

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ТОЧЕК КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ

Аннотация. На примере управления процессом нагрева тонкой пластины предложен подход для синтеза сосредоточенных управлений объектами с распределенными параметрами. Одновременно оптимизируются места расположения как управляющих сосредоточенных воздействий, так и точек контроля. Получены формулы для компонент градиента функционала по оптимизируемым параметрам, позволяющие использовать методы оптимизации первого порядка для численного решения задачи.

Ключевые слова: процесс нагрева, тонкая пластина, синтез управления, точечный источник, точка замера, нелокальное условие, метод проекции градиента.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследована задача синтеза управления объектами с распределенными параметрами с обратной связью с одновременной оптимизацией мест размещения точек сосредоточенных управлений и точек контроля состояния объекта. В качестве объекта выбран процесс управления нагревом точечными источниками тепла тонкой пластины, на которой установлены датчики температуры. Результаты замеров температуры в точках контроля используются для формирования текущих значений управляющих воздействий — плотности источников.

Современный уровень состояния средств телемеханики, измерительной и микропроцессорной техники позволяет проектировать и создавать системы автоматического управления и регулирования для объектов с сосредоточенными и распределенными параметрами, математические модели которых описываются различными видами дифференциальных уравнений [1–8].

Системы управления с обратной связью для объектов с сосредоточенными параметрами нашли широкое применение на практике в автоматических системах управления и регулирования многих реальных объектов и процессов. Подобные системы для объектов с распределенными параметрами пока не получили достаточно широкого применения, что связано как с проблемами теоретического характера, так и с проблемами технической реализации систем управления с обратной связью. Это обусловлено большой пространственной протяженностью, невозможностью получения оперативной и достаточно точной информации о текущем состоянии от всех точек объекта, своевременной реализации управляющих воздействий, распределенных во всех или в некоторых точках объекта, и другими причинами. Тем не менее, работы в этом направлении актуальны, и для многих технических объектов и технологических процессов с распределенными параметрами реализованы системы автоматического управления и регулирования [3–5]. Особенности рассмотренной в данной статье задачи синтеза управляющих воздействий таковы: 1) процесс нагрева пластины осуществляется сосредоточенными источниками тепла, места размещения которых требуется оптимизировать; 2) проводится оптимизация мест размещения точек контроля состояния объекта; 3) некоторые параметры процесса (начальное состояние пластины и температура внешней среды) точно не известны, а заданы множества их возможных значений; 4) с помощью линейной обратной связи задача синтеза управления сосредоточенными источниками приведена к задаче параметрического оптимального управления.

В работе получены формулы градиента целевого функционала по координатам мест расположения сосредоточенных воздействий и контроля (обратной связи), а также параметрам обратной связи. Эти формулы позволили использовать

известные эффективные численные методы оптимизации первого порядка для численного решения рассматриваемой задачи.

Предлагаемый подход к построению систем управления сосредоточенными управляющими воздействиями с обратной связью может быть применен в управлении многими другими технологическими процессами и техническими объектами с распределенными параметрами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу управления с обратной связью процессом нагрева тонкой пластины за счет внешних точечно-сосредоточенных источников. Процесс может быть описан следующей начально-краевой задачей [9]:

$$u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta_i(t) \delta(x - \eta^i), \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q = \{(x, t) : x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, T]\}, \quad u(x, 0) = \varphi(x) = \operatorname{const} \in \Phi, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \lambda [u(x, t) - \theta], \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь функция $u(x, t)$ — непрерывная и почти всюду дважды непрерывно-дифференцируемая по x , кроме точек $x = \eta^i$, $i = 1, \dots, N_c$, и почти всюду непрерывно дифференцируемая по t ; n — внешняя нормаль к границе Γ . Функция $u(x, t)$ определяет значение температуры пластины в точке $x \in \Omega$ в момент времени t ; a , λ_0 , λ — параметры процесса, значения которых заданы; Ω — область, занимаемая пластиной с границей Γ , в частности пусть она имеет прямоугольную форму

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underline{a}_1 \leq x_1 \leq \overline{a}_1, \underline{a}_2 \leq x_2 \leq \overline{a}_2\},$$

$\underline{a}_i, \overline{a}_i$, $i = 1, 2$, заданы.

