

УДК 681.513.8

МОДЕЛЮВАННЯ, ОЦІНЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ДИНАМІКИ РОСТУ ДЕРЕВ, ЗРОШУВАНИХ СТІЧНИМИ ВОДАМИ

В.А. Вісікірський

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем
НАН та МОН України, 03187, Київ, просп. Академіка Глушкова, 40*

Представлено результати, що базуються на експериментах, виконаних в Лабораторії спеціалізованого машинобудування Патраського університету, Греція. Метою дослідження є розглянути можливість зрошування дерев стічними водами з використанням мулу на лісових плантаціях. Експериментальні результати для дерева *Pinus Brutia* (Сосна турецька).

Ключові слова: зрошування дерев, МГУА, оптимізація, моделі динаміки росту.

Results are presented, based on experiments performed in the laboratory of the Laboratory of Special Mechanical Engineering of the University of Patras. The purpose of the study is to consider the possibility of irrigation of trees with sewage using sludge on forest plantations. Experimental results for the *Pinus Brutia* (Turkish pine) tree.

Keywords: tree irrigation, GMDH, optimization, growth dynamics models.

Представлены результаты, основанные на экспериментах, выполненных в Лаборатории специализированного машиностроения Патрасского университета. Целью исследования является рассмотреть возможность орошения деревьев сточными водами с использованием ила на лесных плантациях. Экспериментальные результаты для дерева *Pinus Brutia* (Сосна турецкая).

Ключевые слова: орошение деревьев, МГУА, оптимизация, модели динамики роста.

Вступ

Відомо, що існують агрономічні та економічні вигоди ефективного багатократного використання очищених стічних вод у сільському господарстві. Іригація стічними водами може збільшити водопостачання, зменшити викиди стічних вод у природні водні об'єкти. Крім того, стічні води містять хімічні елементи, які потрібні для росту рослин. В той же час, багатократно використовування стічних вод для іригації потребує всебічного вивчення поведінки рослин з урахуванням екологічних ланцюгів взаємодії різних природних та техногенних об'єктів, кліматичних особливостей, культивування, та інших умови [1].

Представлені результати базуються на експериментах, виконаних в Лабораторії спеціалізованого машинобудування Патраського університету. Метою дослідження є розглянути можливість зрошування дерев стічними водами з використанням мулу на лісових плантаціях. Експериментальні результати для дерева *Pinus Brutia*, які використовуються для моделювання динаміки росту дерев, представлені в [2]. Попередні результати для різних стадій цього проекту, насадження, хімічні характеристики стічних вод і мулу, представлені в [3-5].

Математичні моделі динаміки росту широко застосовуються в різних економічних і екологічних задачах [6, 7]. Загальною причиною використання

цих моделей для культивування сільськогосподарських і лісових дерев є необхідність отримання характеристик поведінки дерев залежно від кліматичних факторів і умов іригації, з урахуванням всіх стадій росту дерев. Для моделювання цих процесів застосовується МГУА [8]. Також запропонований спосіб оптимізації для попередньої оцінки оптимальних умов іригації росту дерев з використанням стічних вод і мулу.

Приклад застосування МГУА для оцінки динаміки росту сільськогосподарських рослин представлений в [10]. Оцінка механічних властивостей дерев *Eucalyptus*, зрошуваних стічними водами, на основі МГУА, описана в [11].

1. Початкові експериментальні дані

Саджанці лісового дерева *Pinus Brutia*, яке є грецького походження, були насаджені на ділянці площею 7 акрів біля Патраського Університету. Загальна кількість саджанців дорівнює 377 одиниць. Ділянка біла поділена на чотири частини, згідно різним варіантам іригації (обробки) саджанців протягом їх росту:

Варіант обробки 1: Іригація стічними водами без додатку мулу (*WW*);

Варіант обробки 2: Іригація технічною водою без додатку мулу (*CW*);

Варіант обробки 3: Іригація стічними водами і з додатком мулу (*SWW*);

Варіант обробки 4: Іригація технічною водою і з додатком мулу (*SCW*).

Протягом насадження було використано в середньому 75 кг мулу на дерево. На кожне дерево було використано 30 літрів/місяць технічної води або стічних вод, залежно від варіанту обробки. Обробка і вимірювання росту молодих дерев були виконані протягом 1991-1994 років. Надалі, деякі з дерев були розрізані, і були виміряні механічні, теплові та акустичні властивості дерева.

Характеристиками росту дерев є: “висота дерева” (*tree height*) та “смертність дерева” (*tree mortality*) для згаданих вище чотирьох варіантів обробки. Характеристики вимірювались кожні шість місяців. Мета вимірювання “висоти дерева” полягає в тому, щоб оцінити зростання дерев за кожний піврічний період. Мета вимірювання “смертності дерева” полягає в тому, щоб оцінити виживання за кожний піврічний період (*half-year period*). Висота дерева - це абсолютна висота *Pinus Brutia* в сантиметрах, смертність дерева - це кумулятивний відсоток смертності *Pinus Brutia* для кожного періоду вимірювання.

2. Модель динаміки росту дерев

Дані спостереження для дерева *Pinus Brutia* наведені в Таблиці 1. Характеристики росту *Pinus Brutia* - це дві вихідні змінні (стан): “висота дерева” і “смертність дерева”, що виміряні за 8 піврічних періодів. Вхідні змінні - це метеорологічні фактори (температура, відносна вологість та хмарність), усереднені для кожного піврічного періоду.

Процес росту дерев розглядається як залежна від часу послідовність змін характеристик дерева. В загальному випадку, ріст дерева за період $(t+1)$ є функція всіх попередніх періодів росту t . Модель динаміки росту може розглядатися як модель з розподіленими лаговими змінними. З метою оцінки будемо аналізувати результати росту з одним лагом, тобто, результати протягом поточного піврічного періоду півроку і одного попереднього піврічного періоду, для того, щоб врахувати можливі відмінності кліматичних умов протягом періодів “весна-літо” та “осінь-зима”. Таким чином, маємо лагову модель першого порядку з двома вихідними змінними $\vec{Y}(t) = [y^{(h)}(t), y^{(m)}(t)]$ для кожного варіанту обробки дерев, де $y^{(h)}(t)$ є висота дерева, $y^{(m)}(t)$ є смертність дерева. Метеорологічними факторами $\vec{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ є: температура ($x_1(t)$), відносна вологість ($x_2(t)$) і хмарність ($x_3(t)$).

