УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА, Л.В. КОВАЛЬЧУК

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ УНИМОДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аннотация. Найдены точные оценки вероятностей попадания неотрицательных унимодальных случайных величин μ в интервал $(m-\sigma_\mu,\ m+\sigma_\mu)$ в случае, когда мода m совпадает с фиксированным первым моментом случайной величины μ, а σ_μ^2 есть дисперсия μ. Даны важные вспомогательные сведения о нахождении таких оценок с примерами, утверждениями и замечаниями, которые учитываются при получении основного результата. Данный результат может быть применен при расчете вероятности попадания снаряда в полосу при прицельной стрельбе.

Ключевые слова: линейные функционалы от унимодальных функций распределения и их экстремальные значения, преобразование Джонсона–Роджерса, точные обобщенные неравенства Чебышева для унимодальных функций распределения.

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные неравенства Чебышева являются актуальными и в настоящее время в связи с их применением к вопросам прицельной стрельбы, которая связана с высокой точностью оружия и небольшими отклонениями точки попадания снаряда от цели (мишени). Именно такими свойствами обладают унимодальные экстремальные функции распределения, которые дают сравнительно большую вероятность попадания в небольшой интервал. Исследования в этой области вызывают интерес, поэтому авторы дают компактно изложенную (и далеко не тривиальную) теорию получения точных оценок в обобщенных неравенствах Чебышева для функционалов от унимодальных функций распределения. На основании этой теории получен новый результат для вероятности попадания неотрицательных унимодальных случайных величин в интервал.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введем следующие обозначения: $\mu, \eta, \ldots$ — случайные величины; $F_\mu(x)$, $F_\eta(x)$, ... — функции распределения (ф.р.) случайных величин; $F(x)$ — произвольная функция распределения. Функционалы от этих ф.р. обозначим $I_i(F_\mu), I_i(F_\eta), \ldots, I(F)$. Конкретные ф.р., на которых достигаются точные оценки функционалов, обозначим $F_{\mu i}(x), F_{\eta i}(x), \ldots,\ i=1,2,\ldots$ Пусть случайная величина $\mu \geq 0$ имеет ф.р. $F_\mu(x)$, которая называется унимодальной (одновершинной), если существует точка $m \geq 0$ такая, что ф.р. $F_\mu(x)$ выпукла вниз или линейна для $x \leq m$ и выпукла вверх или линейна для $m \leq x$. Точка $m \geq 0$ называется модой ф.р. $F_\mu(x)$. Если ф.р. $F_\mu(x)$ унимодальна, то ее плотность имеет либо одну моду, либо один интервал мод. Пусть m есть единственная или одна из мод ф.р. $F_\mu(x)$. Пусть также $F_\mu(x)$ имеет плотность $f_\mu(x)$, т.е. представима в виде

$$F_\mu(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ \int\limits_0^x f_\mu(u)du,\ 0<x<m, \\ F_m+\int\limits_m^x f_\mu(u)du, x \geq m. \end{cases} \tag{1}$$

Плотность распределения $f_\mu(x)$ не убывает на отрезке $[0, m]$ и не возрастает на отрезке $[m, \infty]$, а F_m есть возможный скачок F_μ в точке m. Введем следующее ограничение:

$$f_\mu(0-) = 0 \text{ и } x^3 f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0. \quad (2)$$

Пусть $f_\mu(x)$ почти всюду дифференцируема за исключением двух или трех точек и, возможно, моды.

Обозначим A_r, $r = 1, 2$, класс унимодальных ф.р. $F_\mu(x)$ неотрицательных случайных величин с модой m и заданными моментами

$$\int_0^\infty x dF_\mu(x) = m_1, \ \ m_1 > 0; \ \int_0^\infty x^2 dF_\mu(x) = m_2, \ \ m_2 > m_1^2. \quad (3)$$

Если заданы мода и только один момент (первый или второй), то ф.р. принадлежит классу A_1. Если кроме моды заданы и первый, и второй моменты, то ф.р. принадлежит классу A_2. Обозначим $A = \{A_1 \cup A_2\}$.

Рассмотрим пример унимодальной функции распределения с интервалом мод. Пусть функция распределения $F_\mu(x)$ линейно изменяется от нуля до единицы в некотором интервале (a, b) и равна нулю левее точки a и единице правее точки b: $F_\mu(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$. Плотность такой случайной величины постоянна в интервале (a, b) и равна нулю вне его:

$$f_\mu(x) = \frac{1}{b-a}, \ \ x \in (a, b); \ \ f_\mu(x) = 0, \ \ x \notin (a, b).$$

В данном примере $f_\mu(x)$ возрастает в точке a: $f_\mu(a+0) - f_\mu(a-0) > 0$, и убывает в точке b: $f_\mu(b+0) - f_\mu(b-0) < 0$. В точке a определим $f_\mu(a) = f_\mu(a-0)$, а в точке b: $f_\mu(b) = f_\mu(b+0)$. Интервал (a, b) есть интервал мод, в котором $f_\mu(x)$ принимает постоянное значение $\dfrac{1}{(b-a)}$. Таким образом, в этом примере хорошо известную линейную ф.р. $F_\mu(x)$ можно рассматривать также как унимодальную функцию распределения с интервалом мод.

На таких линейных или кусочно-линейных ф.р. $F_\mu(x)$ достигаются экстремумы линейных функционалов от унимодальных ф.р. Соответствующие им экстремальные плотности $f_\mu(x)$ будут постоянными или кусочно-постоянными (см. в [1] и в разд. 5 настоящей статьи).

2. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОДНИМ ИЛИ ДВУМЯ ФИКСИРОВАННЫМИ МОМЕНТАМИ, НА КОТОРЫХ ДОСТИГАЮТСЯ ЭКСТРЕМУМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть K — множество ф.р. $F(x)$ с k фиксированными моментами. Ф.р. $F(x) \in K$ называется крайней точкой множества K, если ее невозможно представить в виде $F(x) = \frac{1}{2} F_1(x) + \frac{1}{2} F_2(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ разные ф.р. из K. Замыкание множества K обозначается $[K]$, которое представляет множество K вместе со своими предельными точками. Обозначим $I(F)$ линейный функционал от ф.р. $F(x)$:

$$I(F) = \int_0^\infty g(x) dF(x). \quad (4)$$

Справедлива следующая фундаментальная теорема [2].