Будем считать, что начальная температура пластины во всех точках одинакова, но точно неизвестна. Известно множество (диапазон) $\Phi \subset \mathbb{R}$ возможных начальных состояний и соответствующая функция плотности $\rho_\Phi(\varphi)$ такая, что

$$\rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \Phi, \quad \int_{\Phi} \rho_\Phi(\varphi) = 1.$$

Аналогично, температура внешней среды $\theta = \operatorname{const}$ точно неизвестна, а задано множество ее возможных значений $\Theta \subset \mathbb{R}$ и соответствующая функция плотности $\rho_\Theta(\theta)$ такая, что

$$\rho_\Theta(\theta) \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \quad \int_{\Theta} \rho_\Theta(\theta) = 1.$$

Множества возможных значений начальной температуры и внешней среды могут быть определены конечным числом их дискретных значений

$$\Phi = \{\varphi_i, i = 1, \dots, N_\varphi\}, \quad \Theta = \{\theta_j, j = 1, \dots, N_\theta\} \quad (4)$$

с заданными значениями вероятности

$$p_i^\varphi = P(\varphi = \varphi_i) \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N_\varphi,$$

$$p_j^\theta = P(\theta = \theta_j) \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, N_\theta.$$

Кусочно-непрерывные функции $\vartheta_i(t)$ определяют плотности источников, сосредоточенных в точках пластины $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i) \in \Omega$, $i = 1, \dots, N_c$, осуществляющих ее нагрев. Для определенной в области Ω двумерной функции Дирака $\delta(x)$ и произвольных интегрируемой функции $f(x)$ и точки $\bar{x} \in \Omega$ имеет место

$$\iint_{\Omega} f(x) \delta(x - \bar{x}) dx = f(\bar{x}), \quad \iint_{\Omega} \delta(x) dx = 1.$$

Пусть допустимые значения управляющих воздействий определены, например, следующим образом:

$$\underline{\vartheta}_i \leq \vartheta_i(t) \leq \overline{\vartheta}_i, \quad i=1, \dots, N_c, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где $\underline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_i$ — заданные величины, $i=1, \dots, N_c$.

Точки размещения $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$ источников тепла должны удовлетворять естественному условию:

$$\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i) \in \Omega, \quad \underline{a}_1 \leq \eta_1^i \leq \overline{a}_1, \quad \underline{a}_2 \leq \eta_2^i \leq \overline{a}_2, \quad i=1, \dots, N_c. \quad (6)$$

Критерий качества управления определим функционалом

$$J(\vartheta, \eta) = \int \int_{\Phi \Theta} I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (7)$$

$$I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta) = \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t)\|_{L^2_{N_c}[0, T]}^2. \quad (8)$$

Здесь $\mu(x) \geq 0, x \in \Omega$, — заданная весовая функция. В формуле (8) $\varepsilon > 0, \hat{\vartheta}(t)$ — параметры регуляризации, назначаемые согласно известным схемам [7].

Функционал (7), (8) характеризует качество управления процессом нагрева в среднем по всем возможным начальным температурам пластины и температурам внешней среды, $u(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta)$ — решение начально-краевой задачи (1)–(3) при точечных управляющих воздействиях $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_{N_c}(t))$, размещенных соответственно в точках $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i), i=1, \dots, N_c$, с начальным условием $u(x, 0) = \varphi, x \in \Omega$, при температуре внешней среды, равной θ .

Задача управления процессом нагрева пластины заключается в определении оптимальных относительно функционала (7) допустимых значений управляющих воздействий $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_{N_c}(t))$ — плотности сосредоточенных (точечных) источников и мест их расположения $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$.

Обозначим $W(x, t; \vartheta, \eta)$ множество всех решений начально-краевой задачи (1)–(3) при всевозможных допустимых начальных температурах $\varphi \in \Phi$ и значений внешних температур $\theta \in \Theta$. Тогда $W(x, t; \vartheta, \eta)$ представляет собой «пучок» решений начально-краевой задачи (1)–(3), полученных при использовании точечных управляющих воздействий $\vartheta(t)$, размещенных в точках η при всевозможных $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$. В таком случае функционал (7) характеризует качество выбора оптимизируемых (ϑ, η) при одновременном управлении всем пучком траекторий решений начально-краевой задачи (1)–(3).

В случае дискретно заданных множеств возможных начальных и внешних температур (4) целевой функционал примет вид

$$J(\vartheta, \eta) = \sum_{\gamma_1=1}^{N_{\varphi}} \sum_{\gamma_2=1}^{N_{\theta}} I(\vartheta, \eta; \varphi_{\gamma_1}, \theta_{\gamma_2}) p_{\gamma_1}^{\varphi} p_{\gamma_2}^{\theta}. \quad (9)$$

Пусть управление процессом нагрева пластины осуществляется с учетом того, что в N_o точках ξ^j пластины

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \Omega, \quad \underline{a}_1 \leq \xi_1^j \leq \overline{a}_1, \quad \underline{a}_2 \leq \xi_2^j \leq \overline{a}_2, \quad j=1, \dots, N_o, \quad (10)$$

непрерывно во времени проводятся замеры текущей температуры:

$$u_{\xi^j}(t) = u(\xi^j, t), \quad \xi^j \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad j=1, \dots, N_o, \quad (11)$$

Формирование текущих значений температуры точечных управляющих воздействий $\vartheta_i(t), i=1, \dots, N_c$, при наблюдении вида (11) будем осуществлять по

закону линейной обратной связи в следующем виде:

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j], \quad t \in [0, T], \quad i=1, \dots, N_c. \quad (12)$$

Здесь k_i^j — коэффициент усиления для i -го источника с учетом замеренного значения температуры в j -й точке замера; z_i^j — номинальное значение температуры пластины в j -й точке замера, которое должно поддерживаться i -м источником. Используем следующие обозначения для матриц: $K = ((k_i^j))$, $Z = ((z_i^j))$, $i=1, \dots, N_c$, $j=1, \dots, N_o$.

