтернатива $x^* = 6$ с первичной степенью принадлежности $y^* = 0{,}25$ и вторичной $\mu_D(x^*, y^*) = 1$ четко недоминируема.

ЭФФЕКТИВНЫЕ МАКСИМИЗИРУЮЩИЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Несложно построить такой пример, когда задача (12), (13) будет иметь множество оптимальных решений (x^*, y^*) с одними и теми же значениями первичной степени принадлежности y^*, но с различными значениями вторичной степени принадлежности $\mu_D(x^*, y^*) \geq \alpha$. В этом случае логичнее выбрать такую альтернативу $\hat{x}$, которая соответствовала бы оптимальному решению задачи

$$\mu_D(x, y) \to \max \tag{17}$$

при ограничениях

$$y \geq y^*,\ \ x \in X,\ \ y \in Y \subseteq [0, 1]. \tag{18}$$

Такой подход предполагает, что при выборе максимизирующей альтернативы задачи с НМТ-2 цели необходимо руководствоваться требованием получить как можно большие значения как первичной степени принадлежности (задача (12), (13)), так и вторичной (задача (17), (18)). Иными словами, следует выбирать только те альтернативы, которые в задачах многокритериальной оптимизации называются парето-оптимальными.

Рассмотрим задачу двухкритериальной оптимизации

$$y \to \max,\ \ \mu_D(x, y) \to \max \tag{19}$$

при ограничениях

$$x \in X,\ \ y \in Y \subseteq [0, 1], \tag{20}$$

в которой максимизируется как первичная степень принадлежности НМТ-2 решения D, так и вторичная.

Напомним, что вектор (x, y) доминирует (x', y') в двухкритериальной задаче (19), (20) (обозначается это отношение $(x, y) \succ (x', y')$), если справедливы неравенства $y \geq y'$, $\mu_D(x, y) \geq \mu_D(x', y')$ и хотя бы одно из них строгое.

Данное понятие позволяет определить множество парето-оптимальных решений двухкритериальной задачи (19), (20).

Вектор (x^*, y^*) называется парето-оптимальным решением двухкритериальной задачи (19), (20), если не существует такой пары (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, которая доминирует (x^*, y^*). Обозначим множество парето-оптимальных решений задачи (19), (20) $P = \{(x^*, y^*) : (x, y) \not\succ (x^*, y^*) \ \forall x \in X, \forall y \in Y\}$.

Замечание 3. Достаточные условия существования парето-оптимальных решений задач вида (19), (20) широко известны, они аналогичны приведенным в замечании 2.

Альтернативу $x^* \in X$ назовем эффективной максимизирующей альтернативой, если существует такой $y^* \in Y$, что вектор (x^*, y^*) будет парето-оптимальным решением задачи (19), (20), т.е. $(x^*, y^*) \in P$.

Свойства эффективных максимизирующих альтернатив устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть НМТ-2 решения D нормально по вторичной степени принадлежности. Если вектор (x^*, y^*) — парето-оптимальное решение задачи (19), (20), то x^* — эффективная максимизирующая альтернатива, которая является недоминируемой альтернативой уровня $\mu_D(x^*, y^*)$.

Доказательство. Пусть вектор $(x^*, y^*) \in P$. Тогда согласно определению x^* — эффективная максимизирующая альтернатива. Обозначим $\alpha = \mu_D(x^*, y^*)$ и покажем, что вектор (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (12), (13). Очевидно, что система ограничений (13) совместна. Предположим противное, что найдется такое допустимое решение системы (13) $(\tilde{x}, \tilde{y})$, для которого выполняются неравенства

$$\tilde{y} > y^*, \ \mu_D(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \alpha = \mu_D(x^*, y^*).$$

Тогда $(\tilde{x}, \tilde{y}) \succ (x^*, y^*)$ и по определению парето-оптимального решения задачи (19), (20) $(x^*, y^*) \notin P$. Получили противоречие. Таким образом, вектор (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (12), (13). Отсюда на основании теоремы 2 получим, что x^* — недоминируемая альтернатива уровня $\mu_D(x^*, y^*)$.

Теорема 3 доказана.

Отметим, что, поскольку оптимальные по Парето решения несравнимы между собой, для выбора эффективной максимизирующей альтернативы $x^* \in X$ лицо, принимающее решение (ЛПР), выбирает компромисс между бóльшим значением первичной степени принадлежности y и вторичной оценкой $\mu_D(x^*, y)$. При этом лучшие значения по какому-либо одному показателю будут приводить к худшим значениям по другому.

На основе примера 1 легко проверить, что множество P парето-оптимальных решений задачи (19), (20) будет содержать всего две пары: $(x', y') = (5; 0{,}75)$ и $(x'', y'') = (6; 0{,}25)$ со значениями $\mu_D(x', y') = 0{,}5$ и $\mu_D(x'', y'') = 1$ соответственно. Они несравнимы, поскольку $0{,}75 = y' > y'' = 0{,}25$ и $0{,}5 = \mu_D(x', y') < < \mu_D(x'', y'') = 1$. Какую эффективную максимизирующую альтернативу выберет ЛПР ($x' = 5$ со значениями первичной $y' = 0{,}75$ и вторичной $\mu_D(x', y') = 0{,}5$ степеней принадлежности или $x'' = 6$ с $y'' = 0{,}25$ и $\mu_D(x'', y'') = 1$), зависит от того, что для него предпочтительнее (первичная или вторичная степень принадлежности НМТ-2 решений).

