УДК 519.21

П.С. КНОПОВ, Е.И. КАСИЦКАЯ

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Аннотация. Рассмотрена задача стохастического программирования, в которой эмпирическая функция строится по нестационарным наблюдениям с непрерывным временем. Исследован стационарный в узком смысле случайный процесс, удовлетворяющий условию сильного перемешивания. Приведены условия, при которых эмпирическая оценка является состоятельной, и оценены ее большие уклонения.

Ключевые слова: задача стохастического программирования, стационарный эргодический случайный процесс, условие сильного перемешивания, большие уклонения.

ВВЕДЕНИЕ

Задача стохастического программирования возникает при необходимости принятия решения в условиях стохастической неопределенности и риска. Оптимизируется среднее значение показателя качества управления, зависящего от случайного параметра.

Непрямые методы решения задач стохастического программирования состоят в аппроксимации стохастической задачи приближенной детерминированной задачей. Одним из известных непрямых методов стохастического программирования является так называемый метод эмпирических средних, в котором показатели качества управления аппроксимируются их эмпирическими оценками. Поэтому одна из основных проблем — оценка точности и обоснование сходимости такой аппроксимации при увеличении числа наблюдений.

В настоящей работе рассматриваются зависимые нестационарные наблюдения для процесса с непрерывным временем. Используются эргодические теоремы для случайных процессов, а также теоремы о больших уклонениях для зависимых наблюдений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что $\{\xi(t),\, t\in\mathbb{R}\}$ — стационарный в узком смысле эргодический случайный процесс с непрерывными траекториями, заданный на полном вероятностном пространстве (Ω, G, P) и принимающий значения в некотором метрическом пространстве (Y,ρ); $X=[a;b]\subset\mathbb{R}$; $h:\mathbb{R}\times X\times Y\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, выпуклая по второму аргументу.

Исследуем задачу

$$F_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T h(t,x,\xi(t))dt\to\min,\; x\in X. \tag{1}$$

Пусть выполнены следующие условия:

а) $\sup\{E[\max|h(t,x,\xi(t))|,\, x\in X],\, t\geq 0\}<\infty$;

б) при любом $x\in X$ существует $F(x)=\lim EF_T(x),\; T\to\infty$;

в) существуют такие $x_0\in X$, $c>0$, что

$$F(x)\geq F(x_0)+c|x-x_0|,\; x\in X. \tag{2}$$

Из условия в) вытекает, что x_0 является единственным решением задачи

$$F(x)\to\min,\; x\in X. \tag{3}$$

Из выпуклости по второму аргументу функции h следует выпуклость функции $F_T(x)$ при любых T, ω, а также выпуклость $EF_T(x)$ при всех T и выпуклость $F(x)$.

Для произвольной функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим

$$g'_+(x) = \lim \frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}, \ \Delta \to +0, \tag{4}$$

$$g'_-(x) = \lim \frac{g(x-\Delta)-g(x)}{\Delta}, \ \Delta \to +0, \tag{5}$$

если эти пределы существуют.

Обозначим $g_T(x) = EF_T(x)$, $x \in X$. Так как из выпуклости функции следует существование для нее пределов (4), (5), получаем, что такие пределы существуют:

— при всех t, y для функции $h(t, \cdot, y)$;
— для любого t функции $Eh(t, \cdot, \xi(t))$;
— для всех T, ω функции $F_T(\cdot)$;
— при всех T для $g_T(\cdot)$;
— для $F(\cdot)$.

Лемма 1 [1]. Пусть имеется функция $u: X \times \Omega \to \mathbb{R}$, выпуклая по первому аргументу и измеримая по второму, причем $E|u(x,\omega)| < \infty$, $x \in X$. Обозначим $v(x) = Eu(x,\omega)$. Тогда

$$v'_+(x) = Eu'_+(x,\omega), v'_-(x) = Eu'_-(x,\omega).$$

В силу леммы 1 для всех $t \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $x \in X$ имеем

$$(Eh)'_+(t,x,\xi(t)) = E\{h'_+(t,x,\xi(t))\},$$

$$(Eh)'_-(t,x,\xi(t)) = E\{h'_-(t,x,\xi(t))\},$$

$$(g_T)'_+(x) = E\{(F_T)'_+(x)\}, (g_T)'_-(x) = E\{(F_T)'_-(x)\}.$$

Лемма 2. Пусть, кроме сделанных предположений, справедливы также следующие:

1) процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом

$$\alpha(\tau) \le \frac{c_0}{1+\tau^{1+\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0;$$

2) существует такое $\delta > \frac{2}{\varepsilon}$, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$E|h'_+(t,x_0,\xi(t))|^{2+\delta} < \infty, \ E|h'_-(t,x_0,\xi(t))|^{2+\delta} < \infty;$$

3) найдется такое $c' > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$E[h'_+(t,x_0,\xi(t))]^2 \le c', \ E[h'_-(t,x_0,\xi(t))]^2 \le c';$$

4) $(g_T)'_+(x_0) \to F'_+(x_0), (g_T)'_-(x_0) \to F'_-(x_0)$, $T \to \infty$.

Тогда с вероятностью 1 получаем

$$(F_T)'_+(x_0) \to F'_+(x_0), \ T \to \infty;$$

$$(F_T)'_-(x_0) \to F'_-(x_0), \ T \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$\theta_T = (F_T)'_+(x_0) - E\{(F_T)'_+(x_0)\}.$$

Имеем
$$E\theta_T^2 = E\left[\frac{1}{T}\int_0^T h'_+(t, x_0, \xi(t))dt - E\,\frac{1}{T}\int_0^T h'_+(t, x_0, \xi(t))dt\right]^2 =$$

$$= E\left[\frac{1}{T}\int_0^T h'_+(t, x_0, \xi(t))dt - \frac{1}{T}\int_0^T Eh'_+(t, x_0, \xi(t))dt\right]^2 =$$

$$= E\left[\frac{1}{T}\int_0^T [h'_+(t, x_0, \xi(t)) - Eh'_+(t, x_0, \xi(t))]dt\right]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [h'_+(t, x_0, \xi(t)) - Eh'_+(t, x_0, \xi(t))]\times\right.$$

$$\left.\times[h'_+(s, x_0, \xi(s)) - Eh'_+(s, x_0, \xi(s))]dsdt\right\} = E\,\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \beta_t\beta_s dsdt,$$

где $\beta_t = h'_+(t, x_0, \xi(t)) - Eh'_+(t, x_0, \xi(t))$.

Далее, $|E\beta_t\beta_s| \le c_1 / (1 + |t-s|^{1+\varepsilon'})$, $\varepsilon' > 0$.

Следовательно,

$$E\theta_T^2 \le \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \frac{c_1}{1 + |t-s|^{1+\varepsilon'}}dsdt \le \frac{c_2}{T}.$$

Обозначим $T(n) = n^2$. Тогда $P\{\theta_{T(n)} \to 0,\ n \to \infty\} = 1$.

Введем
$$\varphi_n = \sup|\theta_T - \theta_{T(n)}|,\ T(n) \le T \le T(n+1).$$

Получаем $|\theta_T| \le |\theta_{T(n)}| + \varphi_n$.

Имеем
$$\theta_T - \theta_{T(n)} = \frac{1}{T}\int_0^T \beta_t dt - \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2} \beta_t dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \beta_t dt - \frac{1}{T}\int_0^{n^2} \beta_t dt + \frac{1}{T}\int_0^{n^2} \beta_t dt - \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2} \beta_t dt = \frac{1}{T}\int_{n^2}^T \beta_t dt + \left(\frac{n^2}{T} - 1\right)\theta_{n^2}.$$

Обозначим
$$\delta_n = \sup\left|\frac{1}{T}\int_{n^2}^T \beta_t dt\right|,\ T(n) \le T \le T(n+1).$$

Тогда
$$\varphi_n \le \delta_n + \sup\left|\left(\frac{n^2}{T} - 1\right)\theta_{T(n)}\right|,\ T(n) \le T \le T(n+1). \tag{6}$$

Далее,

$$E\delta_n^2 = E\sup\frac{1}{T^2}\int_{n^2}^T\int_{n^2}^T \beta_t\beta_s dsdt,\ T(n) \le T \le T(n+1) \le$$

$$\le E\,\frac{1}{n^4}\int_{n^2}^{(n+1)^2}\int_{n^2}^{(n+1)^2} |\beta_t\beta_s|\,dsdt \le \frac{c_3}{n^4}[(n+1)^2 - n^2]^2 \le \frac{c_4}{n^2}.$$

Следовательно, $P\{\delta_n \to 0,\ n \to \infty\} = 1$.