Подставим выражение для управления (12) при непрерывном наблюдении (11) в дифференциальное уравнение (1):

$$u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] \delta(x - \eta^i), \quad (13)$$

$$(x, t) \in Q.$$

Полученное уравнение (13) (из-за наличия в правой его части неизвестных значений фазовой переменной в некоторых заданных точках пространственной переменной) относится к классу нелокальных точно нагруженных по пространственной переменной дифференциальных уравнений, различные аспекты которых исследованы в работах [8, 10–13].

Теперь сформулируем рассматриваемую в данной работе задачу.

Требуется определить оптимальные в смысле функционала (7), (8) (или (9), (8) в случае дискретно заданных множеств возможных начальных состояний пластины и внешней температуры) допустимые места размещения сосредоточенных управляющих источников тепла η^i , $i=1, \dots, N_c$, и точек обратной связи-замеров состояния $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{N_o})$, удовлетворяющие условиям (6), (10), и допустимые значения параметров обратной связи K , Z , при которых удовлетворяются условия (5).

Таким образом, в рассматриваемой задаче оптимизируемыми параметрами являются постоянные параметры $\eta \in \mathbb{R}^{2N_c}$, $\xi \in \mathbb{R}^{2N_o}$, $K, Z \in \mathbb{R}^{N_c \times N_o}$, общее число которых составляет $n = 2(N_c N_o + N_o + N_c)$. Объединим все оптимизируемые в задаче векторы параметров в один, введя обозначение $y = (K, Z, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$. Тогда функционал (7), (8) примет вид

$$J(y) = \iint_{\Phi \Theta} I(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (14)$$

$$I(y; \varphi, \theta) = \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, T; y, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|y - \hat{y}\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (15)$$

Решение начально-краевой задачи (13), (2), (3) при допустимых векторе параметров y , начальном условии φ и температуре внешней среды θ обозначим $u(x, t; y, \varphi, \theta)$. Здесь \hat{y} , $\varepsilon > 0$ — параметры регуляризации.

Поставленную задачу синтеза управляющих воздействий можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами. Особенности задачи управления являются: 1) нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными; 2) функционал, характеризующий поведение пучка решений начально-краевой задачи (13), (2), (3) с заданными множествами возможных начальных условий и параметров внешней среды; 3) наличие в дифференциальном уравнении функции Дирака; 4) оптимизируемым в задаче оптимального управления является конечномерный вектор.

Важно отметить еще одну особенность полученной задачи синтеза управляющих процессом параметров. Как видно из дифференциального уравнения (13), оптимизируемые параметры участвуют в них нелинейно. Отсюда следует нели-

нейность зависимости $u(x, t; y, \varphi, \theta)$ от параметров y , а следовательно целевые функционалы (7), (8), (9) не являются квадратичными по синтезируемым параметрам. Поэтому, несмотря на выпуклость функционала исходной первоначальной задачи оптимального управления по $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, рассматриваемая задача в общем случае может быть не выпуклой, многоэкстремальной по y . В связи с этим при решении задачи необходимо использовать какие-либо стратегии отыскания глобального оптимума. Например, проводить многократное решение оптимизационной задачи с различными начальными значениями синтезируемых параметров или же, в случае применения локальных методов оптимизации, исходя из экспертной информации, использовать «хорошие» начальные приближения для оптимизируемых параметров.

ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА

Ограничения (5) на управляющие воздействия, используя (12), запишем в виде:

$$g_i(t; y) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c, \quad (16)$$

где

$$g_i(t; y) = |g_i^0(t; y)| - \frac{\overline{\vartheta}_i - \vartheta_i}{2},$$

$$g_i^0(t; y) = \frac{\overline{\vartheta}_i + \vartheta_i}{2} - \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c.$$

Для учета ограничений (16) в задаче синтеза параметров y используем метод внешнего штрафа, добавив к функционалу (14), (15) штраф за нарушение ограничений (16):

$$\tilde{J}(y) = \int \int_{\Phi \Theta} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (17)$$

$$\tilde{I}(y; \varphi, \theta) = I(y; \varphi, \theta) + \Re I_{\text{штр}}(y), \quad (18)$$

$$I_{\text{штр}}(y) = \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^T [g_i^+(t; y)]^2 dt,$$

при этом коэффициент штрафа \Re стремится к $+\infty$, $g^+(\cdot)$ означает, что $g^+(\cdot) = g(\cdot)$, если $g(\cdot) > 0$, и $g^+(\cdot) = 0$, если $g(\cdot) \leq 0$.