Склад води як фактор не включений явно в моделі динаміки росту, тому що він приблизно постійний для технічної води та стічних вод протягом періоду досліджень. Таким чином, треба побудувати моделі для кожного варіанту обробки та порівняти індивідуальні моделі. Варіанти обробки позначені наступним чином: тільки стічні води (WW), тільки технічна вода (CW), мул і стічні води (SWW), мул і технічна вода (SCW). Тоді набір моделей росту матиме наступну загальну форму:

$$y^{(k,j)}(t+1) = f^{(k,j)}(y^{(k,j)}(t), x_1(t+1), x_1(t), x_2(t+1), x_2(t), x_3(t+1), x_3(t)), \quad t = 0, \dots, 7, \quad (1)$$

де: $k = [h - height, m - mortality]$, $j = [WW, CW, SW, W, SCW]$, вісім індивідуальних моделей, щоб оцінити висоту і смертність для чотирьох варіантів обробки.

Щоб оцінити дані, отримані для дерева *Pinus Brutia*, був застосований МГУА у формі моделей динаміки росту. Детальніший опис загальних принципів МГУА даний в [13, 14, 15, 16].

МГУА генерує набір поліноміальних залежностей з різним ступенем складності і точності. Таким чином, ми можемо розглядати набір моделей, що генеруються, в цілому і вибирати відповідні моделі згідно структурі, складності, і вимогам точності. На етапі якісної оцінки характеристик росту дерев доцільно користуватися лінійними моделями, які є простішими для аналізу.

Лінійні моделі динаміки росту дерев можуть бути представлені в наступній формі лінійної авторегресії з лаговими змінними першого порядку:

$$\begin{aligned} y^{(k,j)}(t+1) &= a_0 + a_{y(t)} y^{(k,j)}(t) + a_{1,t+1} x_1(t+1) + a_{1,t} x_1(t) + \\ &+ a_{2,t+1} x_2(t+1) + a_{2,t} x_2(t) + a_{3,t+1} x_3(t+1) + a_{3,t} x_3(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$t = 0, \dots, 7, k = [h - висота, m - смертність], j = [WW, CW, SWW, SCW]$

Таблиця 1– Виміряні характеристики *Pinus Brutia* і метеорологічні дані

Про ба №	Період взяття проб	Метеорологічні дані (Вхідні Змінні)			Характеристики дерева <i>Pinus Brutia</i> (Вихідні змінні)							
		Темпе- ратура (°C)	Віднос- на воло- гість (%)	Хмарність (дні/місяці)	Висота дерева (см)				Кумулятивна Смертність (%)			
					Стічні води	Техні- чна во- да	Мул + Стічні води	Мул + Техніч- на вода	Сті- чні води	Техні- чна во- да	Мул + Стічні води	Мул + Техніч- на Вода
0	1991 Березень	11.76	65.3	3.9	39.59	42.63	39.91	43.31	0	0	0	0
1	1991 Квітень - 1991 Вересень	22.28	64.6	2.38	101.51	102.72	77.22	105.82	2.4	0	1.2	8.1
2	1992 Березень 1991- Жовтня	12.41	64.41	3.46	154.82	148.24	115.35	161.11	4.8	4.1	3.6	12.9
3	1992 Квітень - 1992 Вересень	23.36	65	2.21	204.26	199.29	148.23	211.61	4.8	4.1	7.1	12.9
4	1992 Жовтень – 1993 Бере- зень	12.83	62.63	3.48	261.74	250.28	189.29	268.18	4.8	7.5	7.7	12.9
5	1993 Квітень - 1993 Вересень	23.63	69.48	1.63	319.21	301.27	230.35	324.75	4.8	10.9	8.3	12.9
6	1993 Жовтень – 1994 Бере- зень	14.23	59.8	3.53	366.55	345.06	263.18	367.68	4.8	11.6	10.65	16.9
7	1994 Квітень - 1994 Вересень	24.16	66.6	1.68	413.89	388.84	296	410.61	4.8	12.3	13	20.9

З метою аналізу повного ряду лінійних моделей, використаємо комбінаторний алгоритм МГУА *COMBI* [17].

Комбінаторний алгоритм *COMBI* призначений для пошуку кращої регресійної моделі, що містить найбільш інформаційну підмножину початкових змінних (регресорів). У разі лінійного об'єкта з m входами, моделі:

$$y_v = X_v \theta_v, \quad v = 1, \dots, 2^m - 1, \quad (3)$$

де X_v - вектор вхідних змінних, y_v - вихідна змінна, θ_v - вектор невідомих параметрів m , порівнюються протягом вичерпного процесу зовнішнього сортування, де десятковий номер v унікально пов'язаний з бінарним числом d_v . Одиниці d_v вказують на включення регресорів з відповідними номерами в моделі, а нулі - на їх відсутність. Таким чином, структури часткових моделей представлені бінарним вектором структури d_v .

3. Індекс води

Одна з цілей моделювання і оцінки є узагальнення моделей, які отримані для чотирьох варіантів обробки, для наступних двох типів обробки:

Тип обробки 1 (*W*): іригація з водою без додатку мулу (варіанти обробки *WW* і *CW*);

Тип обробки 2 (*SW*): іригація з водою і з додатком мулу (варіанти обробки *SWW* і *SCW*).

Кожен варіант обробки пов'язаний з постійними значеннями концентрацій хімічних елементів в технічній воді або стічних водах. Загальна модель для типу обробки повинна описати динаміку росту при змінній хімічній складі води іригації. Для того, щоб побудувати загальну модель для типу обробки *WW*, *CW* -> *W* або *SWW*, *SCW* -> *SW*, ми повинні пов'язати моделі з індексом складу води. Це дозволить зробити явну оцінку впливу якості води на характеристики росту дерев, а також оцінку оптимальної величини складу води, що збільшує ріст дерев за даним критерієм.

