DOI https://doi.org/10.15407/csc.2021.01.015
УДК 519.816

**Н.К. ТИМОФІЄВА**, доктор техн. наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, 03187, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 40, Київ, Україна, tymnad@gmail.com

# ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДИЧНОСТІ ДЛЯ ГЕНЕРУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

*Вводяться правила генерування комбінаторних конфігурацій. Виявлення закономірностей упорядкування певної комбінаторної множини дозволяє розробляти нескладні процедури її генерування для довільного значення n і строго доводити, що ця множина містить усі нетотожні комбінаторні конфігурації. Особливістю комбінаторних множин є утворення їх із базової множини за заданими правилами. Для цього досить увести базову множину A, з елементів якої проводиться їхнє формування, тип цих об'єктів і систему правил їхнього генерування.*

***Ключові слова:*** *комбінаторна конфігурація, генерування комбінаторних множин, властивість періодичності, сполучення без повторень, перестановки, розбиття натурального числа.*

## Вступ

Запроваджуються правила генерування комбінаторних конфігурацій. Показано, що впорядкуванню комбінаторних множин властиві закономірності, завдяки яким вони генеруються тими ж самими процедурами. Це — властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. На її основі розроблено рекурентно-періодичний метод, орієнтований на генерування комбінаторних конфігурацій різних типів. За його допомогою впорядкування комбінаторних конфігурацій проводиться тими самими правилами, а деякі з них генеруються різними модифікаціями того самого алгоритму.

## Постановка задачі

Комбінаторні множини можуть бути впорядковані як хаотично, так і за строгими правилами. Аналіз цих множин показує, що багато таких упорядкувань проводиться за тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з таких закономірностей, характерною для багатьох типів комбінаторних конфігурацій, є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу їхнього утворення. Задача полягає у виявленні та формулюванні загальних правил утворення та впорядкування комбінаторних множин різних типів та різних упорядкувань.

## Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Дослідженню комбінаторних конфігурацій та способам їхнього генерування в літературі присвячено багато робіт, наприклад [1—6]. Генерування комбінаторних множин, як правило, здійснюється алгоритмами за строгою схемою або як рівномірно розподілені випадкові об'єкти. У таких алгоритмах закладаються процедури, які підвищують ефективність їхньої роботи за швидкодією. Деякі алгоритми орієнтовані на розв'язання прикладних задач комбінаторної оптимізації, тому за їхньою допомогою генерується не вся комбінаторна множина, а її певна підмножина. Оскільки в природі існує багато впорядкувань комбінаторних конфігурацій, то ефективність та швидкодія алгоритмів залежить від того, яка множина з існуючих вибрана для генерування і задає правила для її впорядкування. На основі цих правил розробляється певний алгоритм.

Як показав аналіз цих множин, вони можуть упорядковуватися тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Одна з таких властивостей описана у [7]. У її основі лежить характерна для багатьох типів комбінаторних конфігурацій *властивість періодичності*, яка випливає з рекурентного способу їхнього утворення. Виявлення закономірностей упорядкування певної множини дозволяє розробляти нескладні процедури її генерування для довільного значення $n$ і строго доводити, що ця множина містить усі нетотожні комбінаторні конфігурації. Якщо провести аналіз деяких, відомих у літературі алгоритмів генерування комбінаторних об'єктів, то можна помітити, що в них на інтуїтивному рівні закладено правила їхнього впорядкування, описані в [7].

## Пропонований підхід

Для розв'язання поставленої задачі здійснюється аналіз структури комбінаторних множин. Цей аналіз показує, що утворення комбінаторних конфігурацій проводиться за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів, а їхнє строге впорядкування виконується також за трьома правилами. Тобто, для генерування комбінаторних множин достатньо задати тип комбінаторної конфігурації, базову множину та правила їхнього утворення та впорядкування.

## Базові множини та комбінаторні конфігурації

Оскільки елементами комбінаторних множин є комбінаторні конфігурації певного типу, розглянемо, як вони утворюються та за якими правилами впорядковуються.

Термін комбінаторна конфігурація запровадив французький математик Клод Берж [8]. У літературі комбінаторну конфігурацію формалізують так [8, 9]. Нехай $X=\{1,2,...,m\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$. На $Y$ задано строгий лінійний порядок $y_1<y_2<...<y_n$. Відображення $\varphi: X\to Y$, що задовольняє деякому комплексу обмежень $\lambda$, названо конфігурацією. Комплекс обмежень $\lambda$, якому задовольняє відображення $\varphi$, визначає деякий клас конфігурацій, що відповідає умовам на комбінаторні конструкції в задачі, що розглядається. Наведене означення відображає перестановки.

Комбінаторні конфігурації різних типів утворюються трьома рекурентними комбінаторними операторами із елементів заданої множини, а їхнє впорядкування також проводиться за трьома правилами. Для задання цих правил та встановлення властивостей об'єктів, що розглядаються, введемо таке їхнє формулювання.

Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A=\{a_1,...,a_n\}$ [7]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$. Під символом $w_j^k\in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), $\eta\in\{1,...,n\}$— кількість елементів у $w^k$, $W=\{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс $k$ ($k\in\{1,...,q\}$) у $w^k$ позначає порядковий номер $w^k$ у $W$, $q$ — кількість $w^k$ у $W$.

Комбінаторні конфігурації будь-якого типу формуються з елементів заданої множини характерною для кожного з них операцією. Одні з цих операцій змінюють порядок розміщення в них елементів, інші змінюють їхній склад. В подальшому вживатимемо термін як "операція" так і "оператор", що мають один і той же сенс.

Наведемо найпростіші відомі комбінаторні конфігурації й уведемо оператори, за допомогою яких вони утворюються.

*Вибірки*. Нехай задано множину $A=\{a_1,...,a_n\}$. Із неї одержимо $\eta$-вибірку. Число $\eta$ називають об'ємом вибірки. У $\eta$-вибірках в залежності від умов задачі або враховується порядок розташування в них елементів (тоді їх називають $\eta$-перестановками або $\eta$-розміщеннями) або не враховують. У цьому випадку вони називаються $\eta$-сполученнями. Інколи перестановкою називають упорядковану вибірку з *n* елементів множини *A* по *n*. Множину всіляких неупорядкованих вибірок (сполучень), яка містить одну пусту, називають ще множиною всіх підмножин. Оскільки потужність множини неупорядкованих вибірок без повторень дорівнює $2^n$, то її порівнюють з бінарними послідовностями. Сполученням назвемо неупорядковану вибірку з *n* елементів по $\eta$, у якій можна як допускати, так і не допускати повторень, $\eta \in \{1,...,n\}$. Якщо у множині сполучення без повторень не існує $w = \varnothing$, тоді їхня кількість дорівнює $2^n - 1$.

*Перестановки* в літературі досліджено досить ґрунтовно. Їх ще називають упорядкованими вибірками з *n* елементів множини *A* по *n*, бієкцією множини *A* на *A*, функцією. В подальшому користуємося терміном "перестановка". Нехай задано скінченну множину $A = \{a_1,..., a_n\}$, яка складається з *n* елементів будь-якої природи. Перенумеруємо їх від 1 до *n* і вважатимемо, що елементами виступають саме ці числа. Назвемо перестановкою будь-яке розміщення чисел $1, 2,..., n$ у деякому порядку. Число різних перестановок з *n* символів дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, який позначається $n!$. Якщо в заданій перестановці поміняти місцями будь-які елементи (не обов'язково розміщені поряд), а всі інші залишимо на місці, то одержимо нову перестановку. Операцію, яка змінює порядок елементів у перестановці, називають підстановкою. Підстановка розкладається на цикли. Цикли довжиною два називають транспозиціями, тобто транспозиції — це найпростіші підстановки й означають переміщення двох елементів. В подальшому користуємося цим терміном.

*Розбиттям цілого додатного числа* називається подання *n* у вигляді суми цілих додатних чисел $n = w_1 + w_2 + ... + w_\eta$, $w_j > 0$, $j = \overline{1,\eta}$, $\eta \in \{1,..., n\}$. Розділяють упорядковані (композиції) і невпорядковані розбиття числа. В упорядкованих ураховуються розбиття з однаковою кількістю і однаковим значенням їхніх компонент, які відрізняються між собою лише порядком.