Учет позиционных ограничений (6), (10) при минимизации штрафного функционала (18) проводят с использованием оператора проектирования на множество, заданное этими ограничениями [7].

Компоненты градиента штрафного функционала по параметрам обратной связи в случае непрерывных множеств возможных начальных состояний Φ и температур внешней среды Θ определяются следующей теоремой.

Теорема 1. В задаче (13), (2), (3), (6), (10) компоненты градиента штрафного функционала (17), (18) по синтезируемым параметрам при обратной связи (11) определяются следующими формулами:

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} = \int \int_{\Phi \Theta} \left\{ - \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon(k_i^j - \hat{k}_i^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} = \int \int_{\Phi \Theta} \left\{ \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon(z_i^j - \hat{z}_i^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} = \iint_{\Phi \Theta} \left\{ - \int_0^T \frac{\partial u(\xi^j, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} = \iint_{\Phi \Theta} \left\{ - \int_0^T \frac{\partial \psi(\eta^i, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (22)$$

$i=1, \dots, N_c, j=1, \dots, N_o, \gamma=1, 2$. Непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам, дважды непрерывно дифференцируемая по x всюду на Ω , кроме точек $x = \xi^j, j=1, \dots, N_o$, функция $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, \varphi, \theta)$ при текущем векторе параметров y , выбранных начальном условии φ и температуре внешней среды θ , является решением следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\psi_t(x, t) = -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(x, t)) + \lambda_0 \psi(x, t) - \\ - \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) \delta(x - \xi^j), \quad (x, t) \in Q, \quad (23)$$

$$\psi(x, T) = -2\mu(x)[u(x, T; y) - U(x)], \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} = \lambda \psi(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Доказательство. Из независимости начальной температуры пластины φ и температуры внешней среды θ от синтезируемых управляющих параметров y следует справедливость следующего соотношения:

$$\operatorname{grad}_y \tilde{J}(y) = \operatorname{grad}_y \iint_{\Phi \Theta} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi = \\ = \iint_{\Phi \Theta} \operatorname{grad}_y \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi. \quad (26)$$

Поэтому достаточно получить формулы для компонент градиента функционала $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$, определенного из (18), при каких-либо произвольно выбранных допустимых значениях $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$.

В уравнении (13) введем обозначение для управляющего члена

$$V(x, t; y) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] \delta(x - \eta^i).$$

Тогда уравнение (13) будет иметь вид

$$u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + V(x, t; y), \quad (x, t) \in Q. \quad (27)$$

Для получения формул для компонент градиента $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$ используем метод приращения аргументов [7].

Правую часть уравнения (27) перенесем влево и получим равное нулю равенство. Левую часть полученного равенства умножим на пока произвольную функцию $\psi(x, t)$ и, проинтегрировав по области Ω и $t \in [0, T]$, прибавим к функционалу $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$, значение которого не изменится:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) = & \tilde{I}(y; \varphi, \theta) + \iint_Q \psi(x, t)(u_t(x, t) - a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x, t))) + \\ & + \lambda_0[u(x, t) - \theta] - V(x, t; y) dxdt. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть управление $V(x, t; y)$ за счет изменения вектора синтезируемых параметров y получило приращение $\Delta V(x, t; y) = V(x, t; y + \Delta y) - V(x, t; y)$. Соответственно некоторое приращение $\Delta u(x, t)$ получит и решение начально-краевой задачи (27), (2), (3):

$$\Delta u(x, t) = u(x, t; y + \Delta y) - u(x, t; y).$$

Ясно, что функция $\Delta u(x, t)$ должна удовлетворять условиям следующей начально-краевой задачи:

$$\Delta u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Delta u(x, t)) - \lambda_0 \Delta u(x, t) + \Delta V(x, t; y), \quad (x, t) \in Q, \quad (29)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial n} = \lambda \Delta u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (31)$$

Тогда функционал $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$ получит приращение, которое после интегрирования по частям с учетом (28)–(31), несложных преобразований и группировки можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) = & \iint_{\Omega} (\psi(x, T) + 2\mu(x)[u(x, T; y) - U(x)]) \Delta u(x, T; y) dx - \\ & - a^2 \iint_{0 \Gamma}^T \left[\lambda \psi(x, t) - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} \right] \Delta u(x, t; y) dxdt - \\ & - \iiint_Q \left[\psi_t(x, t) + a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(x, t)) - \lambda_0 \psi(x, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j \delta(x - \xi^j) \right] \Delta u(x, t; y) dxdt + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} \left[\int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j dt + 2\varepsilon(z_i^j - \hat{z}_i^j) \right] \Delta z_i^j + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} \left[- \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + 2\varepsilon(k_i^j - \hat{k}_i^j) \right] \Delta k_i^j + \\ & + \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{j=1}^{N_o} \left[- \int_0^T \frac{\partial u(\xi^j, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{i=1}^{N_c} (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j dt + 2\varepsilon(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j) \right] \Delta \xi_\gamma^j + \\ & + \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{i=1}^{N_c} \left[- \int_0^T \frac{\partial \psi(\eta^i, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + 2\varepsilon(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i) \right] \Delta \eta_\gamma^i + \\ & + o(\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(Q)}) + o(\|\Delta y\|_{R^n}). \end{aligned}$$