Індекси складу води іригації, рН і концентрації хімічних елементів в технічній воді і стічних водах приблизно постійні за всі періоди (Таблиця 2). Оскільки ми маємо середні постійні значення складу води, визначимо загальний індекс води Q в цілому, щоб мати можливість в подальшому представити коефіцієнти загальної моделі як змінні від загального індексу води. Є різні способи визначення якості води у різних галузях [18, 19]. З метою оцінки, приймемо загальний індекс води без зважених коефіцієнтів, які відносяться для індивідуальних хімічних елементів, з врахуванням того, що всі концентрації елементів в технічній воді і стічних водах є менш ніж максимальні рекомендовані концентрації:

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1, n} \frac{(m_i - c_i)}{m_i} \quad (4)$$

Тут m_i - максимальна рекомендована концентрація i -го хімічного елемента, c_i - виміряна концентрація i -го хімічного елемента. Область значень для такого індексу є $[0,1]$. Граничне значення 0 означає, що всі виміряні концентрації рівні максимальним рекомендованим концентраціям; граничне значення 1 означає, що всі концентрації рівні 0. З Таблиці 2 маємо: загальний індекс води для технічної води є $Q^{(cw)} = 0.8330$, а для стічних вод - $Q^{(ww)} = 0.7942$. Це означає, що стічні води більш насичені, тобто концентрації хімічних елементів у стічних водах у середньому вище, ніж концентрації в технічній воді.

Таблиця 2. Склад хімічних елементів у іригаційній воді

№.	Склад води	Технічна вода (ppm)	Стічні води (ppm)	Максимальна рекомендована концентрація (ppm)
1	pH	7.47	7.72	8.4
2	Ca	143.1	135	400
3	Mg	14.7	17	60
4	K	3.9	7.75	19
5	Fe	0	0.001	5.0
6	Zn	0.25	0.105	2.0
7	Cu	0.001	0.006	0.2
8	Pb	0	0.042	5.0
9	Mn	0,025	0.039	0.2
10	Cr	0	0	0.1
11	Cd	0	0	0.01
12	P	2	4	13
13	Na	58.25	121	900

4. Аналіз характеристик лінійних моделей

Аналіз моделей виконується для оцінки головних властивостей і вибрати напрями виконання експериментів на наступних стадіях для того, щоб отримати більш точні моделі, які описують тенденції росту дерев.

Необхідно виконати: 1) оцінку точності моделей; 2) аналіз структур моделей і створення загальної моделі для типу обробки; 3) оцінку оптимальних умов іригації для окремих типів обробки.

Для того, щоб прийняти рішення, чи можуть лінійні моделі використовуватися в оцінці характеристик росту дерева, спочатку потрібно перевірити їх точність. В подальшому аналізі використовуватиметься підмножина відібраних лінійних моделей з найкращою точністю.

5. Оцінка точності моделей

Попереднє виділення підмножини моделей її аналіз може бути продемонстровано на прикладі моделей для варіанту обробки “стічні води”. В *COMBI* як міра точності використаний нормалізований розмах відхилення (*RD*):

$$RD = R / (Y_{\max} - Y_{\min}) * 100\%, \quad (5)$$

де:

n – число точок; $R = \max |V_i(t) - Y_i(t)|, i = 1, \dots, n$; $V_i(t)$ - оцінка моделі виходу вимірів $Y_i(t)$.

Кращі і якнайгірші моделі з перших 150 моделей, що генеруються, для “висоти дерева” (які потенційно найбільш репрезентативні) мають *RD* відповідно до 0.6076% та 3.9894%. Виходячи з цього, прийmemo $RD \leq 2.5\%$, що охоплює понад 80% всіх моделей, які розглядаються. Подібний аналіз може бути зроблений для смертності дерев, варіант обробки “стічні води”. Ці моделі менш точні, ніж моделі для висоти дерев. З метою оцінки, прийmemo $RD \leq 30\%$, що охоплює понад 75% всіх моделей, що розглядаються. Пороги *RD* потрібні, щоб визначити підмножини моделей, які можуть залучатися для подальшого аналізу. Визначені пороги є першим кроком наближення, і є суб'єктивними. Вони можуть бути змінені на подальших стадіях ітеративного процесу “експерименти - моделювання - аналіз”.

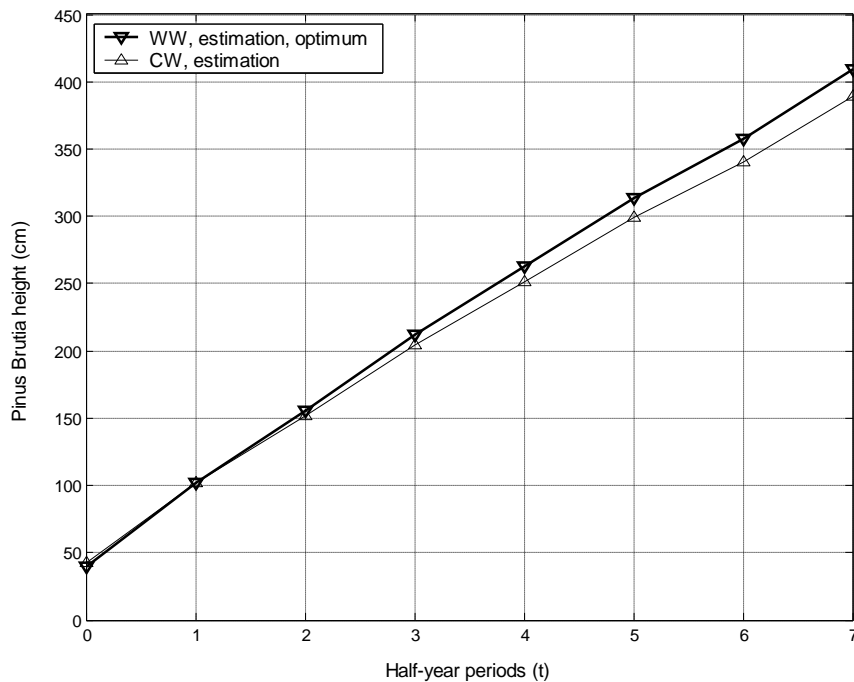


Рис. 1 Оцінена і оптимальна висота *Pinus Brutia*; тип обробки “вода без мулу”

