УДК 681.5+513.6+517.9

В.П. ХАРЧЕНКО, Н.М. ГЛАЗУНОВ

ФОРМАЛЬНЫЕ И НЕАРХИМЕДОВЫ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация. Представлены новые результаты и краткий обзор новых методов теории динамических систем на многообразиях над локальными полями и формальных групп над локальными кольцами. Для исследования n-мерных многообразий, динамических систем на таких многообразиях использованы формальные структуры, в частности n-мерные формальные группы. В терминах формальных групп представлены инфинитезимальные деформации. Известный одномерный случай расширен на n-мерные ($n \geq 1$) аналитические отображения открытого p-адического полидиска (n-диска) D_p^n. Введены n-мерные аналоги модулей, возникающие в формальных и неархимедовых динамических системах, дана их формально-алгебраическая структура. Кратко представлены жесткие структуры, объекты и методы. С точки зрения системного анализа введены и описаны новые, а именно формальные и неархимедовы грани и структуры систем, отображения и итерации отображений между ними.

Ключевые слова: формальная группа, локальное кольцо, коммутативная формальная групповая схема, деформация, формальный модуль, динамическая система, модуль дифференциалов.

Памяти академика Ю.Г. Кривоноса посвящается

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Методы современной алгебры, алгебраической геометрии и алгебраической топологии широко используются в системном анализе [2–6]. Одним из пионеров в области разработки и приложений алгебраических методов в системном анализе являлся академик В.М. Глушков, работы которого [7, 8], а также публикации его учеников и последователей можно рассматривать как приложения и развитие таких методов для микропрограммирования, создания глобальных систем управления и других приложений системного анализа. Академики А.И. Кухтенко и Ю.Г. Кривонос развивали и пропагандировали математические методы системного анализа и их технические приложения [1]. Необходимость поиска путей применения формальных групп в динамических системах академик В.М. Глушков обсуждал с автором работы [9], посвященной арифметике формальних групп над локальними кольцами.

В настоящей статье системный анализ динамических систем на многообразиях расширен на формальные структуры и многообразия над неархимедовыми локальными полями. Обобщено задание динамической системы итерацией формального степенного ряда над локальным полем, действующей на p-адическом диске, который рассмотрели Дж. Любин и Хуа Чен Ли в [10, 11], с одномерного случая на n-мерный ($n \geq 1$) , т.е. на отображения p-адического полидиска (n-диска), задаваемые n-мерным ($n \geq 1$) коммутативным формальным групповым законом, с соответствующими рассмотренными ограничениями. Отметим, что n-мерный ($n \geq 1$) случай важен для системного анализа. Приведены полученные результаты и обзор новых методов теории динамических систем на многообразиях над локальными полями и формальных групп над локальными кольцами.

Локальными являются как архимедовы обычные поля вещественных и комплексных чисел, так и поля p-адических чисел, а также поля формальных степенных рядов. Для исследования многообразий и их динамики, динамических систем на многообразиях введены формальные структуры, в частности формальные группы, являющиеся инфинитезимальными деформациями групп Ли. Таким образом, в настоящей статье в терминах формальных групп представлены инфинитезимальные деформации из [1]. Формальные структуры оказались полезными при изучении как самих многообразий, так и их динамики [12–18]. Наряду с классическими архимедовыми полями вещественных и комплексных чисел рассмотрены неархимедовы поля p-адических чисел и их алгебраические и трансцендентные расширения.

Необходимость применения p-адических полей и их расширений возникает в современной математике, математической физике, современной криптографии, теории обработки сигналов, в полиномиальных задачах целочисленной оптимизации [10, 11, 19–27]. Согласно этим применениям и теории динамических систем, расширяя известный одномерный случай [10, 11], рассматриваем n-мерные ($n \geq 1$) аналитические отображения открытого p-адического полидиска (n-диска) D_p^n, причем только имеющие неподвижную точку в $\bar{0} = (0, \dots, 0)$. Среди этих отображений исследованы два их класса: отображения f, значения $f'(0)$ в нуле дифференциала которых принадлежат полидиску, т.е. необратимые и не имеющие другие неподвижные точки, за исключением $\bar{0} = (0, \dots, 0)$, и обратимые отображения. Последний класс отображений имеет обратимый в нуле дифференциал $f'(0)$, и его неподвижными точками являются периодические точки отображения f.

Одна из математических основ теории линейных систем [3, 4] — теория модулей над кольцами, широко используемая и при анализе нелинейных систем. Далее приводятся модули, возникающие в формальных и неархимедовых структурах динамики, а также жесткие структуры, объекты и методы, которые в настоящее время являются активно развивающейся областью научных исследований, о чем на основании рассмотрения геометрии симплектических многообразий впервые отметил М. Громов [28]. В динамических системах используются структуры, в которых есть аксиома времени, т.е. выделено преобразование множества в себя [29]. С точки зрения системного анализа вводятся и исследуются новые, а именно формальные и неархимедовы грани и структуры систем, отображения и итерации отображений между этими гранями и структурами. Использование жесткости позволяет минимизировать количество информации, необходимой для описания, представления и преобразований соответствующих объектов и процессов ([30, 21] и ссылки к ним).