Учитывая произвольность функции $\psi(x, t)$, потребуем от нее, чтобы она была решением сопряженной начально-краевой задачи (23)–(25). Тогда главные части приращения функционала при приращениях компонент вектора y будут искомыми компонентами соответствующих производных функционала [7]. Отсюда следует справедливость формул (19)–(22).

В случае дискретных множеств (4) для начальных условий φ и температур внешней среды θ штрафной функционал запишем в виде

$$\tilde{J}(y) = \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \tilde{I}(y; \varphi_{\gamma_1}, \theta_{\gamma_2}) p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta. \quad (32)$$

Вместо соотношения (26) имеет место

$$\text{grad}_y \tilde{J}(y) = \text{grad}_y \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \tilde{I}(y; \varphi_{\gamma_1}, \theta_{\gamma_2}) p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta = \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \nabla_y \tilde{I}(y; \varphi_{\gamma_1}, \theta_{\gamma_2}) p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta.$$

Получение формул для компонент градиента функционала (9) в задаче с дискретными множествами начальных условий и температуры внешней среды существенно не отличается от приведенных в теореме 1 выкладок. В этом случае, в отличие от формул (19)–(22), вместо интегрирования по множествам Φ и Θ в получаемых формулах будет участвовать операция суммирования. Поэтому приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2. В задаче (13), (2), (3), (6), (10) компоненты градиента штрафного функционала (32), (18) по синтезируемым параметрам при дискретных множествах начальных условий и температуры внешней среды (4) и обратной связи (11) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} &= \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \left\{ - \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon(k_i^j - \hat{k}_i^j) \right\} p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta, \\ \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} &= \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \left\{ \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j dt + 2\varepsilon(z_i^j - \hat{z}_i^j) \right\} p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta, \\ \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} &= \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \left\{ - \int_0^T \frac{\partial u(\xi^j, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) dt + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j) \right\} p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta, \\ \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} &= \sum_{\gamma_1=1}^{N_\varphi} \sum_{\gamma_2=1}^{N_\theta} \left\{ - \int_0^T \frac{\partial \psi(\eta^i, t)}{\partial x_\gamma} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + 2\varepsilon(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i) \right\} p_{\gamma_1}^\varphi p_{\gamma_2}^\theta, \end{aligned}$$

где $i=1, \dots, N_c$, $j=1, \dots, N_o$, $\gamma=1, 2$, $\psi(x, t)$ — решение начально-краевой задачи (23)–(25).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Приведем результаты численного решения следующей задачи управления процессом нагрева пластины с обратной связью. В задаче использованы следующие значения параметров:

$$a^2 = 1, T = 1, \lambda_0 = 0.01, \lambda = 0.01, \underline{a_1} = 0, \overline{a_1} = 1, \underline{a_2} = 0, \overline{a_2} = 1,$$

$$\mu(x) \equiv 1, U(x) \equiv 10, x \in \Omega,$$

$$N_\varphi = 3, N_\theta = 3, \Phi = \{0.2, 0.3, 0.5\}, \Theta = \{6.2, 6.3, 6.5\},$$

$$P(\varphi = \varphi_i) = \frac{1}{3}, P(\theta = \theta_j) = \frac{1}{3}, i, j = 1, 2, 3,$$

$$N_o = 2, N_c = 2, n = 16, \underline{\vartheta}_i = -5, \overline{\vartheta}_i = 20, i = 1, \dots, N_c.$$

Приведем общее описание алгоритма решения задачи синтеза параметров y . При выбранных значениях коэффициента штрафа \mathfrak{R} и параметров регуляризации ε, \hat{y} на каждой итерации минимизации функционала при текущих значениях параметров y^m для всех возможных значений $\varphi_i, \theta_j, i, j=1, 2, 3$, выполняются следующие шаги: 1) решается прямая начально-краевая задача (13), (2), (3); 2) решается сопряженная задача (23)–(25); 3) вычисляются компоненты (19)–(22) градиента штрафной функции; 4) в направлении спроектированного антиградиента функционала на позиционные ограничения (6), (10) проводится одномерная минимизация:

$$\alpha_m = \min_{\alpha \geq 0} \tilde{J}(P_{(6),(10)}[y^m - \alpha \cdot \text{grad}_y \tilde{J}(y^m)]), \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь $P_{(6),(10)}[y]$ — оператор проектирования компонент вектора y на позиционные ограничения (6), (10), имеющий очевидный и конструктивный вид [7].