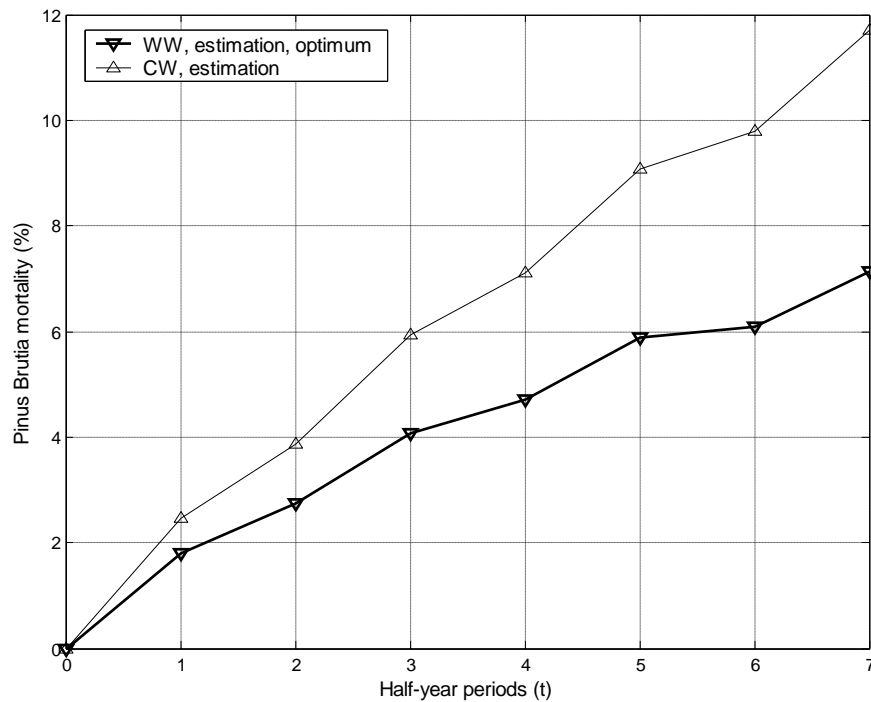


Рис. 2 Оцінена і оптимальна смертність *Pinus Brutia*; тип обробки “вода без мулу”

6. Попарне порівняння структур моделей

Головна задача попарного порівняння структур моделей, що описують різні варіанти обробки - знайти моделі з ідентичною структурою для того, щоб побудувати загальну модель для типу обробки. Крім того, порівняння пари моделей з ідентичною структурою дозволить зробити попередні припущення щодо схожості або відмінності між моделями. Зокрема, існування всіх позитивних коефіцієнтів (без абсолютного члена), таке, що всі коефіцієнти ідентичних членів моделей відповідають одному й тому ж відношенню ($>$ або $<$), є умовою припущення щодо стійкої різниці (позитивної або негативної) між вихідними значеннями моделей пари за всі періоди. Додатковий аналіз щодо неіснування пари з подібною структурою, але із зворотним відношенням між коефіцієнтами ідентичних членів, може підтвердити таке припущення.

Наприклад, для “висоти дерев”, варіанти обробки *WW* і *CW*, ми можемо вибрати дві пари моделей 12+32 і 13+8, причому кожна модель має всі позитивні коефіцієнти. Між коефіцієнтами моделей в кожній парі виконуються відносини ($>$). Як міру точності для пари, приймемо (RD_{total}), приймемо суму значень RD для кожної моделі в парі. Пари наведені нижче:

Варіант обробки *WW*, Модель 12 ($RD=3.9894\%$):

$$y^{(h,ww)}(t+1) = 1.0317 y^{(h,ww)}(t) + 14.6450 x_3(t) \quad (6)$$

Варіант обробки *CW*, Модель 32 ($RD= 3.5480\%$):

$$y^{(h,cw)}(t+1) = 1.0303 y^{(h,cw)}(t) + 13.8030 x_3(t) \quad (7)$$

з $RD_{total} = 7.5374\%$, і

Варіант обробки *WW*, Модель 13 ($RD=1.6592\%$):

$$y^{(h,ww)}(t+1) = 0.9945 y^{(h,ww)}(t) + 7.8314 x_3(t+1) + 11.3570 x_3(t) \quad (8)$$

Варіант обробки *CW*, Модель 8 ($RD= 1.0840\%$):

$$y^{(h,cw)}(t+1) = 0.9944 y^{(h,cw)}(t) + 7.0173 x_3(t+1) + 10.9390 x_3(t) \quad (9)$$

з $RD_{total} = 2.7432\%$

В той же час, відсутні пари з ідентичною структурою і зворотними відносинами між коефіцієнтами (тобто $<$). Це показує, що при тих же самих початкових умовах, зростання висоти при зрошуванні стічними водами більше, ніж зростання при зрошуванні технічною водою.

У загальному випадку, структура лінійної моделі S може бути представлена як впорядкований набір значень $\{1,0\}$, що вказують на існування (1) або неіснування (0) відповідного члену в моделі, включаючи точність. Структуру лінійної моделі (8) можна представити у формі: $S_{13} = (0,1,0,0,0,0,1,1/1.6592)$.

Підмножини генерованих моделей, що відповідають визначеним структурним вимогам, можуть вибиратися за допомогою способу, подібного тому, що тому використовується в класифікаційних системах [20]. Структурний зразок, що описує набір структур, включає символи, що вказують вимогу до кожного члену: існує, відсутній, або "не має значення" (*). Наприклад, запит для підмножини моделей, які включають змінну "температура" з лагом, без абсолютного члена і з точністю $\leq RD$, має наступну форму: $(0,*,1,1,*,*,*/RD)$. Більш складні запити можуть задаватися для вибору підмножин моделей з двома та більше комбінаціями змінних. Умови для знаків коефіцієнтів також можуть увійти до запиту. Наприклад, $(0,*,(+)1,(+)1,*,*,*/RD)$ означає, що коефіцієнти для "температури" повинні бути позитивними. Інші можливості аналізу та обробки структур дані в [21].

7. Побудова загальних моделей і оцінка оптимальних умов обробки дерев

Мета управління водним режимом при обробці дерев на основі моделей оцінки - це регулювання складу води таким чином, щоб забезпечити найкращі характеристики росту дерев. В даному випадку загальний індекс води $Q(t)$ в інтервалі $[0.7942, 0.8330]$ вважається управляючою змінною. Оптимальною умовою обробки для кожного типу обробки будемо вважати такий $Q(t)$, що збіль-

шує “висоту дерева” і мінімізує “смертність дерева”. Спочатку, збудуємо загальні моделі для кожної характеристики дерева і типу обробки.

I) Тип обробки “Іригація з водою без додатку мулу” (W)

- Загальна модель для “висоти дерев”

Виберемо з підмножини моделей кращу пару моделей з ідентичною структурою і позитивними коефіцієнтами, без абсолютного члена. Кращою парою моделей є 13+8 (див. (8) і (9)). Загальною моделлю є:

$$y^{(h,w)}(t+1) = a_{y(t)}^{(h,w)}(Q) y^{(h,w)}(t) + a_{3,t+1}^{(h,w)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(h,w)}(Q) x_3(t) \quad (10)$$

Оскільки ми маємо два значення Q для варіантів обробки WW і CW, то коефіцієнти a_s моделей можна представити як лінійну залежність від Q :

$$a_s = b_{1,s} + b_{2,s} \cdot Q \quad (11)$$

Якщо число Q матиме більшу кількість значень, то можна сформулювати залежність вищого порядку.