Будь-яке невпорядковане розбиття *w* числа *n* утворюється з попереднього $w^*$ відніманням від компонент $w_j^*$ значення $x$ і додаванням цього значення $x$ до компонент $w_l^*$, $j \neq l$, $w^* = (w_1^*,..., w_j^*,..., w_l^*,..., w_\eta^*)$.

*Розбиттям n-елементної множини A* на $\eta$ підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $\rho = (\rho_1,..., \rho_\eta)$ таку, що $\rho_1 \cup ... \cup \rho_\eta = A$, $\rho_j \cap \rho_l = \varnothing$, $j \neq l$, $\rho_j \neq \varnothing$, $j, l \in \{1,..., \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_j = \{a_1,..., a_{\xi_j}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1,..., n\}$, може мати від 1 до *n* елементів ($\xi_j \in \{1,..., n\}$). Кількість підмножин $\rho_j$ у розбитті $\rho$ також може бути від 1 до *n* ($\eta \in \{1,..., n\}$).

*Бінарна послідовність* — це множина $r = (r_1,..., r_n)$, елементи якої $r_j \in \{0, 1\}$. Дві множини $r, r^* \in B$ відрізняються між собою або різним значенням елементів або їхнім порядком за однакового значення $r_j \in r$, $r_t^* \in r^*$, $j \neq t$, $j, t \in \{1,..., n\}$, $r = (r_1,..., r_j,..., r_n)$, $r^* = (r_1^*,...$ $..., r_t^*,..., r_n^*)$. В подальшому користуємося позначеннями як *r*, так і *w*.

**Означення 1**. Множину $A = \{a_1,..., a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, назвемо базовою.

**Означення 2**. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини *A* утворюється комбінаторна конфігурація $w^k$.

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний. Розглянемо їх на прикладі сполучення без повторень, перестановок та розбиття натурального числа.

Будь-яке сполучення утворюється вибиранням певних елементів із базової множини $A = \{a_1,..., a_n\}$. Цю операцію назвемо операцією вибирання і позначимо її як $\alpha(A^0)$, $A^0 \subset A$.

У літературі перестановку зараховують до впорядкованої вибірки, тому її можна утворювати й операцією вибирання. Отже, перестановки $w = (w_1,..., w_n)$ утворюються або транспозицією $\alpha'(w_j, w_l)$, або вибиранням $\alpha(A^0)$, $A^0 \subset A$.

Операцію, за допомогою якої утворюється розбиття числа, назвемо додавання-віднімання або арифметичною і позначимо її $\alpha''(w_j - x_t, w_l + \overline{x_s})$, $x_t, \overline{x_s} \in \{1, ..., n-1\}$, $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p'} \overline{x_j} = x$, $x < n$, $t, s, p, p' \in \{1, ..., n-1\}$.

Ураховуючи зазначене, узагальнимо способи утворення комбінаторних конфігурацій.

Комбінаторні конфігурації $w^k$ з елементів базової множини *A* утворюються рекурентним комбінаторним оператором вибирання. Комбінаторна конфігурація $w^k$ у множині $W$ утворюється з $w^i \in W$ рекурентним комбінаторним оператором транспозиції або арифметичним. Перша $w^1$ утворюється з елементів множини *A* оператором вибирання.

Дійсно, якщо $w^k$ — перестановка, то вона містить усі елементи з базової множини *A*. Тому наступна $w^k$ утворюється оператором транспозиції з будь-якого попереднього $w^i$. Якщо $w^k$ — розбиття числа, то сумою його компонент є число $n$ і наступне $w^k$ утворюється арифметичним оператором з будь-якого попереднього $w^i$. Бінарна послідовність $w^k$ утворюється з $w^i$ або арифметичною операцією, або вибиранням елементів з базової множини.

Якщо вибірка $w^k$ відрізняється від попередніх хоча б одним елементом $a_j$, який вибирається лише з базової множини *A*, то $w^k$ неможливо утворити з будь-якої попередньої $w^i$ операцією вибирання.

**Означення 3**. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k$ та $w^i$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Якщо $w^k$ та $w^i$ складаються з підмножин (блоків), то вони ізоморфні, якщо кількість їхніх підмножин однакова і для будь-якого блоку $\rho_j^k \subset w^k$ в комбінаторній конфігурації $w^i$ знайдеться підмножина $\rho_t^i \subset w^i$, для якої $\xi_j^k = \xi_t^i$, де $\xi_j^k, \xi_t^i$ – кількість елементів у підмножинах $\rho_j^k \subset w^k$ та $\rho_t^i \subset w^i$.

Нетотожні бінарні послідовності $w^k$ і $w^i$, які містять однакову кількість одиниць, ізоморфні.

**Означення 4**. Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Рекурентнікомбінаторніоператоривибирання й арифметичний породжують як ізоморфні, так й неізоморфні комбінаторні конфігурації $w^k \in W$.

Множина $W$ складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій $W_\eta$.

Оскільки базова множина *A* містить усі елементи, необхідні для формування $w^k \in W$, то перша $w^1 \in W$ для всіх типів комбінаторних конфігурацій утворюється з *A* оператором вибирання. Аналіз утворення комбінаторної конфігурації $w^k \in W$ показує, що їхній тип визначається рекурентним комбінаторним оператором. За способом утворення вони розділяються на прості, які утворюються одним і лише одним типом рекурентних комбінаторних операторів, і комбіновані, які утворюються кількома рекурентними комбінаторними операторами [7]. До простих комбінаторних конфігурацій віднесемо перестановки, розбиття числа, сполучення, бінарні послідовності. До комбінованих віднесемо розбиття множини на підмножини, розміщення з повтореннями і без повторень.

У множині *W*, елементи якої утворені кількома рекурентними комбінаторними операторами, виокремимо підмножину $W^* \subset W$, будь-який елемент якої утворюється одним типом рекурентних комбінаторних операторів, і підмножини $W^{**} \subset W$, комбінаторні конфігурації яких утворено іншим типом. Назвемо $W^* \subset W$ базовою підмножиною множини *W*.

**Лема**. Комбінаторні конфігурації подібні, якщо вони утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхні множини генеруються модифікацією того ж алгоритму.

**Доведення**. Для доведення цього твердження розглянемо утворення комбінаторних конфігурацій. Сполучення як з повтореннями так і без повторень утворюються єдиною операцією — вибиранням. Перестановки утворюються транспозицією або вибиранням. Розбиття натурального числа утворюються однією операцією — арифметичною. Розбиття *n*-елементної множини на підмножини утворюються двома рекурентними комбінаторними операторами: арифметичним або транспозицією. Розміщення як з повтореннями, так і без повторень утворюються двома операціями: вибиранням або транспозицією. Бінарні послідовності можуть утворюватися двома операціями: арифметичною або операцією вибирання. До того ж, кількість бінарних послідовностей у їхній множині дорівнює $2^n$, а кількість сполучень без повторень — відповідно $2^n - 1$.

Виходячи з цього, генерування розбиття $n$-елементної множини на підмножини проводиться алгоритмом розбиття числа та генеруванням перестановок. Упорядкування розміщення без повторень і з повтореннями проводиться алгоритмами генерування сполучень і перестановок. Формування бінарних послідовностей з використанням рекурентного комбінаторного оператора вибирання проводиться за тими ж правилами, що і утворення сполучень без повторень.

Таким чином, за способом утворення подібними є такі комбінаторні конфігурації: бінарні послідовності та сполучення без повторень; розбиття $n$-елементної множини на підмножини та розбиття натурального числа й перестановки; розміщення без повторень (з повтореннями) та сполучення без повторень (з повтореннями) й перестановки. Ці множини подібні за способом генерування, оскільки вони впорядковуються або одним і тим же алгоритмом, або його модифікацією (бінарні послідовності та сполучення без повторень генеруються модифікацією того самого алгоритму, базова підмножина $W^* \subset W$ розбиття $n$-елементної множини на підмножини та розбиття натурального числа генеруються тим самим алгоритмом). Тобто, вказані комбінаторні конфігурації є подібними за способом їхнього утворення та впорядкування, що й доводить лему.

Як показує аналіз комбінаторних множин, вони можуть упорядковуватися тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з таких закономірностей, характерною для багатьох типів комбінаторних конфігурацій, є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу їхнього утворення. В описаних у літературі алгоритмах генерування комбінаторних конфігурацій на інтуїтивному рівні закладено правила впорядкування, що ґрунтуються на цій властивості.