Теорема 1. Пусть $g(x)$ — измеримая по Борелю функция, которая имеет конечные значения при всех конечных $x \geq 0$. Пусть также E — подмножество крайних точек множества K. Тогда инфимум или супремум линейного функционала $I(F)$ (см. (4)) по замыканию множества K равен инфимуму или супремуму по замыканию множества E:

$$\inf_{F \in [K]} I(F) = \inf_{F \in [E]} I(F).$$

Множество $[E]$ крайних точек множества $[K]$ состоит из ступенчатых ф.р. Если фиксировано k моментов, то число точек роста ф.р. из $[E]$ не превышает $(k+1)$. Интегралы в (4) являются интегралами Лебега–Стилтьеса.

Эта теорема была доказана для отдельных случаев до 1958 г. известными математиками. Однако при самых минимальных ограничениях на функцию $g(x)$ (как в одномерном, так и в многомерном случаях) теорема 1 была доказана в работе [2].

Если ф.р. имеет только один фиксированный момент, т.е. $F(x) \in K_1$, то крайними точками множества K_1 являются двухступенчатые ф.р. с точками роста x_1, x_2 и скачками в них p_1, p_2, для которых выполняются равенства

$$p_1 + p_2 = 1;\quad x_1 p_1 + x_2 p_2 = s_1,\quad p_1 = \frac{x_2 - s_1}{x_2 - x_1};\quad p_2 = \frac{s_1 - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{5}$$

Необходимым условием существования таких ф.р. из E_1 является неотрицательность скачков p_1, p_2, которая равносильна неравенствам $0 \le x_1 < s_1 < x_2 < \infty$. Кроме того, множеству E_1 принадлежит одноступенчатая ф.р. с одной точкой роста $x_1 = s_1$, $s_1 > 0$, и скачком в ней, равным единице.

Однако, как следует из теоремы 1, экстремум линейного функционала может достигаться не только на ф.р. из множества E_1, но и на предельных ф.р. из $[E_1]$, которые не принадлежат E_1. Такие ф.р. могут не сохранять первый момент. Для них можно найти соответствующую последовательность ф.р. из E_1, сохраняющих первый момент и на которых при предельном переходе вычисляется экстремум функционала. Например, если ф.р. имеет точки роста $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = n$, то для нее сохраняется первый момент и на ней может достигаться экстремум функционала при предельном переходе. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_2 = 0$ и предельной является ф.р. с одной точкой роста $x_1 = 0$ и скачком в ней $p_1 = 1$, для которой $s_1 = 0$. Например, наибольшее значение $\sup\limits_{F\in[K_1]} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = \sup\limits_{F\in[E_1]} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = 1$ вычисляется на ф.р. с точкой роста $x_1 = 0$ и скачком в ней $p_1 = 1$.

Если ф.р. имеет два фиксированых момента: s_1 и s_2, то $F(x) \in K_2$. Из теоремы 1 следует, что экстремум линейного функционала достигается на ф.р. из множества $[E_2]$ ступенчатых ф.р. с числом точек роста не более трех. Если ф.р. имеет три точки роста, то выполняются «моментные условия»:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1;\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = s_1;\ x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = s_2,$$

где

$$p_1 = \frac{(x_2 - B(x_3))(x_3 - s_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)};\ p_2 = \frac{(B(x_3) - x_1)(x_3 - s_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(s_1 - x_1)(x_3 - B(x_1))}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)};$$

$$p_3 = \frac{(s_1 - x_1)(B(x_1) - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{6}$$

(Отметим, что выражение для p_3 в [8] было записано неверно.) В (6) вводится функция

$$B(x) = \frac{s_2 - s_1 x}{s_1 - x};\ B(0) = \frac{s_2}{s_1}. \tag{7}$$

Если любая пара из трех точек x_1, x_2, x_3 связана соотношением (7), то такая двухточечная ф.р. принадлежит E_2, например $x_2 = B(x_1) \leftrightarrow x_1 = B(x_2)$. Если между двумя точками роста нет такой связи, то ф.р. принадлежит классу $[E_2]$ и не принадлежит классу E_2 (пример такой ф.р. дан в замечании 4).

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЖОНСОНА–РОДЖЕРСА

Преобразование Джонсона–Роджерса [3] имеет вид

$$F_\eta(x)=F_\mu(x)+(m-x)f_\mu(x). \tag{8}$$

Оно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом A унимодальных ф.р. $F_\mu(x)$ с модой m и k фиксированными моментами m_i и классом K^* ф.р. $F_\eta(x)$ с k фиксированными моментами s_i, которые вычисляются через моменты m_i и моду m ф.р. $F_\mu(x)$. Полное доказательство этого факта для более общих задач, чем рассматриваемые в этой статье, было дано Джонсоном и Роджерсом в [3].

Из (8) следует, что

$$dF_\eta(x)=(m-x)df_\mu(x). \tag{9}$$

Из (9) интегрированием по частям с использованием условия (2) находим моменты случайной величины η:

$$s_1=\int_0^\infty x dF_\eta(x)=2m_1-m, \tag{10}$$

$$s_2=\int_0^\infty x^2 dF_\eta(x)=3m_2-2mm_1. \tag{11}$$

В общем случае имеем

$$s_i=\int_0^\infty x^i dF_\eta(x)=(i+1)\,m_i-imm_{i-1},\ i=\overline{1,k},\ s_0=1. \tag{12}$$

Обозначим K_i^*, $i=1,2$, классы функций распределения $F_\eta(x)$, связанных с унимодальной ф.р. $F_\mu(x)$ с помощью преобразований (8), (9) с моментами (10)–(12). Если задан только один момент (первый или второй), то ф.р. принадлежит классу K_1^*, если заданы и первый, и второй моменты, то ф.р. принадлежит классу K_2^*. Продолжением моментов в классе K_2^* определяется продолжение моментов в классе A_2. Так, чтобы класс K_2^* был не пустым или не вырожденным (т.е. не содержал единственную ф.р.), необходимо выполнение неравенств $s_1>0,\ s_2>s_1^2$. Отсюда следуют неравенства в классе A_2 : $m_1>\frac{m}{2}>0$, $3m_2-2mm_1>(2m_1-m)^2$.