Указанные шаги совершаются до тех пор, пока ни будет выполнен какой-либо критерий останова, например шаг α_m , или изменение значения функционала на двух последовательных итерациях меньше заданной малой величины. Далее, согласно известным подходам при использовании полученных значений параметров y^* изменяются параметры регуляризации ε, \hat{y} [7] (в частности, уменьшается (делится на 5) ε , а за \hat{y} принимается полученное оптимальное значение вектора y^*) и проводится процедура минимизации до выполнения критерия останова. После трех корректировок параметров регуляризации коэффициент штрафа \mathfrak{R} , начиная со значения, равного 10, увеличивается в пять раз и повторяются все вышеприведенные операции. Коэффициент штрафа увеличивается до тех пор, пока оптимизируемые значения параметров y , полученные для двух последовательных значений коэффициента штрафа, изменяются на величину, большую, чем заданная требуемая точность решения всей задачи.

Для решения двумерных прямой (13), (2), (3) и сопряженной (23)–(25) не-локальных начально-краевых задач использована схема метода переменных направлений с шагами по пространственным переменным $h_{x_1} = h_{x_2} = 0.01$, а по временной переменной — $h_t = 0.005$ [14]. Для аппроксимации двумерной δ -функции Дирака использована следующая функция типа Гаусса [15]:

$$\delta_{\sigma_x} = \begin{cases} 0, & |x_1| > \sigma_{x_1} \text{ или } |x_2| > \sigma_{x_2} \\ \frac{1}{2\pi\sigma_x} \exp\left(-\left(\frac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right)\right), & |x_1| \leq \sigma_{x_1} \text{ и } |x_2| \leq \sigma_{x_2}, \end{cases}$$

где

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_{x_1}}^{\sigma_{x_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2}\right) dx_1 \int_{-\sigma_{x_2}}^{\sigma_{x_2}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right) dx_2.$$

$$\text{Несложно проверить, что имеет место } \int_{-\sigma_{x_1}}^{\sigma_{x_1}} \int_{-\sigma_{x_2}}^{\sigma_{x_2}} \delta_{\sigma_x}(x) dx_1 dx_2 = 1.$$

При численных расчетах величину σ_{x_i} выбирали равной $3h_{x_i}, i=1, 2$ (т.е. значение δ -функции «размазывалось» по девяти соседним квадратам). Такая аппроксимация δ -функции Дирака, как известно [15], сглаживает зависимость целевого функционала $\tilde{J}(y)$ от оптимизируемых координат точек расположения источников и параметров обратной связи (контроля), $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i), i=1, \dots, N_c$, $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j), j=1, \dots, N_o$, являющихся аргументами δ -функций в прямой и сопряженной начально-краевых задачах [15].

Таблица 1. Результаты некоторых итераций решения задачи с начальными приближениями y_1^0 и y_2^0 при $\Re = 50$

y	m	K	Z	ξ^1	ξ^2	η^1	η^2	$\tilde{J}(y)$
y_1^0	0	$\begin{pmatrix} -2.28 & 0.03 \\ 2.37 & -3.65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.01 & 9.24 \\ 15.12 & 13.53 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8049 \\ 0.9264 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6182 \\ 0.6375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8849 \\ 0.8464 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3332 \\ 0.3407 \end{pmatrix}$	0.0218
	5	$\begin{pmatrix} 2.26 & 0.05 \\ 2.37 & -3.65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.10 & 9.24 \\ 15.11 & 13.55 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8046 \\ 0.9267 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6430 \\ 0.6641 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8846 \\ 0.8467 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3332 \\ 0.3407 \end{pmatrix}$	0.0173
	15	$\begin{pmatrix} 2.12 & 0.18 \\ 2.44 & -3.59 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.13 & 9.24 \\ 15.07 & 13.62 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8017 \\ 0.9336 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6008 \\ 0.6374 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8817 \\ 0.8536 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3310 \\ 0.3386 \end{pmatrix}$	0.0136
	20	$\begin{pmatrix} 2.09 & 0.20 \\ 2.46 & 3.59 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.15 & 9.231 \\ 5.03 & 13.67 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8005 \\ 0.9363 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5835 \\ 0.6265 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8805 \\ 0.8563 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3302 \\ 0.3377 \end{pmatrix}$	0.0093
	22	$\begin{pmatrix} 2.09 & -0.21 \\ 2.46 & -3.58 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10.16 & 9.23 \\ 15.02 & 13.68 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7935 \\ 0.9400 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5650 \\ 0.6197 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8827 \\ 0.8579 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3493 \\ 0.3284 \end{pmatrix}$	0.0092
y_2^0	0	$\begin{pmatrix} -1.82 & 0.05 \\ -0.39 & 1.42 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.86 & 7.30 \\ 7.10 & 7.58 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6034 \\ 0.3506 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9474 \\ 0.9496 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8674 \\ 0.8696 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3770 \\ 0.4757 \end{pmatrix}$	0.0544
	10	$\begin{pmatrix} -1.83 & 0.22 \\ -0.66 & 1.17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.71 & 7.30 \\ 7.06 & 7.69 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5779 \\ 0.3353 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9478 \\ 0.9498 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8678 \\ 0.8698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3772 \\ 0.4743 \end{pmatrix}$	0.0051
	25	$\begin{pmatrix} -1.85 & 0.23 \\ -0.68 & 1.16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.61 & 7.31 \\ 7.00 & 7.80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4854 \\ 0.2517 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9485 \\ 0.9485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8685 \\ 0.8685 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3802 \\ 0.4633 \end{pmatrix}$	0.0016
	45	$\begin{pmatrix} -1.87 & 0.30 \\ -0.77 & 1.10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.49 & 7.33 \\ 6.99 & 7.82 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4911 \\ 0.2250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9485 \\ 0.9482 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8683 \\ 0.8682 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3825 \\ 0.4637 \end{pmatrix}$	0.0004
	50	$\begin{pmatrix} -1.87 & 0.30 \\ -0.77 & 1.10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.53 & 7.32 \\ 6.98 & 7.83 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4915 \\ 0.2350 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9487 \\ 0.9482 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8682 \\ 0.8680 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3825 \\ 0.4634 \end{pmatrix}$	0.0003