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЕЙ И КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НАД НИМИ

Следуя [31, 32], приведем определения и краткие описания классов неархимедовых полей и их свойств, используемых в динамике на многообразиях над этими полями.

Локальным неархимедовым полем называют полное дискретно нормированное поле с конечным полем вычетов. Далее для краткости такие поля называются локальными. Иными словами, поле K локальное, если оно полно в топологии, определяемой показателем ν_K поля K, и если его поле вычетов k конечно. Предположим, что показатель ν_K нормализован, т.е. гомоморфизм $\nu_K : K^* \to Z$ мультипликативной группы поля на аддитивную группу целых чисел сюрьективен. Структура таких полей известна: если поле K имеет характеристику ноль, то оно является конечным расширением p-адического поля Q_p, которое есть пополнение поля рациональных чисел относительно p-адического показателя; если

$[K:Q_p]=n$, то $n=ef$, где f — степень классов вычетов (т.е. $f=[k:F_p]$) и $e=\nu_K(p)$; если поле K имеет характеристику $p>0$, то оно изоморфно полю $k((T))$ формальных степенных рядов, где T — униформизующий параметр.

Пусть L — конечное расширение локального поля K, l, k — их поля вычетов, $p=chark$ и $e_{L/K}$ — индекс ветвления L над K. Расширение L/K называется неразветвленным, если $e_{L/K}=1$ и расширение l/k сепарабельно. Расширение L/K называется слабо разветвленным, если p не делит $e_{L/K}$ и расширение l/k сепарабельно. Расширение L/K называется дико разветвленным, если $e_{L/K}=[L:K]=$ $=char\,k^s$, $s\geq 1$. Далее обозначим $Tr_{L/K}$ и $Norm_{L/K}$ след и норму расширения L/K соответственно, опустив индексы, когда ясно, о каком расширении идет речь.

Обозначим K_{nr} максимальное неразветвленное расширение поля K (в фиксированном алгебраическом замыкании поля K) с полем вычетов k_s, которое является алгебраическим замыканием поля k.

В неархимедовом локальном поле K каждый его элемент α имеет представление $\alpha=\varepsilon\pi^m$, где ε — единица кольца целых поля K, π — его униформизующий элемент, т.е. $\nu(\pi)=1$, m — целое рациональное число. Единицу называют главной, если $\varepsilon\equiv 1(\operatorname{mod}\pi)$. Главные единицы образуют группу. Теорему о системе образующих группы главных единиц доказал К. Гензель, а каноническую систему образующих этой группы нашел И.Р. Шафаревич [33].

Лемма 1. Если локальное поле K содержит примитивный корень ξ_p p-й степени из единицы, то $\nu_K(\xi_p-1)=\dfrac{e}{p-1}=e_1$ (т.е. e_1 — целое число).

Доказательство. Действительно, ξ_p-1 является корнем уравнения $(x+1)^{p-1}+(x+1)^{p-2}+\ldots+(x+1)+1=x^{p-1}+p(\cdots)+p$. Значение показателя ν_K на корне этого уравнения равно $\dfrac{e}{p-1}$, что доказывает требуемое.

Полное дискретно нормированное поле с алгебраически замкнутым полем вычетов называют квазилокальным.

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и $R[[X_1,\ldots,X_n]]=$ $=R[[X]]$ — кольцо формальных степенных рядов от n переменных, $(Y_1,\ldots,Y_n)$ — еще один набор n переменных, $\varphi(T)=(\varphi_i(T))$ — набор из n формальных степенных рядов от n переменных $T=(T_1,\ldots,T_n)$ без свободных членов такой, что определитель Δ, составленный из коэффициентов при линейных частях рядов φ_i, есть единица кольца R.

Пример 1. Пусть $n=2$, тогда $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1(T_1,T_2)\\ \varphi_2(T_1,T_2)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a_{11}T_1+a_{12}T_2\\ a_{21}T_1+a_{22}T_2\end{pmatrix}[\operatorname{mod}\deg 2]$ и $\Delta=\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\varepsilon$, где ε — единица кольца R.

Обозначим $\Gamma^n(T)$ множество таких наборов. Простая проверка (которую опускаем) показывает, что множество $\Gamma^n(T)$ является группой относительно закона композиции $\varphi\circ\psi(T)=\varphi(\psi(T))$ (подстановка одного набора формальных степенных рядов без свободных членов в другой набор). Обозначим $\varphi^{\circ n}(T)$ n-кратную итерацию набора $\varphi\in\Gamma^n(T)$.