Отметим, что методы многокритериальной оптимизации достаточно хорошо изучены (особенно двухкритериальной). Они дают разнообразные возможности получить у ЛПР информацию о его предпочтении на множестве критериев (в рассматриваемом случае это предпочтение между первичной и вторичной степенями принадлежности НМТ-2 решений) и использовать ее для получения парето-оптимального решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нечеткие множества типа-2 моделируют бóльшую неопределенность, чем классические нечеткие множества. Однако сложность вычислений и теория НМТ-2 затрудняют их широкое практическое использование. В данной статье показано, что подход Bellman и Zadeh можно успешно применять к задачам принятия решений, заданным на НМТ-2.

Основное внимание в работе уделено обобщению понятия максимизирующей альтернативы в случае НМТ-2 решений. Предложена идея учитывать при выборе максимизирующей альтернативы требование получить как можно бóльшие значения как первичной степени принадлежности НМТ-2 решений, так и вторичной. Сформулирована задача выбора альтернатив по двум критериям: первичной и вторичной степеням принадлежности НМТ-2 решений. Ее парето-оптимальные решения названы эффективными максимизирующими альтернативами. Показано, что такие альтернативы имеют степени недоминируемости не менее их вторичных степеней принадлежности НМТ-2 решений.

Очевидным примером использования разработанного метода являются известные области применения задач принятия решений в случае того или иного типа неопределенности функций принадлежности нечетких множеств их параметров. Это, безусловно, расширяет область практического использования теории принятия решений в условиях нечеткой информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*. 1970. Vol. 17, N 4 P. B-141–B-164.
2. Carlsson C., Fuller R. Fuzzy reasoning in decision making and optimization. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. 338 p.
3. Lodwik W.A. Fuzzy optimization. Heidelberg: Springer, 2010. 530 p.
4. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 2. С. 88–99.
5. Mendel J. M., John R. I. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10, N 2. P. 117–124.
6. Zadeh L. A. Quantitative fuzzy semantics. *Inform. Sci*. 1971. Vol. 3, N 2. P. 159–176.
7. Bustince H., Barrenechea E., Pagola M., Fernandez J., Xu Z., Bedrega B., Montero J., Hagras H., Herrera F., De Baets B. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2016. Vol. 24, N 1. P. 179–194.
8. Mendel J.M., John R.I. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10, N 2. P. 117–127.
9. Karnik N.N., Mendel J.M. An introduction to type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 1998. Vol. 2. P. 915–920.
10. Harding J., Walker C., Walker E. The variety generated by the truth value algebra of T2FSs. *Fuzzy Sets and Systems*. 2010. Vol. 161, N 5. P. 735–749.
11. Aisbett J., Rickard J.T., Morgenthaler D.G. Type-2 fuzzy sets as functions on spaces. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2010. Vol. 18, N 4. P. 841–844.
12. Skalna I., Rebiasz B., Gaweł B., Basiura B., Duda J., Opiła J., Pełech-Pilichowski T. Advances in fuzzy decision making. Cham: Springer International Publishing, 2015. 151 p.

13. Mashchenko S.O. Generalization of Germeyer's criterion in the problem of decision making under the uncertainty conditions with the fuzzy set of the states of nature. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. Vol. 44, N 10. P. 26–34.
14. Mashchenko S.O., Bovsunivskyi O.M. Effective alternatives of decision making problems with the fuzzy set of preference relations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, N 11. P. 32–42.
15. Mashchenko S.O. A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 1. P. 62–68.
16. Mashchenko S.O., Al-Sammarraie Mohammed Saad Ibrahim. An optimization problem with a fuzzy set of fuzzy constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, N 8. P. 38–48.
17. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Москва: Наука, 1981. 208 с.

Надійшла до редакції 08.11.2018

С.О. Мащенко

МАКСИМІЗУВАЛЬНІ АЛЬТЕРНАТИВИ В ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З ЦІЛЬОВОЮ НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ТИПУ-2

Анотація. Підхід Белмана і Заде застосовується до задачі прийняття рішень, яку задано на нечіткій множині типу-2 (НМТ-2). Визначено НМТ-2 розв'язків. Для порівняння нечітких множин ступенів належності альтернатив використано розширення відношення природного порядку на клас нечітких множин. За цим відношенням переваги побудовано нечітку множину недомінованих альтернатив. Уведено поняття недомінованої альтернативи рівня α. Показано, що її можна одержати з оптимізаційної задачі, в якій максимізується первинний ступінь належності НМТ-2 розв'язків для обмеженого вторинного ступеня. Досліджено питання існування недомінованих альтернатив рівня $\alpha = 1$. Сформульовано задачу вибору альтернатив за двома критеріями (первинному і вторинному ступеням належності НМТ-2 розв'язків).

Ключові слова: нечітка множина, нечітка множина типу-2, нечітке математичне програмування, прийняття рішень.

S.O. Mashchenko

MAXIMIZING ALTERNATIVES TO THE DECISION-MAKING PROBLEM WITH A GOAL TYPE-2 FUZZY SET

Abstract. The Bellman and Zadeh approach is applied to the decision-making problem, which is defined on type-2 fuzzy sets (T2FSs). T2FS Solution is defined. An extension of the natural order ratio to the class of fuzzy sets is used for comparison of fuzzy sets of alternatives membership degrees. A fuzzy set of non-dominated alternatives is constructed by this preference relation. The notion of the α-level non-dominated alternative is introduced. It is shown that this is an optimization problem solution. In this problem, the primary membership degree of a T2FS solution is maximized with a constrained secondary degree. The existence of 1-level non-dominated alternatives is investigated. The problem of choosing alternatives by two criteria (the primary and secondary degrees of membership to the T2FS solution) is formulated.

Keywords: a fuzzy set, a type-2 fuzzy set, fuzzy mathematical programming, decision making.

Мащенко Сергей Олегович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: s.o.mashchenko@gmail.com.