С помощью преобразований (8) и (9), интегрируя по частям и учитывая (1), (2), можно найти линейные функционалы от ф.р. $F_\eta(x)$, тождественно равные соответствующим линейным функционалам от $F_\mu(x)$ таким, как, например, $P\{\mu>t\}$, $P\{u<\mu<v\}$, $P\{\mu<t\}$ и т.д. Рассмотрим пример.

Утверждение 1. Обозначим $I_1(F_\mu)=P\{u<\mu<v\}=\int_u^v dF_\mu(x)$. Если $m\in(u,v)$, то

$$I_1(F_\mu)=\int_0^\infty g(x)dF_\eta(x)=I_1(F_\eta),$$

где

$$g(x)=\frac{m-u}{m-x} \text{ при } 0\le x\le u;$$

$$g(x)=1 \text{ при } u\le x\le v;$$

$$g(x)=\frac{v-m}{x-m} \text{ при } v\le x<\infty.$$

Доказательство. Из (8) следует

$$F_\eta(v)-F_\eta(u)=F_\mu(v)-F_\mu(u)+(m-v)f_\mu(v)-(m-u)f_\mu(u)=$$

$$=I_1(F_\mu)+(m-v)\int_v^\infty df_\mu(x)-(m-u)\int_0^u df_\mu(x).$$

С помощью (9) получаем необходимое равенство

$$I_1(F_\mu) = \int_0^u \frac{m-u}{m-x} dF_\eta(x) + \int_u^v dF_\eta(x) + \int_v^\infty \frac{v-m}{x-m} dF_\eta(x) = I_1(F_\eta). \qquad (13)$$

Замечание 1. Так как ф.р. $F_\eta(x) \in K_i$ * имеет фиксированным только один или два момента, то из теоремы 1 следует, что супремум или инфимум функционала $I(F_\eta)$ достигается на ступенчатых ф.р. из класса $[E_1]$ или класса $[E_2]$, т.е.

$$\sup_{F_\eta \in [K_i^*]} I(F_\eta) = \sup_{F_\eta \in [E_i]} I(F_\eta),\ i = 1, 2. \qquad (14)$$

Из (14) и (9) легко увидеть структуру крайних точек множеств A_i, на которых достигается экстремум линейных функционалов от унимодальных ф.р. А именно, экстремальной ф.р. F_η, которая является ступенчатой ф.р. с точками роста x_i, $i \le 3$, соответствует единственная постоянная или кусочно-постоянная плотность f_μ со скачками в точках роста ф.р. F_η и, возможно, в моде. Если мода совпадает с одной из точек роста ф.р. F_η, то соответствующая ей ф.р. F_μ имеет в моде скачок, а плотность f_μ имеет δ-функцию Дирака (см., например, [4]).

Замечание 1 фактически определяет следующий алгоритм нахождения экстремумов линейных функционалов $I(F_\mu)$, $F_\mu \in A$: 1) с помощью преобразований (8), (9) находим функционалы $I(F_\eta)$, $F_\eta \in K_i^*$, тождественно равные функционалам $I(F_\mu)$; 2) решаем задачу нахождения экстремума функционала $I(F_\eta)$ в классах $F_\eta \in \{[E_1] \cup [E_2]\}$ (теорема 1) с моментами (10), (11) с помощью теоремы 2, приведенной ниже.

4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ НЕКОТОРОЙ Ф.Р. В ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ ИНФИМУМА ИЛИ СУПРЕМУМА ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА $I(F)$

Второй фундаментальной теоремой является теорема 2, формулировка и доказательство которой дано в [1]. Эта теорема также была доказана в [5] для непрерывных функций $g(x)$ в общем случае, когда фиксировано любое конечное число моментов ф.р. $F_0(x)$. Сформулируем эту теорему для случаев одного или двух фиксированных моментов.

Теорема 2. Пусть $F \in K$, $K = \{K_1 \cup K_2\}$. Для того чтобы инфимум (супремум) функционала $I(F)$ достигался на некоторой ф.р. $F_0(x) \in [E]$, $[E] = \{[E_1] \cup [E_2]\}$, с числом точек роста не более трех, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен $U_0(x)$ не выше второй степени со свойствами:

1) $U_0(x_i) = g(x_i)$, $i \le 3$,
2) $\forall x \ge 0$: $U_0(x) \le g(x)$ (для инфимума),
3) $\forall x \ge 0$: $U_0(x) \ge g(x)$ (для супремума).

Теорема 2 в рассматриваемом классе K была обобщена в [6] на случай кусочно-непрерывных ограниченных функций $g(x)$.

Сформулируем утверждение, вытекающее из теоремы 2 при дополнительных ограничениях на функцию $g(x)$, которое часто применяется при доказательстве неравенств 2 или 3 теоремы 2. Обозначим $\varphi_0(x) = g(x) - U_0(x)$ и запишем теорему 2 в этом обозначении:

1) $\varphi_0(x_i) = 0$,
2) $\forall x \ge 0$: $\varphi_0(x) \ge 0$ (для инфимума), (15)
3) $\forall x \ge 0$: $\varphi_0(x) \le 0$ (для супремума).

Утверждение 2. Если точка $x = x_0$, $x_0 > \delta > 0$, является одной из точек роста ф.р. $F_0(x)$, на которой достигается инфимум (супремум) функционала $I(F)$, и функция $g(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности Δ точки x_0, $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то выполняются следующие соотношения:

$$\varphi_0(x_0) = 0,\ \varphi_0'(x_0) = 0,\ \varphi_0''(x_0) > 0\ (\varphi_0''(x_0) < 0). \qquad (16)$$

Последнее неравенство в скобках относится к супремуму в утверждении 2.