Так как при $n^2 \le T \le (n+1)^2$ имеем

$$\left|\frac{n^2}{T}-1\right| \le \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}-1\right| = \left|\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}-1\right| \le 1,$$

из (6) следует $P\{\varphi_n \to 0, n \to \infty\} = 1$. Тогда $P\{\theta_T \to 0, T \to \infty\} = 1$.

Аналогично оценивается левая производная. Теперь из условия 4 следует утверждение леммы 2.

Теорема 1. С вероятностью 1 существует $T_0 = T_0(\omega)$ такое, что при всех $T > T_0$ задача (1) имеет единственное решение $x_T = x_0$.

Доказательство. В силу (2) $F'_+(x_0) \ge c$, $F'_-(x_0) \ge c$.

По лемме 2 с вероятностью 1, начиная с некоторого T_0,

$$(F_T)'_+(x_0) > 0, \ (F_T)'_-(x_0) > 0. \tag{7}$$

Из (7) и выпуклости F_T вытекает утверждение теоремы.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Используем некоторые понятия теории больших уклонений.

Определение 1 [2]. Пусть S — сепарабельное банахово пространство, $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный в узком смысле случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, G, P), принимающий значения в S. Обозначим

$$B(t_1, t_2) = \sigma\{\xi(t), t_1 \le t \le t_2\}.$$

При $\tau > 0$ случайные величины $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $p \ge 2$, называются τ-измеримо отделенными, если

$$-\infty \le t_1 \le s_1 < t_2 \le s_2 < \ldots < t_p \le s_p \le +\infty; \ t_j - s_{j-1} \ge \tau,$$

причем φ_j является $B(t_j, s_j)$-измеримой.

Определение 2 [2]. Будем говорить, что случайный процесс из определения 1 удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания, если существуют $\tau_0 \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ и невозрастающая функция $\alpha : \{\tau > \tau_0\} \to [1; +\infty)$ такие, что $\alpha(\tau) \to 1$, $\tau \to \infty$,

$$||\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_p||_{L(1)} \le \prod_{j=1}^{p} ||\varphi_j||_{L[\alpha(\tau)]}$$

при всех $p \ge 2$, $\tau > \tau_0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, τ-измеримо отделенных,

$$||\varphi||_{L(r)} = (E|\varphi|^r)^{1/r}.$$

Обозначим $C(X)$ множество всех непрерывных действительных функций, определенных на X. Как известно [3], $C(X)^* = M(X)$ — совокупность ограниченных знаковых мер на X.

Теорема 2 [4]. Пусть $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный в узком смысле эргодический случайный процесс с непрерывными траекториями, удовлетворяющий первой гипотезе гиперперемешивания на (Ω, G, P), принимающий значения в компактном выпуклом множестве $K \subset C(X)$.

Тогда для каждой меры $Q \in M(X)$ существует

$$\Lambda(Q) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E \exp\left\{ \int_X \int_0^T \xi(t)(x) dt Q(dx) \right\}$$

и для любого замкнутого $A \subset K$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt \in A \right\} \le -\inf\{\Lambda^*(g), g \in A\},$$

причем

$$\Lambda^*(g) = \sup\left\{ \int_X g(x)Q(dx) - \Lambda(Q), Q \in M(X) \right\}$$

является неотрицательной выпуклой полунепрерывной снизу функцией.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вернемся к задаче (1).

Теорема 3. Пусть процесс $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания. Предположим, что существует такое $L > 0$, что для всех t, ω выполняется неравенство

$$|h'_+(t, x_0, \xi(t))| \le L, \ |h'_-(t, x_0, \xi(t))| \le L.$$

Тогда

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P(A_T^c) \le -\inf\{V^*(z), z \in [-L; 0]\}, \tag{8}$$

где $V^*(z) = \sup\{zQ(X) - V(Q), Q \in M(X)\}$,

$$V(Q) = \lim \frac{1}{T} \ln E\exp\{Q(X) \times$$

$$\times \int_0^T \min[h'_+(t, x_0, \xi(t)), h'_-(t, x_0, \xi(t))]dt\}, \ T \to \infty,$$

$$A_T = \{\omega : \arg\min F_T(x) = \{x_0\}, x \in X\}, \ A_T^c = \Omega - A_T.$$

Доказательство. Имеем

$$P(A_T^c) = P\{\min[(F_T)'_+(x_0), (F_T)'_-(x_0)] \in [-L; 0]\} \le$$

$$\le P\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \min[h'_+(t, x_0, \xi(t)), h'_-(t, x_0, \xi(t))]dt \in [-L; 0] \right\}. \tag{9}$$

Обозначим $K = \{\alpha(x) = \alpha, \ x \in X; \ \alpha \in [-L; L]\}$. Очевидно, что K — компактное выпуклое подмножество $C(X)$.