Генерування комбінаторних конфігурацій включає:

а) правила, за якими формуються комбінаторні конфігурації, тобто визначаються рекурентні комбінаторні оператори;

б) правила, за якими впорядковуються комбінаторні конфігурації. Ці правила визначаються на основі аналізу структури певної множини.

Упорядкуємо множину $W$ комбінаторних конфігурацій $w^k$, $k \in \{1,...,q\}$ так, що наступна комбінаторна конфігурація $w^{k+1}$ формується з попередньої $w^k$ або з базової множини $A$ характерним для заданого їхнього типу рекурентним комбінаторним оператором (транспозицією, вибиранням чи арифметичним оператором).

Оскільки в упорядкованій множині комбінаторних конфігурацій $w^k$ розміщено в певному порядку, то при розробці процедур їхнього генерування множину $A$, з елементів якої оператором вибирання утворюються $w^k$, розглянемо як упорядковану й позначимо її $A = (a_1,..., a_n)$. Множину $w^k \in W$ також вважаємо впорядкованою й позначимо її $w^k = (w_1^k,..., w_\eta^k)$.

Упорядкуємо підмножини $W_\eta$ множини $W$ (крім перестановок), починаючи з $\eta = 1$ і закінчуючи $\eta = n$.

У будь-якій упорядкованій множині комбінаторних конфігурацій назвемо інтервалом $L_{b,c} (b < c)$ підмножину послідовних $w^k$ з початковим номером $b$ і кінцевим $c$. Його довжиною назвемо кількість комбінаторних конфігурацій, які містяться в цьому інтервалі, включаючи $b$ та $c$. Позначимо її $H_{b,c}$. Розглянемо приклад заданого впорядкування сполучень без повторень (*а*), бінарних послідовностей (*б*), які впорядковані тим самим алгоритмом для $n=5$ і $\eta = 1, 2, 3, 4, 5$ (табл.). Для порівняння наведемо множину розбиттів натурального числа для $n=9$ (в), множину перестановок для $n=4$ (г) і множину розбиттів $n$-елементної множини $A$ на підмножини для $n=5$ (д).

Розглянемо інтервал $L_{1,5}$. В нього входять сполучення (множина *а*), які складаються з одного елемента. Назвемо його інтервалом нульового рангу. В подальшому інтервалом нульового рангу назвемо підмножини, сполучення яких відрізняються одне від одного останнім елементом, наприклад, інтервали $L_{6,9}$, $L_{10,12}$, $L_{13,14}$, $L_{16,18}$, $L_{19,20}$, $L_{22,23}$.

Інтервали нульового рангу бінарних послідовностей (множина *б*) збігаються з інтервалами цього ж рангу сполучень і відрізняються розміщенням у них однієї одиниці, номер позиції якої збігається з номером позиції, вибраного при формуванні сполучення $w^k$ елемента $a_j \in A$.

Формування інтервалів нульового рангу розбиттів натурального числа $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$ (множина *в*) проводиться так, що $w_1^k = w_1^{k-1} - 1$ та $w_2^k = w_2^{k-1} + 1$ для $b + 1 \le k \le c$, а для компонент, що залишилися $w_j^k = w_j^{k\cdot}$ $(j \ge 3)$. Наприклад, інтервали $L_{2,5}$, $L_{6,9}$, $L_{10,11}$, $L_{13,15}$, $L_{16,17}$, $L_{19,21}$.

Формування інтервалів нульового рангу перестановок (множина *г*) проводиться так, що наступна $w^k \in W$ в ньому формується з попередньої однією транспозицією двох сусідніх (першого і другого, або другого і третього) елементів. Наприклад, інтервали $L_{1,2}$, $L_{3,4}$, $L_{5,6}$.

Формування інтервалів нульового рангу розбиттів множини на підмножини (множина *д*) проводиться так, що будь-яке розбиття $\rho^k$ в ньому утворюється з попереднього однією транспозицією *t*-го елемента *j*-ї підмножини $\rho^{k-1}$-го розбиття і першого елемента $(j+1)$-ї підмножини $\rho^{k-1}$-го розбиття. Наприклад, інтервали $L_{2,6}$, $L_{7,10}$, $L_{11,13}$, $L_{14,15}$, $L_{16,16}$.

За індукції назвемо інтервалом $\sigma$-го рангу інтервал, в усіх сполученнях якого елементи першої, другої і т.д. позицій (крім останньої) збігаються (множина *а*). В інтервалах $\sigma$-го рангу (множина *б*) одиниці в бінарних послідовностях тих же позицій, що й у сполученнях, також збігаються. У множині *в*) інтервали $\sigma$-го рангу містять розбиття, компоненти яких, починаючи з третьої, збігаються. У множині *г*) інтервали $\sigma$-го рангу містять перестановки, компоненти яких, починаючи з четвертої, збігаються. У множині *д*) інтервали $\sigma$-го рангу містять розбиття множини на підмножини, компоненти яких, починаючи з другої, що містяться в $(j+1)$-й підмножині, збігаються.

Звідси випливає, що інтервали більшого рангу розбиваються на інтервали меншого рангу. Наприклад, інтервал другого рангу $L_{16,25}$ сполучень і бінарних послідовностей складається з трьох інтервалів першого рангу $L_{16,21}$, $L_{22,24}$, $L_{25,25}$. Останні складаються з інтервалів нульового рангу. Інтервал другого рангу разбиттів натурального числа $n$ ($L_{13,18}$) складається з двох інтервалів першого рангу ($L_{13,17}$, $L_{18,18}$), а останні — з інтервалів нульового рангу. Інтервал другого рангу перестановок ($L_{1,24}$) складається з чотирьох інтервалів першого рангу, а кожен з останніх — з трьох інтервалів нульового рангу.

Отже, множина $W$ будь-якого типу комбінаторних конфігурацій упорядковується інтервалами нульового рангу і процес їхнього впорядкування є періодичним.

Інтервал $\sigma$-го рангу упорядкованої множини всіляких комбінаторних конфігурацій складається з інтервалів $(\sigma - 1)$-го рангу.

Із наведених прикладів видно, що частині впорядкованих множин властива періодичність.

**Властивість періодичності** впорядкування комбінаторних множин випливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій і полягає в тому, що ці множини впорядковано інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за тими самими правилами.

Таким чином, для генерування комбінаторних множин з використанням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються:

*а*) інтервал нульового рангу;

*б*) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу);

*в*) інтервал $\sigma$-го рангу.

На основі властивості періодичності та оговорених правил розроблено рекурентно-періодичний метод генерування комбінаторних конфігурацій [10].

**Означення 5.** Алгоритм генерування довільної множини комбінаторних конфігурацій $W$ назвемо коректним, якщо в результаті його роботи отримана множина $\tilde{W}$ взаємно однозначно відображає $W$.

Для певного впорядкування деяких комбінаторних конфігурацій уведемо правила утворення інтервалу нульового рангу, обмежувальної комбінаторної конфігурації та інтервалу $\sigma$-го рангу. Ці правила є різними для різних впорядкувань.

Уведемо правила генерування бінарних послідовностей.

**Правило 1**. Нетотожні бінарні послідовності інтервалу нульового рангу утворюються рекурентним комбінаторним оператором вибирання одного елемента з базової множини $A$ так, що наступна $w^{k+1} \in L_{b,c}$ відрізняється від попередньої $w^k \in L_{b,c}$ двома елементами $w_j^{k+1} = 0$, $w_{j+1}^{k+1} = a_j = 1$, $w_j^k = a_j = 1$, $w_{j+1}^k = 0$, а $w_t^{k+1} = w_t^k$ для $t = \overline{1, j-1}$ і $w_s^{k+1} = w_s^k = 0$ для $s = \overline{j+2, n}$, $j = \overline{\delta, n}$, $r_j \in \{0, 1\}$.

Величину $\delta$ назвемо коефіцієнтом інтервалу нульового рангу.