Доказательство. Из первого условия теоремы 2 (см. (15)) непосредственно следует выполнение равенства $\varphi_0(x_0)=0$. Докажем, что $\varphi_0'(x_0)=0$. Из дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x_0 следует, что $\varphi(x)$ также дифференцируема в этой точке. Из второго условия теоремы 2 вытекает $\varphi_0(x_0-\delta)>0$ и $\varphi_0(x_0+\delta)>0$. Из этих неравенств, а также равенства $\varphi_0(x_0)=0$ и из определения производной находим

$$\varphi_0'(x_0-\delta)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi_0(x_0)-\varphi_0(x_0-\delta)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{-\varphi_0(x_0-\delta)}{\delta}<0\,,$$

$$\varphi_0'(x_0+\delta)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi_0(x_0+\delta)-\varphi_0(x_0)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi_0(x_0+\delta)}{\delta}>0\,.$$

Из последних двух неравенств следует, что в сколь угодно малой окрестности точки x_0 производная $\varphi'(x)$ меняет знак – на знак +, что равносильно $\varphi_0'(x)=0,\ \varphi_0''(x)>0.$ Неравенство в скобках в (16) доказывается симметричным способом с использованием условия 3 теоремы 2.

Замечание 2. Если выполняются условия (16) утверждения 2, то в теореме 2 условие 1 заменяется более информативным условием (16). Это позволяет записать многочлен $U_0(x)$, соответствующий ф.р. $F_0(x)\in K_2$, по формуле Тейлора: $U_0(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+a_0(x-x_0)^2$, что упрощает его дальнейшее исследование и доказательство выполнения условия 2 или 3 теоремы 2.

Замечание 3. Теорема 2 дает наглядную геометрическую интерпретацию для поиска экстремальных ф.р. Из нее следует, что для $F(x)\in[E_1]$ соответствующие многочлены $U(x)$ есть класс прямых, а для $F(x)\in[E_2]$ — класс парабол или прямых, но с возможной потерей части второго момента (соответствующий пример дан ниже в замечании 4).

5. ТОЧНЫЕ НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ УНИМОДАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕРВАЛ ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ФИКСИРОВАНЫ ЕЕ МОДА И ДВА ПЕРВЫХ МОМЕНТА

Задача 1. Пусть $\mu\ge 0$ — случайная величина с унимодальной ф.р. $F_\mu(x)$ с модой $m>0$ и моментами $\int_0^\infty x dF_\mu(x)=m_1$ и $\int_0^\infty x^2 dF_\mu(x)=m_2$. Пусть

$$m=m_1>0\,. \tag{17}$$

Требуется найти точные наименьшие значения (инфимумы) вероятности

$$P\{m_1-\sigma_\mu<\mu<m_1+\sigma_\mu\}=\int_{m_1-\sigma_\mu}^{m_1+\sigma_\mu} dF_\mu(x)=I_2(F_\mu)\,, \tag{18}$$

где

$$\sigma_\mu^2=m_2-m_1^2,\ m_1>\sigma_\mu,$$

и ф.р. $F_\mu(x)$, на которых они достигаются.

Переход от задачи 1 к эквивалентной задаче 2. С помощью преобразования Джонсона–Роджерса (см. (8), (9)) перейдем от случайной величины μ к случайной величине η. Вначале определим моменты случайной величины η. Из ограничения (17) и формул (10), (11) следует

$$s_1=\int_0^\infty x dF_\eta(x)=m_1=m\,, \tag{19}$$

$$s_2=\int_0^\infty x^2 dF_\eta(x)=3m_2-2mm_1=3m_2-2m_1^2. \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает

$$\sigma_\eta^2 = s_2 - s_1^2 = 3m_2 - 3m_1^2 = 3\sigma_\mu^2. \tag{21}$$

Далее определим функционал $I_2(F_\eta)$, равный исходному функционалу $I_2(F_\mu)$. Для этого можно воспользоваться доказанным утверждением 1, где

$$g(x) = \frac{m-u}{m-x},\ \ 0 \le x \le u;\ \ g(x) = 1,\ u \le x \le v;\ \ g(x) = \frac{v-m}{x-m},\ v \le x < \infty.$$

Для задачи 1 в функционале (18) $u = m_1 - \sigma_\mu$ и $v = m_1 + \sigma_\mu$. Для задачи 2 эти величины преобразуются к виду $u = s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}$, $v = s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}$, а функция $g(x)$ преобразуется к виду

$$g(x) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}(s_1 - x)},\ 0 \le x \le s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};\ \ g(x) = 1,\ \ s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \le x \le s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}\ ;$$

$$g(x) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}(x - s_1)},\ \ x \ge s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}. \tag{22}$$

Сформулируем теперь задачу 2, эквивалентную задаче 1.

Задача 2. Найти минимальное значение линейного функционала

$$I_2(F_\eta) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \int_0^{s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}} \frac{dF_\eta(x)}{s_1 - x} + \int_{s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}}^{s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}} dF_\eta(x) + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \int_{s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{dF_\eta(x)}{x - s_1} = \int_0^\infty g(x) dF_\eta(x)$$

в классе $F_\eta \in [K_2]$, где

$$s_1 = m_1 = m,\ \ s_1 \ge \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};\ \ s_2 = \sigma_\eta^2 + s_1^2;\ \sigma_\eta^2 = 3\sigma_\mu^2.$$

Решение задачи 2. Параметрами задачи 2 являются моменты s_1 и s_2. Без ограничения общности при решении задачи будем считать σ_η постоянной величиной, а первый момент будет изменяться относительно σ_η. Для удобства написания обозначим $\sigma_\eta = \sigma$ и $B(0) = B$. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. 1. Если область параметров s_1 и σ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \sigma \le s_1 < \infty\ , \tag{23}$$

то минимум функционала $I_2(F_\eta)$ достигается на ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ с точками роста $x_1 = s_1 - \sigma,\ x_2 = s_1 + \sigma$ и скачками в них $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Этот минимум постоянен во всей области (23) и равен

$$I_2(F_{\eta 1}) = [g(x_1) + g(x_2)]\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{24}$$