Исследуем функцию

$$a_t = a_t(x) = \min[h'_+(t, x_0, \xi(t)), h'_-(t, x_0, \xi(t))], \ x \in X.$$

При всех t, ω имеем $a_t(\cdot) \in K$. Положим $K_1 = \{\alpha(x) = \alpha, x \in X; \alpha \in [-L; 0]\}$. Получаем, что K_1 — замкнутое подмножество K. Далее,

$$P\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \min[h'_+(t, x_0, \xi(t)), h'_-(t, x_0, \xi(t))]dt \in [-L; 0] \right\} =$$

$$= P\left\{ \left(\frac{1}{T}\int_0^T a_t dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_t dt(x), x \in X \right) \in K_1 \right\}. \tag{10}$$

Применим теорему 2. Имеем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T a_t dt \in K_1 \right\} \le -\inf\{V^*(z),\, z\in K_1\}, \tag{11}$$

где $V^*(z) = \sup\{zQ(X) - V(Q), Q \in M(X)\}$,

$$V(Q) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln E \exp\left\{ \int_0^T \int_X a_t Q(dx) dt \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln E \exp\left\{ Q(X) \int_0^T a_t dt \right\}.$$

Из (9)–(11) вытекает (8). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, отмечаем, что полученные результаты можно использовать при решении различных задач стохастической оптимизации, которые возникают в теории распознавания, регрессионном анализе, где появляется необходимость нахождения оптимальных решений при нестационарных наблюдениях и непрерывном времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. О больших уклонениях эмпирических оценок в задаче стохастического программирования при нестационарных наблюдениях. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. Т. 46, № 5. С. 46–50.
2. Deuscel J.-D., Stroock D.W. Large deviations. Boston, etc.: Academ. Press, Inc., 1989. 310 p.
3. Dunford N., Schwartz J. Linear operators, Part I: General theory. New York: Interscience, 1957. 896 p.
4. Knopov P., Kasitskaya E. Large deviations for the method of empirical means in stochastic optimization problems with continuous time observations. *Optimization Methods and Applications. In Honor of the 80-th Birthday of Ivan V. Sergienko.* Butenko S., Pardalos P.M., and Shylo V. (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 263–275.

Надійшла до редакції 05.12.2018

П.С. Кнопов, Є.Й. Касіцька

ПРО ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ЕМПІРИЧНИХ ОЦІНОК В ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА НЕСТАЦІОНАРНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Анотація. Розглянуто задачу стохастичного програмування, в якій емпірична функція будується за нестаціонарними спостереженнями з неперервним часом. Досліджено стаціонарний у вузькому розумінні випадковий процес, що задовольняє умові сильного перемішування. Наведено умови, за яких емпірична оцінка є консистентною, та оцінено її великі відхилення.

Ключові слова: задача стохастичного програмування, стаціонарний ергодичний випадковий процес, умова сильного перемішування, великі відхилення.

P.S. Knopov, E.J. Kasitskaya

ON LARGE DEVIATIONS OF EMPIRICAL ESTIMATES IN A STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM WITH NONSTATIONARY OBSERVATIONS AND CONTINUOUS TIME

Abstract. The paper considers a stochastic programming problem with the empirical function constructed on nonstationary observations and continuous time. A stationary in a strict sense random process satisfying the strong mixing condition is investigated in the problem. The conditions under which the empirical estimate is consistent are given and large deviations of the estimate are considered.

Keywords: stochastic programming problem, stationary ergodic random process, strong mixing condition, large deviations.

Кнопов Павел Соломонович,
чл.-кор. НАН Украины, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: knopov1@yahoo.com.

Касицкая Евгения Иосифовна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.kasitskaya@gmail.com.