**Правило 2**. Обмежувальна бінарна послідовність утворюється операцією вибирання так, що елементи $w_j^k = a_j = 1$, $j = \overline{\delta', \delta}$, а $w_s^k = 0$ для $s = \overline{\delta+1, n}$ і $w_1^k = w_1^{k-1}, ..., w_{\delta'-2}^k = w_{\delta'-2}^{k-1}$, $w_{\delta'-1}^k = 0$, $w^k = (w_1^k, ..., w_{\delta'}^k, ..., w_\delta^k, ..., w_n^k)$, $\delta' \in \{1, ..., \delta-1\}$. Перша бінарна послідовність підмножини ізоморфних бінарних послідовностей утворюється так, що $w_1^k = a_1, ..., w_{\delta'-2}^k = a_{\eta^k}$, а $w_j^k = 0$ для $j = \overline{\eta^k + 1, n}$.

**Правило 3**. Будь-яка бінарна послідовність інтервалу $\delta$-го рангу утворюється вибиранням з елементів $a_{\delta'}, ..., a_n$ множини $A$, які розміщуються в позиціях $\delta', ..., n$ множини $w^k$ для усіх $k = \overline{b, c}$. Елементи $w_j^k = w_j^{k\cdot}$, $j = \overline{1, \delta' - 1}$, $b, c \in \{1, ..., 2^n\}$.

Змінну $\delta'$ назвемо коефіцієнтом інтервалу $\sigma$-го рангу і $\delta' \in \{1, ..., n-1\}$.

Оскільки сполучення та бінарні послідовності — подібні то можна довести, що існує впорядкування множини сполучень без повторень, для генерування якого використовуються правила 1—3.

Розглянемо розбиття $n$-елементної множини на підмножини.

**Правило 4.** Розбиття $w^k$ інтервалу нульового рангу впорядкованої множини розбиттів $W$ утворюється з попереднього однією транспозицією $t$-го елемента $j$-го блоку (підмножини) розбиття $w^{k-1}$ і першого елемента $(j+1)$-го блоку розбиття $w^{k-1}$, $t = \overline{\delta, \sum_{s=1}^{j} \xi_s^{k-1}}$,

$$\delta \in \{\sum_{s=1}^{j-1} \xi_s^{k-1} + 1, ..., \sum_{s=1}^{j} \xi_s^{k-1}\}, \; j \in \{1, ..., \eta - 1\}.$$

Кількість таких розбиттів у сусідніх інтервалах нульового рангу — різна.

В подальшому блоки (підмножини) $w_j^k$, $w_{j+1}^k$ множини $w^k$, з елементів яких утворюються розбиття інтервалу нульового рангу, назвемо підмножинами інтервалу нульового рангу. Величину $\delta$ назвемо його коефіцієнтом. Значення $\delta$ змінюється при утворенні чергового інтервалу нульового рангу за правилами, які залежать від конкретного типу розбиттів, яких виділено чотири [11].

**Правило 5.** Обмежувальне розбиття інтервалу нульового рангу формується так, що елементи $w_\delta^k, ..., w_\sigma^k$ розбиття $w^k = (w_1^k, ..., w_\delta^k, ..., w_\sigma^k, ..., w_n^k)$, які містяться в позиціях $\delta, ..., \sigma$ однією або кількома транспозиціями елементів, що належать різним блокам розбиття $w^{k-1}$, $\sigma \in \{\xi_1^k + 2, ..., n\}$, міняються місцями. Перехід до наступного елемента $i_{\sigma+1}^k$ здійснюється тоді, коли з елементів $w_1^k, ..., w_\sigma^k$ утвориться підмножина $W_\sigma \subset W$.

**Правило 6**. Інтервал $\sigma$-го рангу впорядкованої множини утворюється за правилами 4—5 і містить усі розбиття, утворені з елементів $w_1^k, ..., w_\sigma^k$.

Упорядкуємо перестановки з використанням властивості періодичності так, що наступна перестановка утворюється з попередньої однією операцією транспозиції двох елементів $w_j^k, w_l^k$.

*Таблиця*. **Упорядкування сполучень без повторень, бінарних послідовностей, розбиттів натурального числа, перестановок, розбиттів *n*-елементної множини на підмножини**

| № п/п | множина *а*) | множина *б*) | множина *в*) | множина *г*) | множина *д*) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0. | | 0, 0, 0, 0, 0 | | | |
| 1. | 1 | 1, 0, 0, 0, 0 | 9 | 1, 2, 3, 4 | (1,2,3,4,5) |
| 2. | 2 | 0, 1, 0, 0, 0 | 8,1 | 2, 1, 3, 4 | (1,2,3,4),(5) |
| 3. | 3 | 0, 0, 1, 0, 0 | 7,2 | 2, 3, 1, 4 | (5,2,3,4),(1) |
| 4. | 4 | 0, 0, 0, 1, 0 | 6,3 | 3, 2, 1, 4 | (5,1,3,4),(2) |
| 5. | 5 | 0, 0, 0, 0, 1 | 5,4 | 3, 1, 2, 4 | (5,1,2,4),(3) |
| 6. | 1,2 | 1, 1, 0, 0, 0 | 7,1,1 | 1, 3, 2, 4 | (5,1,2,3),(4) |
| 7. | 1,3 | 1, 0, 1, 0, 0 | 6,2,1 | 1, 3, 4, 2 | (1,2,3),(4,5) |
| 8. | 1,4 | 1, 0, 0, 1, 0 | 5,3,1 | 3, 1, 4, 2 | (4,2,3),(1,5) |
| 9. | 1,5 | 1, 0, 0, 0, 1 | 4,4,1 | 3, 4, 1, 2 | (4,1,3),(2,5) |
| 10. | 2,3 | 0, 1, 1, 0, 0 | 5,2,2 | 4, 3, 1, 2 | (4,1,2),(3,5) |
| 11. | 2,4 | 0, 1, 0, 1, 0 | 4,3,2 | 4, 1, 3, 2 | (5,1,2),(3,4) |
| 12. | 2,5 | 0, 1, 0, 0, 1 | 3,3,3 | 1, 4, 3, 2 | (5,3,2),(1,4) |
| 13. | 3,4 | 0, 0, 1, 1, 0 | 6,1,1,1 | 1, 4, 2, 3 | (5,3,1),(2,4) |
| 14. | 3,5 | 0, 0, 1, 0, 1 | 5,2,1,1 | 4, 1, 2, 3 | (4,5,1),(2,3) |
| 15. | 4,5 | 0, 0, 0, 1, 1 | 4,3,1,1 | 4, 2, 1, 3 | (4,5,2),(1,3) |
| 16. | 1,2,3 | 1, 1, 1, 0, 0 | 4,2,2,1 | 2, 4, 1, 3 | (3,4,5),(1,2) |
| 17. | 1,2,4 | 1, 1, 0, 1, 0 | 3,3,2,1 | 2, 1, 4, 3 | (1,2,3),(4),(5) |
| 18. | 1,2,5 | 1, 1, 0, 0, 1 | 3,2,2,2 | 1, 2, 4, 3 | (4,2,3),(1),(5) |
| 19. | 1,3,4 | 1, 0, 1, 1, 0 | 5,1,1,1,1 | 3, 2, 4, 1 | (4,1,3),(2),(5) |
| 20. | 1,3,5 | 1, 0, 1, 0, 1 | 4,2,1,1,1 | 2, 3, 4, 1 | (4,1,2),(3),(5) |
| 21. | 1,4,5 | 1, 0, 0, 1, 1 | 3,3,1,1,1 | 2, 4, 3, 1 | (5,1,2),(3),(4) |
| 22. | 2,3,4 | 0, 1, 1, 1, 0 | 3,2,2,1,1 | 4, 2, 3, 1 | (5,3,2),(1),(4) |
| 23. | 2,3,5 | 0, 1, 1, 0, 1 | 2,2,2,2,1 | 4, 3, 2, 1 | (5,3,1),(2),(4) |
| 24. | 2,4,5 | 0, 1, 0, 1, 1 | 4,1,1,1,1,1 | 3, 4, 2, 1 | (5,4,1),(2),(3) |
| 25. | 3,4,5 | 0, 0, 1, 1, 1 | 3,2,1,1,1,1 | | (5,4,2),(1),(3) |
| 26. | 1,2,3,4 | 1, 1, 1, 1, 0 | 2,2,2,1,1,1 | | (4,5,3),(1),(2) |
| 27. | 1,2,3,5 | 1, 1, 1, 0, 1 | 3,1,1,1,1,1,1 | | (1,2),(3,4),(5) |
| 28. | 1,2,4,5 | 1, 1, 0, 1, 1 | 2,2,1,1,1,1,1 | | (3,2),(1,4),(5) |
| 29. | 1,3,4,5 | 1, 0, 1, 1, 1 | 2,1,1,1,1,1,1,1 | | (3,1),(2,4),(5) |
| 30. | 2,3,4,5 | 0, 1, 1, 1, 1 | 1,1,1,1,1,1,1,1,1 | | (5,1),(2,3),(4) |
| 31. | 1,2,3,4,5 | 1, 1, 1, 1, 1 | | | (2,1),(5,3),(4) |
| 32. | | | | | (2,5),(1,3),(4) |
| 33. | | | | | (4,5),(1,2),(3) |
| 34. | | | | | (1,5),(4,2),(3) |
| 35. | | | | | (1,4),(5,2),(3) |
| 36. | | | | | (3,4),(5,1),(2) |
| 37. | | | | | (5,4),(3,1),(2) |
| 38. | | | | | (5,3),(4,1),(2) |
| 39. | | | | | (2,3),(4,5),(1) |
| 40. | | | | | (4,3),(2,5),(1) |
| 41. | | | | | (4,2),(3,5),(1) |
| 42. | | | | | (1,2),(3),(4),(5) |
| 43. | | | | | (3,2),(1),(4),(5) |
| 44. | | | | | (3,1),(2),(4),(5) |
| 45. | | | | | (4,1), (2),(3),(5) |