В табл. 1 приведены результаты решения задачи, полученные на различных итерациях из двух начальных точек $y_1^0 = ((-5.85, -3.48, -4.74, -6.15), (14.91, 11.45, 16.84, 12.38), (0.69, 0.65, 0.42, 0.47), (0.85, 0.86, 0.23, 0.23))$ и $y_2^0 = ((-2.12, 1.24, 2.38, 2.58), (8.50, 7.40, 7.70, 9.50), (0.63, 0.52, 0.84, 0.68), (0.46, 0.85, 0.24, 0.24))$, при значении коэффициента штрафа, равном $\Re = 50$, и значениях параметров регуляризации $\varepsilon = 0.01$, $\hat{y} = ((-2.0, 0.7, 0.71, -2.38), (7.96, 5.83, 7.68, 9.72), (0.50, 0.05, 0.95, 0.08), (0.42, 0.76, 0.41, 0.71))$ (в таблице элементы матриц K, Z размера 2×2 приведены по столбцам).

На рис. 1 приведены графики функции

$$\hat{J}(t) = \iint_{\Phi \Theta} \left\{ \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, t; y^*, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (33)$$

где $u(x, t; y^*, \varphi, \theta)$ — решение начально-краевой задачи (13), (2), (3) при оптимальных параметрах обратной связи y_1^* , полученных из численного решения задачи. Расчеты функции (33) проводились в предположении наличия погрешности в замерах состояния в точках контроля. Замеры с погрешностями задавались по формуле

$$\tilde{u}_{\xi^j}(t) = u_{\xi^j}(t) [1 + \chi^j(t)], \quad j = 1, \dots, N_o,$$

где значения $\chi^j(t) \in [-\nu, \nu]$ генерировались датчиком случайных чисел, распределенных по равномерному закону, значение ν соответствует уровню погрешности (в экспериментах принимали равным 0.01, что соответствовало величине погрешности замеров в 1%, а также использовали значения погрешности замеров в 2%, 5%). Как видно из рис. 1, б, траектория $\hat{J}(t)$, а следовательно сам процесс нагрева, достаточно устойчив к погрешностям замера, причем эта устойчивость сохра-

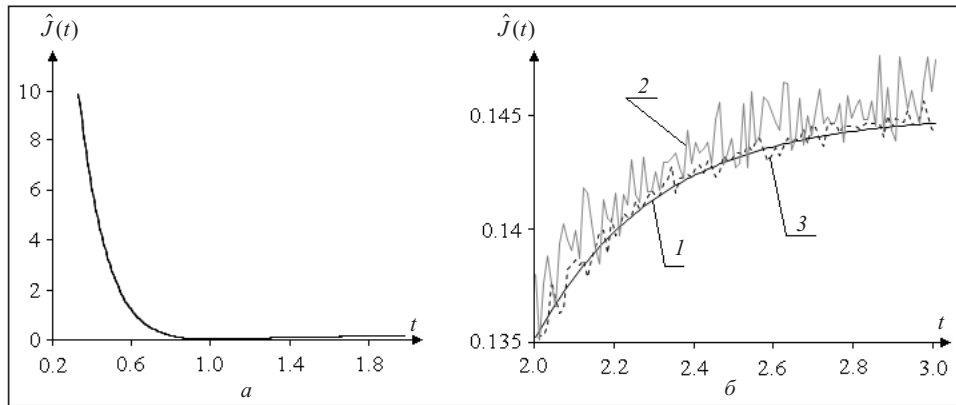


Рис. 1. Графики функции отклонения $\hat{J}(t)$: при точных замерах состояния (а); при наличии погрешности: 0% (1) 2% (2), 5% (3) в замерах состояния (б)

няется при управлении процессом при $t \geq T$. На рис. 1, а из-за малого масштаба значения функции $\hat{J}(t)$ при $t \in [0, 2]$ при разных уровнях помех практически не различаются, поэтому на рис. 1, б при $t \geq 2$ масштаб для оси значений функции $\hat{J}(t)$ увеличен.