Лінійна залежність для коефіцієнтів формується на основі пари значень (Q, a_s) , яка відома для кожного варіанту обробки. Для коефіцієнта $a_{3,t+1}^{(h,w)}(Q)$, лінійна залежність може бути побудована по наступним точкам: $(Q^{(ww)}, a_{3,t+1}^{(h,ww)}) = (0.7942, 7.8314)$ і $(Q^{(cw)}, a_{3,t+1}^{(h,cw)}) = (0.8330, 7.0173)$. На основі цього, коефіцієнти можуть бути представлені у наступній формі:

$$a_{y(t)}^{(h,w)} = 0.9965 - 0.0026 \cdot Q; a_{3,t+1}^{(h,w)} = 24.4953 - 20.9820 \cdot Q; a_{3,t}^{(h,w)} = 19.9131 - 10.7732 \cdot Q, \quad (12)$$

7. Загальна модель для “смертності дерев”

Виберемо з підмножини моделей кращу пару моделей з ідентичною структурою 23+1 з найменшим $RD_{total} = 44.6900\%$:

Варіант обробки WW, Модель 23 ($RD=28.8310\%$):

$$y^{(m,ww)}(t+1) = 0.9053 y^{(m,ww)}(t) + 0.4636 x_3(t) \quad (13)$$

Варіант обробки CW, Модель 1 ($RD=15.8590\%$):

$$y^{(m,cw)}(t+1) = 0.9669 y^{(m,cw)}(t) + 0.6299 x_3(t) \quad (14)$$

Загальна модель для цієї пари наступна:

$$y^{(m,w)}(t+1) = a_{y(t)}^{(m,w)}(Q) y^{(m,w)}(t) + a_{3,t}^{(m,w)}(Q) x_3(t) \quad (15)$$

where :

$$a_{y(t)}^{(m,w)} = -0.3556 + 1.5876 \cdot Q; a_{3,t}^{(m,w)} = -2.9404 + 4.2861 \cdot Q,$$

- Оцінка оптимальних умов для типу обробки “вода без мулу” (*W*)

У загальному випадку оптимізація може бути здійснена на основі нелінійного програмування (знайти оптимум на заключному періоді часу, з урахуванням всіх попередніх періодів) або лінійного програмування (знайти оптимум для кожного окремого періоду часу). З метою попередньої оцінки і з урахуванням двох характеристик дерев, ця задача може бути спрощена.

Проблема оцінки оптимальних умов обробки може бути сформульована в наступній формі:

Знайти $Q_{opt}(t)$ на $[0.7942, 0.8330]$ такий, що:

$$\begin{aligned}
 y^{(h,w)}(t+1) &= a_{y(t)}^{(h,w)}(Q) y^{(h,w)}(t) + a_{3,t+1}^{(h,w)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(h,w)}(Q) x_3(t) \rightarrow \max \\
 y^{(m,w)}(t+1) &= a_{y(t)}^{(m,w)}(Q) y^{(m,w)}(t) + a_{3,t}^{(m,w)}(Q) x_3(t) \rightarrow \min \\
 \text{where :} & \\
 a_{y(t)}^{(h,w)} &= 0.9965 - 0.0026 \cdot Q; \quad a_{3,t+1}^{(h,w)} = 24.4953 - 20.9820 \cdot Q; \quad a_{3,t}^{(h,w)} = 19.9131 - 10.7732 \cdot Q; \\
 a_{y(t)}^{(m,w)} &= -0.3556 + 1.5876 \cdot Q; \quad a_{3,t}^{(m,w)} = -2.9404 + 4.2861 \cdot Q,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

З виразів для коефіцієнтів (16) видно, що максимум для “висоти дерев” і мінімум для “смертності дерев” досягаються на нижній границі інтервалу індексу води $[0.7942, 0.8330]$, тобто $Q_{opt} = 0.7942$ (стічні води) за всі періоди.

Малюнки 1 і 2 відображають графіки моделей “висота дерева” і “смертність дерева” для варіантів обробки *WW* і *SCW*, а також в цілому для типу обробки *W* в оптимальних умовах.

II) Тип обробки “Іригація з водою і з додатком мулу” (*SW*)

Пари моделей виділяються так само, як і для типу обробки *W*.

- Загальна модель для “висоти дерева”

Найкращою парою моделей з ідентичною структурою і мінімальним $RD_{total} \in 32+10$, $RD_{total} = 4.1713\%$:

Варіант обробки *SWW*, Модель 32 ($RD=2.5929\%$):

$$y^{(h,sww)}(t+1) = 0.9991 y^{(h,sww)}(t) + 6.9399 x_3(t+1) + 5.8360 x_3(t) \tag{17}$$

Варіант обробки *SCW*, Модель 10 ($RD=1.5784\%$):

$$y^{(h,scw)}(t+1) = 0.9998 y^{(h,scw)}(t) + 8.3713 x_3(t+1) + 11.0560 x_3(t) \tag{18}$$

Загальна модель для цієї пари наступна:

$$y^{(h,sw)}(t+1) = a_{y(t)}^{(h,sw)}(Q) y^{(h,sw)}(t) + a_{3,t+1}^{(h,sw)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(h,sw)}(Q) x_3(t)$$

where :

$$a_{y(t)}^{(h,sw)} = 0.9848 + 0.0180 \cdot Q; a_{3,t+1}^{(h,sw)} = -22.3596 + 36.8918 \cdot Q; \quad (19)$$

$$a_{3,t}^{(h,sw)} = -101.0127 + 134.5361 \cdot Q,$$

- Загальна модель для “смертності дерев”

Найкращою парою моделей з ідентичною структурою і мінімальним $RD_{total} \in 7+8$, $RD_{total} = 26.3141\%$:

Варіант обробки SWW, Модель 7 ($RD=8.7681\%$):

$$y^{(m,sww)}(t+1) = 1.0438 y^{(m,sww)}(t) + 0.2657 x_3(t+1) + 0.3174 x_3(t) \quad (20)$$