2. Если область параметров s_1 и σ удовлетворяет неравенствам

$$(\sqrt{2} - 1)\sigma^2 \le s_1^2 \le \sigma^2, \tag{25}$$

то минимум функционала $I_2(F_\eta)$ достигается на ф.р. $F_{\eta 2}(x)$ с точками роста $x_1 = 0,\ \ x_2 = \frac{s_2}{s_1}$ и скачками в них соответственно $p_1 = \frac{\sigma^2}{s_2},\ p_2 = \frac{s_1^2}{s_2}$. Этот минимум зависит от параметров s_1 и σ и равен

$$I_2(F_{\eta 2}) = g(0)p_1 + g(B)p_2 = \frac{\sigma^4 + s_1^4}{s_1 s_2 \sigma\sqrt{3}},\ \ s_2 = \sigma^2 + s_1^2. \tag{26}$$

3. Если область параметров s_1 и σ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \frac{\sigma^2}{3} \le s_1^2 \le (\sqrt{2}-1)\sigma^2, \tag{27}$$

то инфимум функционала $I_2(F_\eta)$ вычисляется на ф.р. $F_{\eta 3} \in [E_2]$ с точками роста $x_1 = 0, x_2 = s_1(2+\sqrt{2}) = z_0$ и скачками в них $p_1 = \frac{z_0 - s_1}{z_0}$, $p_2 = \frac{s_1}{z_0}$. Инфимум равен

$$I_2(F_{\eta 3}) = g(0)p_1 + g(z_0)p_2 = \frac{2\sigma(\sqrt{2}-1)}{s_1\sqrt{3}} = \frac{2\sigma}{(z_0 - s_1)\sqrt{3}}. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 3. Исследуем функцию $g(x)$ в формуле (22) для $I_2(F_\eta)$:

$$g(x) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}(s_1 - x)},\ 0 \le x \le s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};\quad g(x) = 1,\ s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \le x \le s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};$$

$$g(x) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}(x - s_1)},\ x \ge s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};$$

$$g'(x) = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}(s_1 - x)^2},\ 0 \le x \le s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};\quad g'(x) = 0,\ s_1 - \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}} \le x \le s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};$$

$$g'(x) = \frac{-\sigma_\eta}{\sqrt{3}(x - s_1)^2},\ x \ge s_1 + \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{3}};\ \forall x \ge 0: g''(x) \ge 0. \tag{29}$$

Докажем, что на ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ достигается минимум функционала $I_2(F_\eta)$ в области (23). Многочлен $U_1(x)$, соответствующий ф.р. $F_{\eta 1}(x)$, можно записать двумя разными формулами (см. утверждение 2):

$$U_1(x) = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1) + a_1(x - x_1)^2;$$

$$U_1(x) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2) + a_1(x - x_2)^2.$$

Далее, из (29) следует $g(x_1) = g(x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $g'(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{3}}$; $g'(x_2) = \frac{-1}{\sigma\sqrt{3}}$.
С учетом этих вычислений приравняем обе формулы для $U_1(x)$ и из полученного уравнения найдем

$$a_1 = -\frac{1}{\sigma^2 2\sqrt{3}}. \tag{30}$$

Таким образом, многочлен $U_1(x)$ определен и удовлетворяет условию 1 теоремы 2.

Докажем, что выполняется также и второе условие теоремы 2, т.е. что $U_1(x) \le g(x)$ для всех $x \ge 0$. Обозначим $\varphi_1(x) = g(x) - U_1(x)$ и докажем, что $\forall x \ge 0: \varphi_1(x) \ge 0$. Для $x \in \left[0, s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$ выполняются равенства $\varphi_1(x_1) = \varphi_1'(x_1) = 0$ и неравенство $\varphi_1''(x) > 0$. Отсюда следует, что для всех x из рассматриваемого интервала выполняется требуемое неравенство. Аналогично доказывается, что $\varphi_1(x) \ge 0$ для всех $x \ge s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$. Остается доказать, что $\varphi_1(x) \ge 0$ для всех $x \in \left[s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}},\ s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$. Для этого найдем точку x_0 максимума $U_1(x)$ и покажем, что $U_1(x_0) < 1$. Действительно, $x_0 = s_1$ и $U_1(s_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Таким образом, доказано, что $\forall x \ge 0$: $\varphi_1(x) \ge 0$. Согласно теореме 2 на ф.р. $F_{\eta 1}(x)$ достигается минимум функционала $I_2(F_\eta)$ в области (23).

Далее докажем вторую часть теоремы 3, т.е. что в области параметров s_1 и σ (25) минимум функционала $I_2(F_\eta)$ достигается на ф.р. $F_{\eta 2}(x)$. Построим многочлен $U_2(x)$, соответствующий ф.р. $F_{\eta 2}(x)$. Можно непосредственно проверить, что из $s_1 < \sigma$ следует $x_2 = B > s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$. Для многочлена $U_2(x)$ необходимо выполнение условий $U_2(0) = g(0)$, $U_2(B) = g(B)$, $U_2'(B) = g'(B)$, так как $g(x)$ дифференцируема при $x > s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ (см. утверждение 2). Поэтому $U_2(x)$ можно записать по формуле Тейлора:

$$U_2(x) = g(B) + g'(B)(x-B) + a_2(x-B)^2 \to U_2'(x) = g'(B) + 2a_2(x-B). \quad (31)$$

Из условия $U_2(0) = g(0)$ и формулы (31) находим коэффициент a_2:

$$a_2 = \frac{s_1(2\sigma^4 - s_2^2)}{s_2^2 \sigma^3 \sqrt{3}}. \quad (32)$$

Из (32) следует $a_2 = 0 \leftrightarrow 2\sigma^4 = s_2^2 \leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\sigma^2 = s_1^2$; $a_2 \le 0 \leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\sigma^2 \le s_1^2 \le$ $\le \sigma^2$. Таким образом, получаем область (25), в которой $U_2''(x) < 0$. Многочлен $U_2(x)$ полностью определен.