Необходимо отметить следующее. Исходная задача синтеза управления решена при $T = 1$, т.е. для временного интервала $[0, 1]$. Тем не менее, найденные оптимальные значения параметров обратной связи u_1^* таковы, что температура $U(x)$, $x \in \Omega$, как это видно из рис. 1, а, достаточно точно поддерживается и при $t > T$. Это означает, что при $t > T$ синтезированное управление с обратной связью функционирует в режиме автоматического регулирования процессом нагрева.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для объектов с распределенными параметрами исследован предложенный подход к синтезу управления и оптимальному размещению как точечно сосредоточенных управляющих воздействий, так и точек контроля (обратной связи) состояния объекта. Предполагается, что значения некоторых параметров математической модели объекта могут быть заданы не точно, а определяться множеством их возможных значений.

Для иллюстрации подхода в качестве объекта исследования выбран процесс управления нагревом тонкой пластины заданным числом точечных источников тепла. Синтезируемое управление в текущий момент времени определяют в виде линейной комбинации от замеренных значений температуры в точках контроля, количество которых задано.

Рассматриваемая задача приведена к параметрической задаче оптимального управления. В задаче оптимизируемыми являются координаты размещения на пластине точечных источников, точек контроля, коэффициенты усиления и номинальные значения температуры в точках контроля.

Для численного решения задачи с использованием итерационных методов оптимизации первого порядка получены формулы для компонент градиента оптимизируемого функционала. Приведены результаты численных экспериментов на тестовой задаче, исследовано влияние погрешностей в измерениях текущего состояния в точках обратной связи на качество управления процессом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. Москва: Наука, 1981. 368 с.
2. Кулиев С.З. Синтез зональных управлений для одной задачи нагрева с запаздыванием в неразделенных краевых условиях. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 1. С. 124–136.
3. Ray W.H. *Advanced process control*. McGraw-Hill Book Company, 1980. 376 p.

4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1975. 568 с.
5. Егоров А.И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 504 с.
6. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. 383 p.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
8. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами. *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 9. С. 3–19.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.
10. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
11. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2014. Т. 54, № 7. С. 1096–1109.
12. Aida-zade K.R. An approach for solving nonlinearly loaded problems for linear ordinary differential equations. *Proceeding of the Institute Mathematics and Mechanics NAS Azerbaijan*. 2018. Vol. 4, N 2. P. 338–350.
13. Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.
15. Айда-заде К.Р., Багиров А.Г. О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами. *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 1. С. 52–62.

Надійшла до редакції 30.10.2018

К.Р. Айда-заде, В.А. Гашимов

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЖЕРЕЛ І ТОЧОК КОНТРОЛЮ ЗА ПРОЦЕСОМ НАГРІВАННЯ ПЛАСТИНИ

Анотація. На прикладі керування процесом нагрівання тонкої пластини запропоновано підхід до синтезу зосереджених керувань об'єктами з розподіленими параметрами. Одночасно оптимізуються місця розміщення як керувальних зосереджених впливів, так і точок контролю. Отримано формули для компонентів градієнта функціоналу за оптимізованими параметрами, що дають змогу використовувати методи оптимізації першого порядку для чисельного розв'язання задачі.

Ключові слова: процес нагрівання, тонка пластина, синтез керування, точкове джерело, точка вимірювання, нелокальна умова, метод проєкції градієнта.

K.R. Aida-zade, V.A. Hashimov

OPTIMIZING THE ARRANGEMENT OF LUMPED SOURCES AND MEASUREMENT POINTS OF PLATE HEATING PROCESS

Abstract. Using the example of control of the heating process of a thin plate, the authors propose an approach for the synthesis of lumped controls of objects with distributed parameters. At the same time, the locations of both lumped controls and control points are optimized. Formulas for the components of the functional gradient are obtained for the optimized parameters. They allow using first-order optimization methods for numerical solution of the problem.

Keywords: heating, thin plate, synthesis of control, point source, measurement point, non-local condition, gradient projection method.

Айда-заде Камиль Раджабович,

чл.-кор. НАН Азербайджана, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан,
e-mail: kamil_aydazade@rambler.ru.

Гашимов Вугар Адам оглы,

научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан,
e-mail: vugarhashimov@gmail.com.