*Продовження табл.*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 46. | | | | | (4,2),(1),(3),(5) |
| 47. | | | | | (4,3) ,(1),(2), (5) |
| 48. | | | | | (5,1),(2),(3),(4) |
| 49. | | | | | (5,2),(1),(3),(4) |
| 50. | | | | | (5,3),(1),(2),(4) |
| 51. | | | | | (5,4),(1),(2),(3) |
| 52. | | | | | (1),(2),(3),(4),(5) |

**Правило 7.** Перестановки $w^{k+1}$ в інтервалах нульового рангу довжиною 3! утворюються з попередньої $w^k$ однією транспозицією двох сусідніх (першого, другого або третього) елементів $w_1^k, w_2^k, w_3^k$, $w^k = (w_1^k, w_2^k, w_3^k, ..., w_n^k)$.

Запишемо рекурентний вираз утворення наступної перестановки $w^{k+1}$ інтервалу нульового рангу з попередньої $w^k$, у якому використовується арифметичний оператор:

$$\omega^{k+1}(r^k, w^k) = ((w_1^k\,(1-r_1^k) + (w_2^k, r_1^k, r_2^k)), (w_1^k\, r_2^k\, r_1^k + w_2^k\,(1-r_2^k) + w_3^k\, r_3^k\, r_2^k), (w_2^k\, r_2^k\, r_3^k + w_3^k\,(1-r_3^k))). \quad (1)$$

Бінарна послідовність $r^k$ набуває значення

$$r_j^k = \begin{cases} 0, \text{ якщо } & w_j^k = w_j^{k-1}, \\ 1, \text{ якщо } & w_j^k \neq w_j^{k-1}, j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (2)$$

Вважатимемо, що перша перестановка задана і задано початкове значення бінарної послідовності $r^1 = (1, 1, 0)$. Тоді вираз для рекурентного утворення $r^{k+1}$ набуде вигляду $r^{k+1}(r^k) = ((1-r_1^k), r_2^k, (1-r_1^k))$ .

**Правило 8.** Обмежувальна перестановка задається або утворюється однією транспозицією двох елементів $\alpha(w_{\sigma-1}^k, w_\sigma^k)$, якщо $\sigma$ — непарне, і $\alpha(w_j^k, w_\sigma^k)$, якщо $\sigma$ — парне, де $j = \sigma - 1$ для другого і третього інтервалів $\sigma$-го рангу і $j \in \{(n-2)-1, ..., (n-2)-(n-3)\}$ для $t$-го інтервалу $\sigma$-го рангу, $\sigma \in \{4, ..., n\}$, $t \in \{4, ..., n\}$. Перехід до наступного елемента $w_{\sigma+1}^k$ здійснюється тоді, коли елементи $w_1^k, ..., w_\sigma^k$ утворять усі перестановки, $w^k = (w_1^k, ...w_\sigma^k, ..., w_n^k)$, $\sigma \in \{4, ..., n\}$.

**Правило 9.** Інтервал $\sigma$-го рангу впорядкованої множини $W$ утворюється з елементів $w_1^k, ..., w_\sigma^k$ за правилами 7–8 так, що його довжина дорівнює $\sigma$!.

Ці правила справедливі для багатьох упорядкувань комбінаторних множин, які мають упорядковану структуру. В їх основі лежить властивість періодичності.

Наведемо деякі алгоритми генерування комбінаторних конфігурацій рекурентно-періодичним методом, у яких використано властивість періодичності [10].

**1. Алгоритм генерування множини сполучень без повторень**

1. Задамо: $n \in N$, $k = 1$ , $\eta = 1$. Уведемо множини: базову $A = (1, 2, 3, ..., n)$; сполучення $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$ , де $w_j^k = 0$ для $j = \overline{1,\eta}$; множину $C = (c_1, ..., c_n)$ , де $c_j$ — число, що визначає номер позиції елемента в $A$, з якого починається формування інтервалу $\sigma$-го рангу, і $c_1 = 1, c_2 = 2, ..., c_\eta = \eta, ..., c_n = \eta$; множину $C' = (c_1', ..., c_n')$, де елемент $c_j'$ визначає номер позиції $t$ у множині $w^k = (w_1^k, ..., w_t^k, ..., w_\eta^k)$, в якій розміщено вибраний із множини $A$ елемент $a_j$. Перехід до п. 2.

2. Покладемо $\delta = \eta$, $\sigma = 1$, $\delta' = \delta - 1$, $\sigma' = \eta - 1$.

3. Побудова обмежувального сполучення для інтервалу ізоморфних сполучень. Покладемо $j = 1$, $t = 1$.

3.1. Покладемо $\mu_t^k = a_j$. Перехід до п. 3.2.

3.2. Покладемо $t = t + 1$ , $j = j + 1$. Перехід до п. 3.3.

3.3. Якщо $j \leq \eta$, перехід до п. 3.1. В іншому разі — виведення результатів, перехід до п. 4.

4. Якщо $\delta \leq n$, перехід до п. 5, в іншому випадку – перехід до п. 9.

5. Побудова інтервалу нульового рангу. Покладемо $j = \delta + 1$. Якщо $j \leq n$, то $k = k + 1$, переходимо до п. 5.1. В іншому випадку – до п. 6.

5.1. Покладемо $\mu_\eta^k = a_j$. Виведення $\mu^k = (\mu_1^k, ..., \mu_\eta^k)$ . Перехід до п. 5.2.

5.2. Покладемо $j = j+1$, $k = k+1$. Якщо $j \le n$, перехід до п. 5.1. В іншому разі — до п. 6.

6. Якщо $\eta = 1$, перехід до п. 7, в іншому разі — до п. 8.

7. Покладемо $\eta = \eta + 1$, $k = k+1$. Якщо $j \le n$, перехід до п. 2, в іншому разі — до п. 9.

8. Побудова обмежувального сполучення.

8.1. Покладемо $j = \delta - 1$. Перехід до п. 8.2.

8.2. Якщо $\delta \le n$, перехід до п. 8.3. В іншому разі – перехід до п. 8.7.

8.3. Покладемо $\delta' = c_j - 1$. Якщо $\delta' > 0$, перехід до п. 8.4, в іншому разі — до п. 7.

8.4. Покладемо $j = \delta'$, $\sigma = c_j'$, $\delta = \eta - \sigma' + \delta'$. Перехід до п. 8.5.

8.5. Якщо $\delta \le n$, перехід до п. 8.6, в іншому разі — до п. 8.7.

8.6. Якщо $j \le 1$, покладемо $j = 1$, $c_j = 0$, $c_j' = 0$. Перехід до п. 8.8. В іншому разі — перехід до п. 8.9.

8.7. Покладемо $j = j - 1$. Якщо $j \ge 1$, переходимо до п. 8.2, в іншому випадку — перехід до п. 7.

8.8. Якщо $c_j = 0$, покладемо $c_{j+1} = 0$, $c_{j+1}' = 0$, $\delta' = \delta' + 1$. Перехід до п. 8.9. В іншому разі — покладемо $c_j = c_{j-1}$, $c_j' = 0$, перехід до п. 8.9.