Обозначим $\varphi_2(x) = g(x) - U_2(x)$ и докажем, что $\forall x \ge 0$: $\varphi_2(x) \ge 0$. Пусть $x \in \left[0, s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$. Вычислим и оценим $\varphi_2'(0)$ из формул (31) и (32) и исходя из того, что в области (25) выполняются условия $s_1 < \sigma \leftrightarrow s_1^2 < \sigma^2 \leftrightarrow s_2 - 2s_1^2 > 0$:

$$\varphi_2'(0) = g'(0) - U_2'(0) = \frac{\sigma}{s_1^2\sqrt{3}} - g'(B) + 2a_2 B = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{s_1^2}{\sigma^4}\right) + 2a_2 B =$$

$$= \frac{\sigma^4 + s_1^4}{s_1^2 \sigma^3 \sqrt{3}} + 2a_2 B;$$

$$\varphi_2'(0) > \frac{2s_1^2}{\sigma^3\sqrt{3}} - \frac{2(s_2^2 - 2\sigma^4)}{s_2\sigma^3\sqrt{3}} = \frac{2(s_2 - 2s_1^2)}{\sigma s_2 \sqrt{3}} > 0.$$

Для интервала $\left[0, s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$ имеем $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) > 0$, $\varphi_2''(x) > 0$, что обеспечивает $\varphi_2(x) \ge 0$ для всех x из указанного интервала. Для $\forall x > s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ справедливо $\{\varphi_2(B) = 0,\ \varphi_2'(B) = 0,\ \varphi_2''(B) > 0\} \to \varphi_2(x) \ge 0$.

Остается доказать, что $\varphi_2(x) \ge 0$ для всех $x \in \left[s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$. Учитывая (32), а также что $U_2''(x) < 0$ для всех $x \in \left[s_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, s_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right]$, находим точку x_{02} максимума многочлена $U_2(x)$ из уравнения $g'(B) + 2a_2(x_{02} - B) = 0 \leftrightarrow x_{02} - B = -\frac{g'(B)}{2a_2}$.

Найдем значение $U_2(x_{02})=g(B)-\dfrac{(g'(B))^2}{4a_2}$. Для этого область параметров (см. (25)) разобьем на две подобласти: $U_2'(0)<0 \leftrightarrow g'(B)<2a_2B$ и $U_2'(0)>0 \leftrightarrow g'(B)>2a_2B$. Границу между ними можно вычислить из уравнения $g'(B)=2a_2B \leftrightarrow s_1^4+3\sigma^2 s_1^2-2\sigma^4=0.$ Замена $s_1^2=z$ приводит к уравнению $z^2+3\sigma^2 z-2\sigma^4=0$, которое имеет единственное положительное решение: $z=\dfrac{-3\sigma^2}{2}+\dfrac{\sqrt{17}\sigma^2}{2} \leftrightarrow s_1^2=0{,}56\,\sigma^2$. Таким образом, первая подобласть эквивалентна $(\sqrt{2}-1)\sigma^2 \le s_1^2 \le 0{,}56\,\sigma^2$, а вторая подобласть эквивалентна $0{,}56\,\sigma^2 \le s_1^2 \le \sigma^2$. Поскольку $U_2''(x)<0$ для всех $x\ge 0$, то в первой подобласти $x_{02}=0$ и $U_2(x_{02})=U_2(0)=g(0)=\dfrac{\sigma}{s_1\sqrt{3}}<g\left(s_1-\dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}\right)=1$, так как $g(x)$ возрастает от $g(0)$ до $g\left(s_1-\dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}\right)=1$. Во второй подобласти $0{,}56\sigma^2<s_1^2<\sigma^2$ при наибольшем значении $s_1=\sigma$ можно получить точное наибольшее значение многочлена $U_2(x_{02})=g(B)-\dfrac{(g'(B))^2}{4a_2}$, которое равно $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$.

В остальных случаях во второй подобласти используем неравенство $g'(B)>2a_2B$:

$$U_2(x_{02})=g(B)-\frac{(g'(B))^2}{4a_2}<\frac{s_1}{\sqrt{3}\sigma}-\frac{g'(B)B}{2}=\frac{s_1}{\sqrt{3}\sigma}\left(\frac{3\sigma^2+s_1^2}{2\sigma^2}\right),$$

из которого следует, что $U_2(x_{02})$ уменьшается с уменьшением s_1, т.е. остается меньшим единицы.

Наконец, докажем третью часть теоремы 3, т.е. что в области параметров s_1 и σ (27) наименьшее значение функционала $I_2(F_\eta)$ (инфимум) вычисляется на ф.р. $F_{\eta 3}(x)\in[E_2]$ с точками роста $x_1=0, x_2=z_0$, где $z_0=s_1(2+\sqrt{2})$. Построим многочлен $U_3(x)$, соответствующий ф.р. $F_{\eta 3}$. Легко проверить, что из (27), в частности из $s_1>\dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}$, следует $z_0>s_1+\dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}$, т.е. функция $g(x)$ дифференцируема в точке z_0. Для многочлена $U_3(x)$ необходимо выполнение условий $U_3(0)=g(0), U_3(z_0)=g(z_0), U_3'(z_0)=g'(z_0)$. Его можно записать по формуле Тейлора: $U_3(x)=g(z_0)+g'(z_0)(x-z_0)$. Многочлен представляет прямую, проходящую через точки $(0,g(0))$, $(z_0,g(z_0))$ и касающуюся функции $g(x)$ в точке z_0. Для нахождения точки z_0 имеем уравнение $U_3'(z_0)=\dfrac{U_3(z_0)-U_3(0)}{z_0}$, из которого получаем $z_0=s_1(2+\sqrt{2})$. Выполнение второго условия теоремы 2, т.е. $\forall x\ge 0: U_3(x)\le g(x)$, не вызывает сомнений. Следовательно, согласно теореме 2 на ф.р. $F_{\eta 3}(x)$ вычисляется инфимум функционала $I_2(F_\eta)$ в области (27). Следовательно, третья часть теоремы 3, а значит, и вся теорема 3, доказана полностью.