Варіант обробки SCW, Модель 8 ($RD=17.546\%$):

$$y^{(m,scw)}(t+1) = 0.8909 y^{(m,scw)}(t) + 1.2555 x_3(t+1) + 0.5806 x_3(t) \quad (21)$$

Загальна модель для цієї пари наступна:

$$y^{(m,sw)}(t+1) = a_{y(t)}^{(m,sw)}(Q) y^{(m,sw)}(t) + a_{3,t+1}^{(m,sw)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(m,sw)}(Q) x_3(t)$$

where :

$$a_{y(t)}^{(m,sw)} = 4.1735 - 3.9407 \cdot Q; a_{3,t+1}^{(m,sw)} = -19.9946 + 25.5103 \cdot Q; \quad (22)$$

$$a_{3,t}^{(m,sw)} = -101.0127 + 134.5361 \cdot Q,$$

- Оцінка оптимальних умов обробки для типу обробки “вода з мулом” (SW)

Проблема оцінки оптимальних умов обробки для цього типу обробки може бути сформульована в наступній формі:

Знайти $Q_{opt}(t)$ на $[0.7942, 0.8330]$ такий, що:

$$y^{(h,sw)}(t+1) = a_{y(t)}^{(h,sw)}(Q) y^{(h,sw)}(t) + a_{3,t+1}^{(h,sw)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(h,sw)}(Q) x_3(t) \rightarrow \max$$

$$y^{(m,sw)}(t+1) = a_{y(t)}^{(m,sw)}(Q) y^{(m,sw)}(t) + a_{3,t+1}^{(m,sw)}(Q) x_3(t+1) + a_{3,t}^{(m,sw)}(Q) x_3(t) \rightarrow \min$$

where :

$$a_{y(t)}^{(h,sw)} = 0.9848 + 0.0180 \cdot Q; a_{3,t+1}^{(h,sw)} = -22.3596 + 36.8918 \cdot Q; \quad (23)$$

$$a_{3,t}^{(h,sw)} = -101.0127 + 134.5361 \cdot Q; a_{y(t)}^{(m,sw)} = 4.1735 - 3.9407 \cdot Q;$$

$$a_{3,t+1}^{(m,sw)} = -19.9946 + 25.5103 \cdot Q; a_{3,t}^{(m,sw)} = -101.0127 + 134.5361 \cdot Q,$$

З виразів коефіцієнтів (23) видно, що максимум для “висоти дерева” досягається у верхній границі повного інтервалу індексу води [0.7942, 0.8330], тобто $Q=0.8330$ (мул + технічна вода) має бути оптимальним значенням тільки для висоти дерев. В той же час, коефіцієнти $a_{3,t+1}^{(m,sw)}$ $a_{3,t}^{(m,sw)}$ для “смертності дерев” підвищують смертність, тоді як $a_{y(t)}^{(m,sw)}$ зменшують. Таким чином, щоб врахувати ці протилежні умови, визначимо $Q_{opt}(t)$ і відповідні характеристики дерев для кожного періоду t , на основі наступних припущень: одинична зміна висоти (нормалізований приріст у висоті) і одинична зміна смертності є рівноцінні, однакової “ваги”.

Спочатку для того, щоб знайти $Q_{opt}(t)$ на $[Q_{min}, Q_{max}] = [0.794, 0.833]$, визначимо пропорцію для одиничної зміни висоти і смертності:

$$\frac{Q_{opt}(t) - Q_{min}}{Q_{max} - Q_{opt}(t)} = \frac{\text{одинична зміна смертності}(t)}{\text{одинична зміна висоти}(t)} \quad (24)$$

Для обчислення одиничних змін для кожного періоду t , потрібно визначити коефіцієнти з (23), нормалізованих по областям значень вимірювань для типу обробки SW, тобто $410.61 - 39.91 = 370.7$ для висоти дерев і $20.9 - 0 = 20.9$ для смертності дерев (див. Таблицю 1):

$$\begin{aligned} \hat{a}_{y(t)}^{(h,sw)} &\approx 0, \quad \hat{a}_{3,t+1}^{(h,sw)} = -0.0611 + 0.1005 \cdot Q; \\ \hat{a}_{3,t}^{(h,sw)} &= -0.2729 + 0.3634 \cdot Q, \quad \hat{a}_{y(t)}^{(m,sw)} = 0.1993 - 0.1881 \cdot Q \\ \hat{a}_{3,t+1}^{(m,sw)} &= -0.9575 + 1.2216 \cdot Q; \quad \hat{a}_{3,t}^{(m,sw)} = -0.2427 + 0.3247 \cdot Q \end{aligned} \quad (25)$$

За початкове значення приймемо початкову середню висоту 41.61, середню смертність 0, і середній індекс води 0.8136.

Значення $Q_{opt}(t)$, $y^{(h,sw)}(t)$, $y^{(m,sw)}(t)$ для періодів $t=1, \dots, 7$ визначаються наступним чином:

Крок 1:

Знайти одиничну зміну висоти і смертності з нормалізованих виразів:

$$\begin{aligned} y^{(h,sw)}(1) &= \hat{a}_{y(t)}^{(h,sw)}(Q) y^{(h,sw)}(0) + \hat{a}_{3,t+1}^{(h,sw)}(Q) x_3(1) + \hat{a}_{3,t}^{(h,sw)}(Q) x_3(0) = \\ &= (-0.0611 + 0.1005 \cdot Q) \cdot 2.38 + (0.2729 + 0.3634 \cdot Q) \cdot 3.9 = 0.9189 + 1.6565 \cdot Q, \\ y^{(m,sw)}(1) &= \hat{a}_{y(t)}^{(m,sw)}(Q) y^{(m,sw)}(0) + \hat{a}_{3,t+1}^{(m,sw)}(Q) x_3(1) + \hat{a}_{3,t}^{(m,sw)}(Q) x_3(0) = \\ &= (0.1993 - 0.1881 \cdot Q) \cdot 0 + (-0.9575 + 1.2216 \cdot Q) \cdot 2.38 + (-0.2427 + 0.3247 \cdot Q) \cdot 3.9 = \\ &= -3.2254 + 4.1737 \cdot Q \end{aligned} \quad (26)$$

Одинична зміна висоти і одинична зміна смертності є похідні першого порядку (26), тобто 1.6565 і 4.1737. З (24) одержуємо:

$$\frac{Q_{opt}(1) - 0.7942}{0.8330 - Q_{opt}(1)} = \frac{4.1737}{1.6565}, \text{ i.e., } Q_{opt}(1) = 0.8220 \quad (27)$$