8.9. Покладемо $\zeta = \delta' + 1$, перехід до п. 8.10.

8.10. Покладемо $c_\zeta = \zeta + 1$, $\zeta = \zeta + 1$. Перехід до п. 8.11.

8.11. Якщо $\zeta \le n$, перехід до п. 8.10. В іншому разі — до п. 8.12.

8.12. Покладемо $\zeta = \delta' + 1$. Перехід до п. 8.13.

8.13. Покладемо $\mu^k_{\sigma'} = a_\zeta$, $c_\zeta' = \sigma'$, $\sigma' = \sigma' + 1$, $\zeta = \zeta + 1$. Перехід до п. 8.14.

8.14. Якщо $\zeta < \delta$, перехід до п. 8.13, в іншому разі — до п. 4.

9. Кінець роботи алгоритму.

**2. Алгоритм генерування множини бінарних послідовностей**, у якому для її формування використано рекурентний комбінаторний оператор вибирання. Він є модифікацією алгоритму 1.

1. Задамо число $n \in N$. Покладемо $k = 1, \eta = 1$. Уведемо множини: базову $A = (a_1, ..., a_n)$, де $a_j = 1$ для усіх $j = \overline{1, n}$, бінарну послідовність $r^1 = (r_1^1, ..., r_n^1)$, де $r_j^1 = 0$ для усіх $j = \overline{1, n}$, множину $C = (c_1, ..., c_n)$, де $c_j$ – число, яке визначає позицію елемента $a_j$ в $A$, з якого починається формування інтервалу $\sigma$-го рангу, і $c_1 = 1$, $c_2 = 2, ..., c_\eta = \eta$, $c_n = \eta$. Уведемо також множину $C' = (c_1', ..., c_n')$, де елемент $c_j' = \sum_{t=1}^{j} r_t^k$, якщо з позиції $j$ множини $A$ вибрано елемент $a_j \in A$. В позиціях $i \ne j$ $c_i' = 0$. Для $k$=1 виводимо результат $r^1 = (r_1^1, ..., r_n^1)$. Покладемо $k = k+1$, переходимо до п. 2.

2. Покладемо $\delta = \eta, \sigma = 1, \delta' = \delta - 1, \sigma' = \eta - 1$.

3. Побудуємо обмежувальну бінарну послідовність для інтервалу ізоморфних бінарних послідовностей. Покладемо $j = 1$.

3.1. Покладемо $r_j^k = a_j$.

3.2. Покладемо $j = j+1$. Перехід до п. 3.3.

3.3. Якщо $j \le \eta$ перехід до п. 3.1. В іншому разі — виведення $r^k = (r_1^k, ..., r_n^k)$. Перехід до п. 4.

4. Якщо $\delta \le \eta$, перехід до п. 5, в іншому разі – перехід до п. 9.

5. Побудуємо інтервал нульового рангу. Покладемо $j = \delta + 1$. Якщо $j \le n$, покладемо $k = k+1$, переходимо до п. 5.1. В іншому разі – до п. 6.

5.1. Покладемо $r_j^k = a_j$. Виведемо $r^k = (r_1^k, ..., r_n^k)$. Перехід до п. 5.2.

5.2. Покладемо $j = j+1$, $k = k+1$. Якщо $j \le n$, перехід до п. 5.1. В іншому разі — перехід до п. 6.

6. Якщо $\eta = 1$, перехід до п. 7, в іншому разі – до п.8.

7. Покладемо $\eta = \eta + 1$, $k = k+1$. Якщо $\eta \le n$, перехід до п. 2, в іншому разі – до п. 9.

8. Побудова обмежувальної бінарної послідовності.

8.1. Покладемо $j = \delta - 1$. Перехід до п. 8.2.

8.2. Якщо $\delta \le n$, перехід до п. 8.3. В іншому разі — перехід до п. 8.7.

8.3. Покладемо $\delta' = c_j - 1$. Якщо $\delta' > 0$, перехід до п. 8.4. В іншому разі — до п. 6.

8.4. Покладемо $j = \delta'$. Уведемо змінну $\sigma' = c_j'$, а $\delta = \eta - \sigma' + \delta'$. Перехід до п. 8.5.

8.5. Якщо $\delta \le n$, перехід до п. 8.6, в іншому разі — до п. 8.7.

8.6. Якщо $j \le 1$, покладемо $j = 1$, $c_j = 0$, $c_j' = 0$. Перехід до п. 8.8. В іншому разі — перехід до п. 8.9.

8.7. Покладемо $j = j+1$. Якщо $j \geq 1$, перехід до п. 8.2, в іншому разі — до п. 7.

8.8. Якщо $c_j = 0$, покладемо $c_{j+1} = 0$, $c'_{j+1} = 0$, $\delta' = \delta' + 1$ . перехід до п. 8.9. В іншому разі — покладемо $c_j = c_{j+1}$, $c'_j = 0$, перехід до п. 8.9.

8.9. Покладемо $\zeta = \delta' + 1$, перехід до п. 8.10.

8.10. Покладемо $c_\zeta = \zeta + 1$, $\zeta = \zeta + 1$ . Перехід до п. 8.11.

8.11. Якщо $\zeta \leq n$, переходимо до п. 8.10. В іншому разі — до п. 8.12.

8.12. Покладемо $\zeta = \delta' + 1$. Переходимо до п. 8.13.

8.13. Покладемо $r^k_\zeta = a_\zeta$, $c'_\zeta = \sigma'$, $\sigma' = \sigma' + 1$, $\zeta = \zeta + 1$. Перехід до п. 8.14.

8.14. Якщо $\zeta < \delta$, переходимо до п. 8.13, в іншому випадку — до п. 6.

9. Кінець роботи алгоритму 2.

**3. Алгоритм генерування множини перестановок**

1. Уведемо змінну $n \in N$ і впорядковані множини $C = (c_1, ..., c_n)$, $r^0 = (r_1, r_2, r_3)$ , $r_j = 0$, $j = \overline{1,3}$, $\mathrm{w}^1 = (1, 2, ..., n)$. Значення $c_\sigma \in C$ визначає кількість інтервалів $\sigma$-го рангу, множина $w^1$— початкова перестановка, $r^0$— бінарна послідовність. Покладемо $k = 1$, $\sigma = 4$. Якщо $n > 3$, $c_\sigma = c_\sigma - 1$. Перехід до п. 2.

2. Для першої перестановки інтервалу нульового рангу задамо бінарну послідовність $r^1 = (1, 1, 0)$. Утворення перестановки $w^1$.

3. Утворення інтервалу нульового рангу. Покладемо $j$=1. Перехід до п. 3.1.

3.1. Покладемо $k = k+1$. За виразом (1) сформуємо перестановку $w^k$ інтервалу нульового рангу. Виведення результату. За виразом (2) знайдемо бінарну послідовність $r^k$, переходимо до п. 3.2.

3.2. Покладемо $j = j+1$. Якщо $j < 6$, перехід до п. 3.1, в іншому разі — до п. 4.

4. Якщо $c_\sigma \neq 0$ , перехід до п 5, в іншому разі покладемо $c_\sigma = \sigma$, $\sigma = \sigma + 1$, переходимо до п. 5.

5. Якщо $\sigma > n$, перехід до п. 8, в іншому разі — до п. 6.

6. Побудуємо обмежувальну перестановку. Якщо $\sigma$ — парне, переходимо до пункту 6.1. В іншому разі покладемо $i = \sigma - 1$, переходимо до п. 6.2.

6.1. Якщо $(\sigma - c_\sigma) \leq 2$, покладемо $i = \sigma - 1$, переходимо до п. 6.2, в іншому разі покладемо $i = c_\sigma$, переходимо до п. 6.2.

6.2. Транспозицією двох елементів $\alpha(w^{k-1}_\sigma, w^{k-1}_i)$ формуємо обмежувальну перестановку $w^k$ та виводимо результат. Переходимо до п. 7.

7. Покладемо $c_\sigma = c_\sigma - 1$, $k = k+1$, $\sigma = 4$. Переходимо до п. 2.

8. Кінець роботи алгоритму.

**4. Алгоритм генерування множини розбиттів натурального числа**

1. Уведемо змінні $\sigma = 2$, $k = 1$, $n \in N$, $\eta = 1$ . Покладемо $w^k_j = 0$, $c_j = 0$ , $j = \overline{1,n}$.