Замечание 4. Отметим одну особенность ф.р. $F_{\eta 3}(x)$. Она имеет две точки роста: $x_1=0, x_2=z_0$ и скачки в них $p_1=\dfrac{z_0-s_1}{z_0}$, $p_2=\dfrac{s_1}{z_0}$, которые сохраняют первый момент, но не сохраняют второго. Действительно, $z_0p_2=s_1; z_0^2p_2=z_0s_1\ne s_2$. Поэтому ф.р. $F_{\eta 3}(x)\notin E_2$ является предельной точкой множества E_2, т.е. принадлежит $[E_2]$. Построим «допредельную» ф.р. $F_{3n}(x)$, которая принадлежит множеству E_2, т.е. сохраняет первый и второй моменты ф.р. и при $n\to\infty$:

$F_{3n}(x) \to F_{\eta 3}(x)$ и $I_2(F_{3n}) \to I_2(F_{\eta 3})$. Определим точки роста ф.р. $F_{3n}(x)$ следующим образом: $x_1 = 0, x_2 = x_{2n}, x_3 = n$. Чтобы скачки в этих точках роста были неотрицательными, необходимо выполнение условий $0 < B(n) < s_1 < x_{2n} < B(0) < n$. Поскольку точка x_{2n} находится в конечных границах, не зависящих от n, то и предел x_{2n} при $n \to \infty$ будет конечным. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = x_2$, $s_1 < x_2 < B(0) < n$. Далее, используя формулы (6), вычисляем второй момент ф.р. $F_{3n}(x)$: $s_{2n} = x_1^2 p_{1n} + x_{2n}^2 p_{2n} + n^2 p_{3n} = \dfrac{x_{2n}^2 (n - B(0)) s_1}{(n - x_{2n}) x_{2n}} + \dfrac{n^2 (B(0) - x_{2n}) s_1}{(n - x_{2n}) n}$. Перейдем к пределу $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = x_2 s_1 + (B(0) - x_2) s_1 = s_2$. Найдем многочлен $U_{3n}(x)$, соответствующий ф.р. $F_{3n}(x)$. Необходимо, чтобы были выполнены условия теоремы 2: $U_{3n}(0) = g(0), U_{3n}(x_2) = g(x_2)$, $U_{3n}(n) = g(n)$, $U'_{3n}(x_2) = g'(x_2)$. Поэтому многочлен запишем по формуле Тейлора: $U_{3n}(x) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2) + {}$ $+ a_{3n}(x - x_2)^2$. Коэффициент a_{3n} находим из условия $U_{3n}(n) = g(n) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow a_{3n}(n - x_2)^2 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}} \left(\dfrac{1}{n - s_1} - \dfrac{1}{x_2 - s_1} + \dfrac{n - x_2}{(x_2 - s_1)^2} \right)$. Из последнего равенства следует $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} U_{3n}(x) = U_3(x) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2)$. Точку x_2 в многочлене $U_3(x)$ находим из условия $U_{3n}(0) = U_3(0) = g(0)$, что эквивалентно $g'(x_2) = \dfrac{g(x_2) - g(0)}{x_2} \leftrightarrow x_2 = s_1(2 + \sqrt{2}) = z_0$, $z_0 < B(0)$, и точка z_0 уменьшается с уменьшением s_1. Отсюда следует $\lim\limits_{n\to\infty} F_{3n}(x) = F_{\eta 3}(x)$. Однако сходимость вторых моментов нарушается. Для ф.р. F_{3n} второй момент $s_{2n} \to s_2$, а для ф.р. $F_{\eta 3}$ второй момент $z_0^2 p_2 = z_0 s_1$. Масса на бесконечности [1], равная $s_2 - s_1 z_0$, компенсирует ту часть второго момента, которая теряется при предельном переходе.

Замечание 5. Перейдем от экстремальных ф.р. $F_{\eta 1}$, $F_{\eta 2}$, $F_{\eta 3}$ к соответствующим экстремальным ф.р. $F_{\mu 1}, F_{\mu 2}, F_{\mu 3}$, доставляющих инфимум функционалу $I_2(F_\mu)$, который равен инфимуму функционала $I_2(F_\eta)$ (см. (24), (26), (28)). Переход осуществляется с помощью формул (1), (2), (8), (9) и замечания 1:

$$F_{\mu 1}(x) = \left\{ \frac{x - m + \sqrt{3}\sigma_\mu}{2\sqrt{3}\sigma_\mu}, x \in (m - \sqrt{3}\sigma_\mu, m + \sqrt{3}\sigma_\mu) \right\}; \; F_{\mu 2}(x) = \left\{ \frac{x p_1}{m}, x \in (0, m) \right\},$$

$$F_{\mu 2}(x) = \left\{ p_1 + \frac{(x - m) p_2}{B - m}, x \in (m, B) \right\}; \; F_{\mu 3}(x) = \left\{ \frac{x p_1}{m}, x \in (0, m) \right\},$$

$$F_{\mu 3}(x) = \left\{ p_1 + \frac{(x - m) p_2}{z_0 - m}, x \in (m, z_0) \right\},$$

где для $F_{\mu 2}(x)$ значения p_1, p_2, B те же, что и у $F_{\eta 2}(x)$, а для $F_{\mu 3}(x)$ значения p_1, p_2, z_0 те же, что и у $F_{\eta 3}(x)$.

Замечание 6. Поскольку функция $g(x)$ в функционале $I_2(F_\eta)$ непрерывна, то на границе между областями (23) и (25) (т.е. при условии $\sigma = s_1$) справедливы равенства

$$F_{\eta 1}(x) = F_{\eta 2}(x); \; I_2(F_{\eta 1}) = I_2(F_{\eta 2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

На второй границе между областями (25), (27) (т.е. при условии $s_1^2 = (\sqrt{2} - 1)\sigma^2$) справедливы равенства

$$F_{\eta 2}(x) = F_{\eta 3}(x), \; z_0 = B(0), \; I_2(F_{\eta 2}) = I_2(F_{\eta 3}) = \frac{2 s_1}{\sigma\sqrt{3}}.$$

На последней (третьей) границе $s_1 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}$ имеем $I_2(F_{\eta 3}) = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8$. Таким образом, минимальное значение функционала $I_2(F_\eta) = I_2(F_\mu)$ возрастает от $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$ (при $s_1 = \sigma$) до 0,8 (при $s_1 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{3}}$).