Коефіцієнти (23) при $Q_{opt}(1) = 0.8220$:

$$\begin{aligned} a_{y(0)}^{(h,sw)} &= 0.9996; a_{3,1}^{(h,sw)} = 7.9655; a_{3,0}^{(h,sw)} = 9.5760; a_{y(0)}^{(m,sw)} = 1.0035; \\ a_{3,1}^{(m,sw)} &= 0.4018; a_{3,0}^{(m,sw)} = 0.5343 \end{aligned} \quad (28)$$

Далі обчислюємо оптимальні значення висоти і смертності дерев за період 1 при $Q_{opt}(1) = 0.8220$:

$$\begin{aligned} y_{opt}^{(h,sw)}(1) &= 0.9996 y^{(h,sw)}(0) + 7.9655 x_3(1) + 9.5760 x_3(0) = \\ &= 0.9996 \cdot 41.6100 + 7.9655 \cdot 2.38 + 9.5760 \cdot 3.9 = 97.8976; \\ y_{opt}^{(m,sw)}(1) &= 1.0035 y^{(m,sw)}(0) + 0.4018 x_3(1) + 0.5343 x_3(0) = \\ &= 0 + 0.4018 \cdot 2.38 + 0.5343 \cdot 3.9 = 3.0401 \end{aligned} \quad (29)$$

Результати обчислень за всі періоди дані в Таблиці 3.

Таблиця 3.

Вирахувані оптимальні значення для висоти і смертності дерев, тип обробки SW

t	0	1	2	3	4	5	6	7
Q_{opt}	0.81	0.82	0.82	0.82	0.82	0.81	0.82	0.80
Висота	41.6	97.9	149.4	198.7	247.9	288.0	331.6	366.5
Смертність	0	3.04	5.79	8.48	11.11	13.40	15.74	17.83

Графіки висоти і смертності дерев при $Q_{opt}(t)$ показані на Рис. 3 і 4.

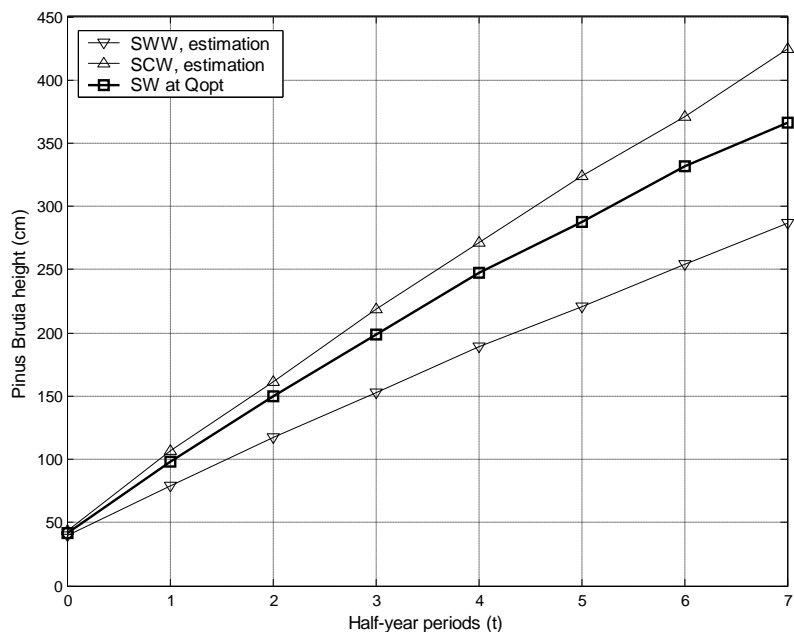


Рис. 3. Оцінена і оптимальна висота *Pinus Brutia*; тип обробки “вода з мулом”

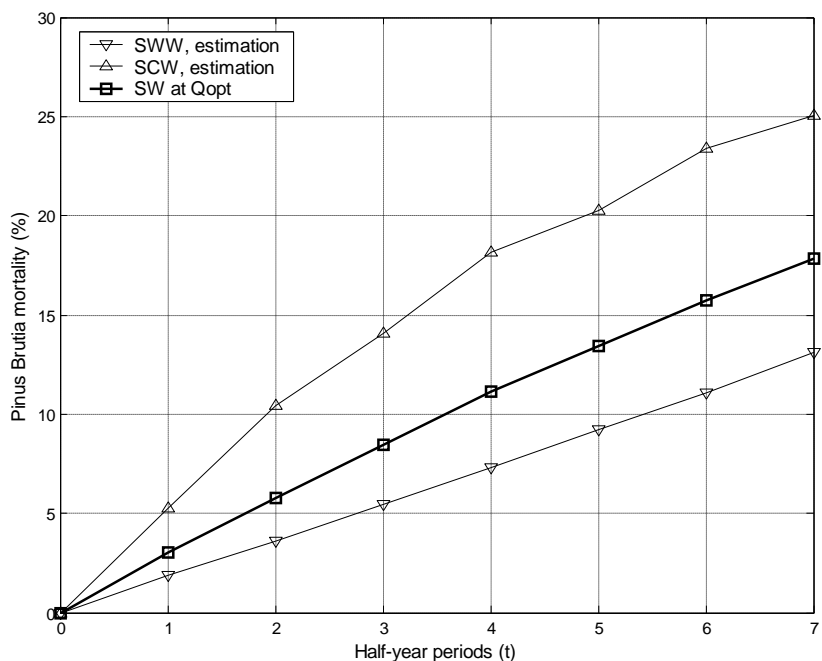


Рис. 4 Оцінена і оптимальна смертність *Pinus Brutia*; тип обробки “вода з мулом”

Висновки

Метою цього дослідження є побудування моделі динаміки росту дерев, зрошуваних стічними водами, на основі МГУА, та аналіз можливостей МГУА для структурного аналізу моделей і застосування процедур оптимізації. Моделі

динаміки росту, побудовані для дерева *Pinus Brutia*, зрошуваного стічними водами, демонструють можливість описання процесів з малим набором даних спостереження, включаючи умови обробки і кліматичні фактори.

На основі отриманих результатів, оптимальною умовою для “іригації з водою і без додатку мулу” (W) є вода з $Q_{opt}=0.7942$, тобто з концентраціями, вказаними для стічних вод в Таблиці 2. Оптимальною умовою для “іригації з водою і з додатком мулу” (SW) є водою з концентраціями, вказаними для Q_{opt} в Таблиці 3 для кожного періоду часу. Якщо порівняти два типи обробки W і SW , то ясно, що іригація стічними водами без додатку мулу дає кращі результати (413.8 і 366.5 для висоти дерев; 4.8 і 17.8 для смертності дерев).