2. Якщо $\eta = 1$, покладемо, що $w^k_j = (n)$ , виводимо отримані результати обчислень і переходимо до п. 3.

3. Покладемо $\eta = \eta + 1$, $k = k+1$. Перехід до п. 4.

4. Якщо $\eta = n$ , покладемо $w^k = (w^k_1, ..., w^k_n)$, $w^k_j = 1$ , $j = \overline{1,n}$, переходимо до п. 12. В іншому разі — до п. 5.

5. Побудуємо початкове обмежувальне розбиття підмножини ізоморфних розбиттів $W_\eta$. Покладемо, що елемент $w^k_1 = n - (\eta - 1)$, а $w^k_j = 1$, $j = \overline{2,\eta}$, $C = w^k$.

6. Запам'ятання результатів обчислень. Покладемо $k = k+1$. Якщо $w^k_1 = 2$ — перехід до п. 3. В іншому разі — перехід до п.7.

7. Формування інтервалу нульового рангу.

7.1. Обчислимо: $w^k_1 = w^{k-1}_1 - 1$, $w^k_2 = w^{k-1}_2 + 1$. Якщо $w^k_1 \geq w^k_2$ — виведення результатів, перехід до п. 7.2. В іншому разі — перехід до п. 8.

7.2. Покладемо $k = k+1$, перехід до п. 7.1.

8. Формування обмежувального розбиття. Обчислимо елементи $c_j = c_j + 1$, $j = \overline{2,\sigma}$ , а $c_1 = c_1 - (\sigma - 1)$.

9. Якщо $c_1 \geq c_2$, покладемо, що $w^k = C$. Запам'ятання отриманих результатів. Покладемо $k = k+1$, $\sigma = 2$, перехід до п. 7. В іншому разі — перехід до п. 10.

10. Побудова поточного інтервалу $\sigma$-го рангу. Покладемо $\sigma = \sigma + 1$. Якщо $\sigma \leq \eta$ , визначимо елементи $c_j \in C$ так: $c_j = c_\sigma$, $j = \overline{2, \sigma - 1}$, а $c_1 = n - \sum_{j=2}^{\eta} c_j$. Перехід до п. 11. В іншому разі — до п. 3.

11. Якщо $c_1 \ge c_2$ – перехід до п. 8, в іншому разі — до п. 3.

12. Кінець роботи алгоритму.

**5. Алгоритм генерування розбиттів *n*-елементної множини на підмножини**

Алгоритм генерування розбиттів натурального числа використовується при генеруванні розбиттів *n*-елементної множини на підмножини. Правила виділення типів розбиттів *n*-елементної множини на підмножини описано в [7, 11].

1. Уведемо змінні $n \in N$, $k=1$, $\eta = 1$. Переходимо до п. 2.

2. Якщо $\eta = 1$, покладемо $\rho^k = (\rho_1^k) = (1, 2, ... ..., n)$ виводимо отримані результати. Покладемо $k = k + 1$, переходимо до п. 3.

3. Покладемо $\eta = \eta + 1$. Якщо $\eta = n$, покладемо $\rho^k = (\rho_1^k, ..., \rho_\eta^k) = ((1), (2), ..., (n))$. Запам'ятання отриманих результатів і перейдемо до п. 16. В іншому разі – до п. 4.

4. Якщо для значення $\eta$ проведено усі розбиття натурального числа, переходимо до п. 3. В іншому разі алгоритмом розбиття натурального числа для поточного $\eta$ знайдемо чергову множину $\xi^k = (\xi_1^k, ..., \xi_\eta^k)$. Формуємо обмежувальне розбиття для підмножини ізоморфних розбиттів

$$\rho^k = \left( (1, ..., \xi_1^k), (\xi_1^k + 1, \xi_1^k + 2, ..., \xi_1^k + \xi_2^k), ... \right.$$

$$\left. ..., \left( \sum_{j=1}^{\eta-1} \xi_j^k + 1, ..., n \right) \right).$$ Запам'ятання результату.

Покладемо $k = k + 1$. Переходимо до п. 5.

5. Обчислимо елементи множини

$$C = (c_1, ..., c_n) = (1, ..., 1_{\xi_1^k}, (\xi_1^k + 1)_{\xi_1^k + 1}, ...$$

$$..., (\xi_1^k + 1)_{\xi_1^k + \xi_2^k}, ...,$$

$$(\xi_1^k + \xi_2^k + 1)_{\xi_1^k + \xi_2^k + 1}, ..., (\xi_1^k + \xi_2^k + 1)_{\xi_1^k + \xi_2^k + \xi_3^k}, ...$$

$$..., \left( \sum_{j=1}^{\eta-1} \xi_j^k + 1 \right)_{\sum_{j=1}^{\eta-1} \xi_{j+1}^k}, ...$$

де $c_j$ визначає кількість інтервалів $\sigma$-го рангу. Уведемо додаткову множину $C'$ і покладемо, що $C' = C$.

Якщо інтервал ізоморфних розбиттів належить до типу 2, то $c_j = 1$ для $j \in \{\xi_1^k + \xi_2^k, \xi_1^k + \xi_2^k + \xi_3^k, ..., n\}$. Якщо інтервал ізоморфних розбиттів належить до типу 3, то для усіх $\xi_j^k = 1$, $j = \overline{s, n}$, покладемо

$$c_t = \sum_{j=1}^{s-1} \xi_j^k + 1, t = \overline{\sum_{j=1}^{s} \xi_j^k + 1, n}, s \in \{2, ..., \eta\}.$$ Якщо інтервал ізоморфних розбиттів належить до типу 4, визначимо значення $\varsigma$ і блоки $T_j^k$, $\rho^k = (\rho_1^k, ..., \rho_\varsigma^k, T_j^k, ..., \rho_\eta^k)$, $j = \overline{1, \eta'}$. Покладемо $p = \varsigma$. Перехід до п. 6.

6. Покладемо $\sigma = \xi_1^k + 2$, $\delta = 2$, $\sigma' = 2$, де $\sigma$ — змінна, що визначає номер підмножини в $\rho^k$, для елементів яких формується інтервал $\sigma$-го рангу. Уведемо також величину $\delta' = 1$, яка визначає позицію елемента в першій множині інтервалу нульового рангу, з якої проводиться формування наступного інтервалу нульового рангу, і величину $z' = 0$, яка визначає перехід до наступної підмножини при формуванні обмежувального розбиття. Переходимо до п. 7.

7. Формуємо інтервал нульового рангу. Побудуємо *k*-те розбиття *t*-го інтервалу нульового рангу за виразом $\alpha(w_\delta^{k-1}, w_{\xi_1^{k-1}+1}^{k-1})$. Виводимо результати. Перейдемо до п. 8.

8. Покладемо $k = k + 1$, $\delta = \delta + 1$, Якщо $\delta \le \xi_1$, перехід до п. 7, в іншому разі — перехід до п. 9.

9. Покладемо $\sigma = \sigma + 1$. Якщо $\sigma > n$, переходимо до п. 10. Якщо $\sigma > \sum_{j=1}^{\sigma'} \xi_j^k$, то $\sigma' = \sigma' + 1$, $z' = 1$. Якщо $\sigma' = n$ переходимо до п. 10, в іншому разі — до п. 12.

10. Якщо розбиття належить до типу 1, 2 або 3, переходимо до п. 4. Якщо це розбиття типу 4, то для поточного блоку підмножин $T_j^k$, $j \in \{1, ..., \eta''\}$, формуємо другий інтервал усіляких розбиттів. Перехід до п. 11.

11. Покладемо $p = p + 1$, $\eta' = \sum_{j=1}^{p} \xi_j^k$. Якщо $p = \eta^k$, перейдемо до п. 4, якщо $p \ne \eta^k$, перехід до п. 9.

12. Якщо $c_\sigma = c'_\delta$, то $\delta = \delta'$, в іншому разі $\delta = c'_\sigma - c_\sigma + 1$. Перехід до п. 13.

13. Покладемо $c_\sigma = c_\sigma - 1$. Якщо $c_\sigma = 0$, покладемо, що $c_\sigma = c_\sigma$ і перейдемо до п. 9, в іншому разі — до п. 14.

14. Побудова обмежувального розбиття.