Рассмотрим пример решения учебной задачи, приведенный в книге [9]. Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы (мост, автострада, взлетно-посадочная полоса). Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, составляет 16 м. Найти вероятность p попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий при трех выстрелах: A — хотя бы одно попадание в полосу; B — не менее двух попаданий в полосу.

Эта задача решена в [9] при условии, что ошибки попадания снаряда распределены по нормальному закону. Получено $p \approx 0{,}468$; $P(A) = 1-(1-p)^3 = 0{,}849$; $P(B) = 1-(1-p)^3 - 3p(1-p)^2 = 0{,}452$.

Для наглядности сделаем несколько расчетов для $m = 10$ (средняя точка полосы) с использованием теоремы 3.

Первая область параметров в теореме 3 представляет $0 < \sigma \le s_1 \leftrightarrow 0 < \sigma_\mu \le \le \dfrac{m}{\sqrt{3}}$. Согласно теореме 3 при любых значениях параметров, удовлетворяющих этой области, минимальная вероятность попасть в интервал $(m-\sigma_\mu, m+\sigma_\mu)$ равна $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57735$. Поэтому при $m = 10$ имеем область для σ_μ: $0 < \sigma_\mu < \dfrac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}7735$, которая не вписывается в задачу [9] (где σ_μ=16) ввиду условий $m > \sigma_\mu$ и $\mu \ge 0$. Возможно, из-за этих ограничений имеем большую вероятность попадания $P(A) \approx 0{,}9245$; $P(B) \approx 0{,}615$.

Далее рассмотрим третью область: $\dfrac{\sigma^2}{3} \le s_1^2 \le (\sqrt{2}-1)\sigma^2$, которая эквивалентна $\sigma_\mu < m \le \sqrt{3 \times 0{,}4142}\,\sigma_\mu \leftrightarrow 8{,}97 \le \sigma_\mu \le 10$. Как следует из теоремы 3, в этом случае наименьшая вероятность попасть в интервал $(m-\sigma_\mu,\ m+\sigma_\mu)$ достигает наибольшего значения при $\sigma_\mu \to m$ и равна приблизительно 0,8. В этом случае $P(A) \approx 0{,}992$; $P(B) \approx 0{,}896$.

Таким образом, теорема 3 дает возможность рассчитать наименьшую вероятность попадания в полосу при неизвестном унимодальном законе распределения ошибок, но при известных двух его моментах и моде, равной первому моменту. Из расчетов видно, что в более широком классе ф.р., но в более узком интервале ошибок может быть достигнута достаточно высокая вероятность поражения цели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье найдены точные наименьшие оценки вероятности попадания неотрицательной унимодальной случайной величины в интервал $(m-\sigma_\mu, m+\sigma_\mu)$ при условии, что мода совпадает с первым моментом. Эти оценки колебались в зависимости от параметров m и σ_μ от 0,57735 до 0,8 (неравенство Чебышева, например, дает нулевую оценку). Как показали некоторые гипотетические расчеты в разд. 5, управляя параметрами задачи, можно достичь достаточно высоких показателей попадания в этот интервал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва: Наука, 1976. 568 с.
2. Mulholland H.P., Rogers C.A. Representation theorems for distribution functions. *Proc. London Math. Soc.* 1958. Vol. 8, N 3. P. 177–223.
3. Johnson N.L., Rogers C.A. The moment problem for unimodal distribution. *Ann. Math. Stat*. 1951. Vol. 22. P. 433–439.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Москва: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 551 с.
6. Стойкова Л.С. Необходимое и достаточное условие экстремума интеграла Лебега–Стилтьеса в классе распределений. *Кибернетика*. 1990. № 1. С. 72–75.
7. Стойкова Л.С. Обобщенные неравенства Чебышева и их применение в математической теории надежности. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 3. С. 139–143.
8. Стойкова Л.С. Наибольшая точная нижняя граница вероятности отказа системы в специальном интервале времени при неполной информации о функции распределения времени до отказа системы. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 2. С. 65–73.
9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1973. 365 с.

Надійшла до редакції 10.06.2019

Л.С. Стойкова, Л.В. Ковальчук

ТОЧНІ ОЦІНКИ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД УНІМОДАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ПРИ НЕПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ

Анотація. Знайдено точні оцінки ймовірностей попадання невід'ємних унімодальних випадкових величин μ в інтервал $(m-\sigma_\mu, m+\sigma_\mu)$, де мода m збігається з фіксованим першим моментом величини μ, а σ_μ^2 є дисперсією μ. Наведено допоміжні відомості про знаходження таких оцінок із прикладами, твердженнями, зауваженнями, що були використані для отримання основного результату. Цей результат можна застосувати для оцінювання ймовірності попадання снаряду в смугу під час прицільної стрільби.

Ключові слова: лінійні функціонали від унімодальних функцій розподілу та їх екстремальні значення, перетворення Джонсона–Роджерса, точні узагальнені нерівності Чебишова для унімодальних функцій розподілу.

L.S. Stoikova, L.V. Kovalchuk

EXACT ESTIMATIONS FOR SOME LINEAR FUNCTIONALS OF UNIMODAL DISTRIBUTION FUNCTIONS UNDER INCOMPLETE INFORMATION

Abstract. Exact estimations are found for the probability that a non-negative unimodal random variable μ gets in the interval $(m-\sigma_\mu, m+\sigma_\mu)$ where the mode m coincides with fixed first moment and σ_μ^2 is fixed variance of random variable μ. Also, a brief important auxiliary information is given with examples, statements, and author's notations, which simplify obtaining the main result. The results of this study may be useful in evaluating the probability of hitting the projectile zone when aimed shooting.

Keywords: linear functionals of unimodal distribution functions and their extremal values, transformation of Johnson–Rogers, exact generalized Chebyshoff inequalities for unimodal distribution functions.

Стойкова Лидия Степановна, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: stojk@ukr.net.

Ковальчук Людмила Васильевна, доктор техн. наук, профессор, доцент кафедры Физико-технического института НТУУ «КПИ имени Игоря Сикорского», Киев, e-mail: lusi.kovalchuk@gmail.com.