Оскільки дослідження впливу стічних вод на характеристики дерев є довготривалими, то моделювання і оцінка поточних результатів вимірювань дозволяє планувати / коригувати план проведення наступних експериментів. Загальний індекс води не дозволяє оцінити результати впливу кожного окремого хімічного елемента, але в той же час на цій стадії не існує достатніх даних для такої оцінки. Більш детальний аналіз впливу хімічних елементів вимагає вимірювання змінних концентрацій у часі, або застосування нових варіантів іригації з різними концентраціями (приклад даних в [11]). Подальші експерименти повинні також буди спрямовані на перевірку точності даних про смертність. Для того, щоб визначити граничні значення при застосуванні стічних вод, необхідно впровадити режим іригацій із збільшеними концентраціями.

Генерація набору моделей з різними структурами, точністю і складністю дає можливість вибрати моделі, які є найбільш адекватними для конкретних задач. Зокрема, це дає основу для розробки простих процедур логічного виводу та якісної оцінки характеристик моделей на різних стадіях проведення довготривалих експериментів.

Загальні моделі можуть використовуватися для аналізу характеристик обробки із змінним складом води, а також для оцінки оптимальних умов обробки, що максимізують характеристики росту дерев. Детальніші дані про склад води можуть вимагати застосування більших складних методів оптимізації.

Література

1. Asano, T., Ed. Wastewater reclamation and reuse. *In Water Quality Management Library*, CRC Press, Boca Raton FL, 1998; Vol. 10.
2. Drakatos, P.A.; Fanariotou, I.N.; Kalavrouziotis, I.K.; Skuras, D.G.; Veltistas, Th. Irrigation with wastewater and sludge utilization in afforestation projects: results from experimental sites at the University of Patras, Proceedings of International Conference, University of Patras, Greece, August 24-26, 1994, 310-318.
3. Drakatos, P.A.; Fanariotou, I.N.; Kalavrouziotis, I.K.; Skuras, D.G. The potential use of wastewater and sludge in afforestation projects: experimental results

and comparisons in Greece, Second International symposium on Wastewater Reclamation and Reuse, International Association on Water Quality, Iraklio, Crete, Greece, October 17-20, 1995, 1003-1006.

4. Drakatos, P.A.; Fanariotou, I.N.; Kalavrouziotis, I.K.; Kallistratos, G.; Skurras, D.G.; Stoyianni, M. Concentration of heavy metals and nutrients in the leaves of certain forest species irrigated by treated wastewater. *In Food Flavors: Generation, Analysis and Process Influence*; Charalambous, G., Ed.; Developments in Food Science, 37B, Elsevier science, 1994.

5. Drakatos, P.A.; Lyon, R.H.; Chryssolouris, G.; Kallistratos, G. Reliability and exploitation of wastewater treatment plants using diagnostic methods. *International Journal of Environmental Studies* 1992, 40, 267-280.

6. Tinbergen J.; Bos, H.C. *Mathematical models of economic growth*. McGraw-Hill Book Company, Inc. Rebound, 1962.

7. Alder, D. *Growth modelling for mixed tropical forests*, Tropical Forestry Paper, 30, Department of Plant Sciences, Oxford University, 1995.

8 Ivakhnenko, A.G. Heuristic self-organization in problems of engineering cybernetics. *Automatica* 1970, 6, 207-219.

9. Anastasakis, L.; Mort, N. *The development of self-organization techniques in modelling: a review of the Group Method of Data Handling (GMDH)*, Research Report No. 813, Department of Automatic Control and Systems Engineering, The University of Sheffield, October 2001.

10. Ivakhnenko, A.G.; Stepashko, V.S.; Khomovnenko, M.G.; Galyamin, E. P. Self organization models of growth dynamics in agricultural production for control of irrigated crop rotation. *Soviet Automatic Control* 1977, 10 (5), 27-33.

11. Kalavrouziotis, I.K.; Stepashko, V.S.; Vissikirsky, V.A.; Drakatos, P.A. Group Method of Data Handling (GMDH) application for modelling of mechanical properties of trees irrigated with wastewater. *International Journal of Environment and Pollution* 2002, 18 (6), 589-601.

12. Мьллер, J.A.; Lemke, F. Self-organizing data mining based on GMDH principle, ESIT'99, Proceedings, Crete, 1999.

13. Stepashko, V.S. The potential noise immunity of modeling on the basis of a combinatorial GMDH algorithm without taking the information about the noise into account. *Soviet Automatic Control* 1983, 16 (3), 18-27.

14. Мьллер, J.A.; Ivachnenko, A.G.; Lemke, F. GMDH algorithms for complex systems modelling. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 1998, 4 (4), 275-316.

15. Farlow, S.J., Ed. *Self-organizing methods in modelling: GMDH type algorithms*, Marcel Decker Inc.: New-York, Bazel, 1984.

16. Madala, H.R.; Ivakhnenko, A.G. Inductive learning algorithms for complex systems modeling, CRC Press: London, Tokyo, 1994.
17. Stepashko, V.S. A combinatorial algorithm of the GMDH with optimal model scanning scheme. Soviet Automatic Control 1983, *16* (4), 88-93.
18. Pettygrove, G.S.; Asano T., Eds. *Irrigation with reclaimed municipal wastewater*, Report Number 84-1 wr, California State Water Resources Control Board, 1984.
19. Malano, H.; Burton, M. *Guidelines for benchmarking performance in the irrigation and drainage sector*, International Programme for Technology and Research in Irrigation and Drainage, Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome, 2001.
20. Booker, L.B.; Goldberg, D.E.; Holland, J.H. Classifier systems and genetic algorithms. Artificial Intelligence 1989, *40*, 235-292.
21. Vissikirsky, V.A. An approach to the organization of qualitative knowledge proceed from computer simulation results, Proceedings of ASME International - Greek Section, First National Conference on Recent Advances in Mechanical Engineering, Patras, Greece, 17-20 September, 2001.
22. Vissikirsky, V.A.; Kalavrouziotis, I.K.; Drakatos, P.A. Fuzzy logic on decision making of processing wastewaters, Proceedings of ESDA2002: 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey, 8-11 July, 2002.