1) Елементи $\rho_j^k$ розбиття $\rho^k$, які містяться у позиціях $j = \overline{1,\sigma}$ упорядковуємо так, що $\rho_j^k < \rho_{j+1}^k$.

2) Операцією циклу з елементів $\rho_j^k$, $j = \overline{1,\sigma}$, утворюємо обмежувальне розбиття так, що $\rho_\sigma^k$ переміщується в позицію $\delta + 1$, елемент $\rho_{\sigma+1}^k$ — у позицію $\delta + 2$, і т.д. Елемент $\rho_\sigma^k$ займає позицію $\delta - 1$. Виведення результатів. Перехід до п. 15.

15. Якщо $z' = 0$, то $\delta = \begin{cases} \delta' + 1, & \text{якщо } \xi_{\sigma'}^k = 1, \\ \delta + 1, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$

Якщо $z' = 1$, то

$$\delta = \begin{cases} \delta' + 1, & \text{якщо } \xi_{\sigma'}^k = 1, \\ 1, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Покладемо $z' = 0$, $k = k + 1$, $\sigma = \sum_{j=1}^{\sigma-1} \xi_j^k + 1$, Перехід до п. 7.

16. Кінець роботи алгоритму.

Використовуючи властивість періодичності в описаних алгоритмах з метою скорочення часу обчислень або для генерування множин комбінаторних конфігурацій в іншому порядку можна розробляти спрощені процедури обчислення інтервалу нульового рангу, обмежувальної комбінаторної конфігурації та інтервалу $\sigma$-го рангу.

## Висновок

Виявлення закономірностей упорядкування певної комбінаторної множини дозволяє розробляти нескладні процедури її генерування для довільного значення *n* і строго доводити, що ця множина містить усі нетотожні комбінаторні конфігурації. Характерною особливістю комбінаторних множин є утворення їх із базової множини за заданими правилами. Для цього достатньо ввести базову множину *A*, з елементів якої проводиться їхнє формування, тип цих об'єктів і систему правил їхнього генерування. Розроблені правила дають можливість визначати кількість комбінаторних об'єктів у їхній множині, що дозволило розробити новий метод для розв'язування перелічувальних задач. Рекурентно-періодичний метод генерування комбінаторних конфігурацій дозволив розробити знаковий комбінаторний простір та довести, що комбінаторні множини мають фрактальну структуру.


ЛІТЕРАТУРА

1. *Рейнгольд Э., Ниверґельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / пер. с англ. М. : Мир, 1980. 476 с.
2. *Липский В.* Комбинаторика для программистов / пер. с польск. М. : Мир, 1988. 213 с.
3. *Эндрюс Г.* Теория разбиений / пер. с англ. М. : Наука, 1982. 276 с.
4. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Основные алгоритмы : в 3 т. / пер. с англ. М. : Мир, 1976. Т.1. 735 с.
5. *Литвиненко О. С.* Методи генерації комбінаторних конфігурацій та їх застосування в математичному і комп'ютерному моделюванні задач перевезення та обробки вантажів : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02. Х. : Ін-т проблем машинобуд. ім. А. М. Підгорного, 2018. 21 с.
6. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ. М. : Изд-во Москов. ун-та, 1985. 308 с.
7. *Тимофієва Н. К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації : автореф. дис ... докт. техн. наук. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ, 2007. 32 с.
8. *Berge C.* Principes de combinatoire. Dunod, Paris, 1968. 154 c.
9. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М. : Наука, 1977. 319 с.
10. *Тимофієва Н. К.* Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій. Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого міжвузівського науково-практичного семінару (15-16 жовтня 2010 р.). Кіровоград : Кіровогр. техн. ун-т. 2010. С. 138—141.
11. *Тимофеева Н. К.* О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества. УСиМ. 2002. 5. С. 6—23.


Надійшла 04.12.2020

REFERENCES

1. *Reinhold E., Nyverhelt Yu., Deo N.,* 1980. Kombinatornyye algoritmy. Teoriya i praktika, Translated from English, Mir, Moscow, 476 p. (In Russian).
2. *Lypskyi V.,* 1988. Kombynatoryka dlya prohrammystov, Translated from Polish, Mir, Moscow, 213 p. (In Russian).
3. *Endrius H.*, 1982. Teoriya razbienii , Translated from English, Nauka, Moscow, 276 p. (In Russian).
4. *Knut D.*, 1976. Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM. Osnovnyye algoritmy, v 3 t. Translated from English, Mir, Moscow, T. 1, 735 p. (In Russian).
5. *Lytvynenko O. S.*, 2018. "Metody heneratsiyi kombinatornykh konfihuratsiy ta yikh zastosu-vannya v matematychnomu i kompyuternomu modelyuvanni zadach perevezennya ta obrobky vantazhiv", Abstract of Candidate of Technical Sciences, 01.05.02, In-t problem mashynobud. im. A. M. Pidhornoho, Kharkiv, 21 p. (In Ukrainian).
6. *Rybnikov K. A.*, 1985. Vvedeniye v kombinatornyy analiz, Izd-vo Moscow. un-ta, Moscow, 308 p. (In Russian).
7. *Tymofiyeva N. K.*, 2007. "Teoretyko-chyslovi metody rozvyazannya zadach kombinatornoyi optymizatsiyi", Abstract of Doctor of Technical Sciences, In-t kibernetyky im. V. M. Hlushkova NAN Ukrayiny, Kyiv, 32 p. (In Ukrainian).
8. *Berge C.*, 1968. Principes de combinatoire, Dunod, Paris, 154 p.
9. *Sachkov V. N.*, 1977. Kombinatornyye metody diskretnoy matematiki, Nauka, Mos-cow, 319 p. (In Russian).
10. *Tymofiyeva N. K.*, 2010. "Rekurentno-periodychnyy metod dlya heneruvannya kombinatornykh konfihuratsiy", Kombinatorni konfihuratsiyi ta yikh zastosuvannya, Materialy desyatoho mizhvuzivskoho naukovo-praktychnoho seminaru (15-16 October 2010), Kirovohr. tekhn. un-t, Kirovohrad, pp. 138-141. (In Ukrainian).
11. *Timofeeva N. K.*, 2002. "O nekotorykh svoystvakh razbiyeniy mnozhestva na podmnozhestva", Control systems and Computers, 5, pp. 6-23. (In Russian).

Receoved 04.12.2020

*N.K. Tymofijeva*, Doctor of Technical Sciences, senior research associate, chief researcher,
International Research and Training Center for Information Technologies
and Systems of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine,
tymnad@gmail.com

## USING PERIODICITY PROPERTIES TO GENERATE COMBINATORIAL CONFIGURATIONS

**Introduction**. The rules for generating combinatorial configurations are introduced. It is shown that the ordering of combinatorial sets is characterized by regularities due to which they are generated by the same procedures. This is a property of periodicity, which follows from the recurrent method of formation and ordering of combinatorial configurations. Based on it, a recurrent-periodic method has been developed, focused on generating combinatorial configurations of different types. With its help, the ordering of combinatorial configurations is carried out according to the same rules, and some of them are generated by different modifications of the same algorithm.

**Formulation of the problem**. Combinatorial sets can be ordered both chaotically and under strict rules. Analysis of these sets shows that they are ordered by the same procedures and there are patterns of their generation. One of such regularities, which is characteristic of many types of combinatorial configurations, is the property of periodicity, which follows from the recurrent method of their formation. The problem is to identify and formulate general rules by which combinatorial sets of different types and different orders are formed and ordered.

**The proposed approach.** To solve this problem, the structure of combinatorial sets is analyzed. This analysis shows that the formation of combinatorial configurations is carried out using three recurrent combinatorial operators, and their strict ordering is also performed according to three rules. That is, to generate combinatorial sets it is enough to specify the type of combinatorial configuration, the base set and the rules of their formation and ordering.

**Conclusion**. Identifying patterns of ordering of a certain combinatorial set allows to develop simple procedures for its generation for an arbitrary value $n$ and to strictly prove that this set contains all non-identical combinatorial configurations. A characteristic feature of combinatorial sets is their formation from the base set according to given rules. For this purpose it is enough to enter the basic set $A$ from which elements their formation is carried out, type of these objects and system of rules of their generation.

***Keywords:*** *combinatorial configuration, generation of combinatorial sets, periodicity property, combination without repetitions, permutations, division of a natural number.*