Следуя Любину, который рассмотрел одномерный случай [10], выделяем интересные в динамике [10, 11] элементы множества $\Gamma^n(T)$.

Определение 1. Пусть элементы $\Gamma^n(T)$ определены над областью целостности. Будем говорить, что набор (морфизм) $\varphi\in\Gamma^n(T)$ есть морфизм кручения, если существует $m \geq 2$ такое, что $\phi^{\circ m}(T) = T$; морфизм $\varphi \in \Gamma^n(T)$ называем устойчивым, если $\varphi'(0)$ не является ни нулевой, ни диагональной матрицей с корнями из единицы на диагонали; морфизм $\varphi \in \Gamma^n(T)$ называем унипотентным, если он не является морфизмом кручения, но $\varphi'(0)$ есть унипотентная матрица.

Замечание 1. Группа $\Gamma^n(T)$ является некоммутативной при $n \geq 1$.

Обозначим $\Gamma_1^n(T)$ подмножество $\Gamma^n(T)$, состоящее из наборов степенных рядов $\varphi(T)$ таких, что $(a_{ij}) = E$, где E — единичная матрица. Нетрудная проверка (которую также опускаем) показывает, что $\Gamma_1^n(T)$ — подгруппа и, более того, нормальный делитель в $\Gamma^n(T)$.

Для неархимедовых полей аналогом комплексного аналитического многообразия является жесткое аналитическое пространство. Такие пространства введены Дж. Тэйтом для униформизации эллиптических кривых с плохой редукцией по модулю p над полями p-адических чисел [14]. Определение жесткого аналитического пространства использует алгебру Тейта, подход Гротендика к определению топологии на категории и построенную Тэйтом соответствующую топологию Гротендика.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППОВЫЕ ЗАКОНЫ И ДЕФОРМАЦИИ

Общие понятия. В динамических системах используются структуры, в которых есть аксиома времени, т.е. выделено преобразование множества в себя [29].

Определение 2. Формальным групповым законом от n переменных называется набор $F = (F_i)$ из n формальных степенных рядов $F_i \in R[[X, Y]]$ такой, что $F(X, Y) \equiv X + Y [\operatorname{mod} \deg 2]$ и $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$ (ассоциативность).

Групповой закон $F = (F_i)$ называется коммутативным, если выполнена аксиома $F(X, Y) = F(Y, X)$. В дальнейшем рассматриваются только n-мерные коммутативные групповые законы над кольцом R. Будем называть их n-мерными групповыми законами или «групповыми законами». Число n — размерность группового закона $F = (F_i)$. Простые вычисления с формальными степенными рядами показывают (см. [12], с.193), что для каждого $F = (F_i)$ существует такой набор $i_F(T)$ из n формальных степенных рядов без свободных членов, что $F(T, i_F(T)) = 0 = F(i_F(T), T)$.

Определим действие группы $\Gamma^n(T)$ на множестве n-мерных групповых законов, положив $F^{\varphi}(X, Y) = \varphi(F(\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)))$, $\varphi \in \Gamma^n(T)$.

Замечание 2. Если $F(X, Y)$ — n-мерный формальный групповой закон и $\varphi \in \Gamma^n(T)$, то $F^{\varphi}(X, Y)$ — тоже n-мерный групповой закон.

Доказательство использует свойства формальных групповых законов, группы $\Gamma^n(T)$ и определение действия этой группы на групповые законы.

3. МНОЖЕСТВО ГОМОМОРФИЗМОВ $Hom_O(F,G)$ ПАРЫ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП И КОЛЬЦО ЭНДОМОРФИЗМОВ $End_O(F)$ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Определение 3. Пусть F и G — соответственно n- и m-мерные групповые законы над R. Набор φ из m формальных степенных рядов без свободных членов от n переменных $T = (T_1, \ldots, T_n)$ называется R-гомоморфизмом из F в G, если выполнено условие $\varphi \circ F = G \circ \varphi$. (Эта запись обозначает соответствующие подстановки наборов в наборы.)

Определение 4. Множество всех R-гомоморфизмов из F в G обозначим $Hom_R(F, G)$.

Если $\varphi, \psi \in Hom_R(F, G)$, то определим их сумму $\varphi + \psi$, положив $(\varphi + \psi)(T) = G(\varphi(T), \psi(T))$. Нетрудно показать, используя ассоциативность группового закона, существование единицы и обратного элемента, что тем самым задана на множестве $Hom_R(F,G)$ структура абелевой группы, т.е. модуля над кольцом целых рациональных чисел (выкладки опускаем).

Обозначим $End_R(F)$ множество $Hom_R(F,F)$. Так как $[1]_R(T)=T$ принадлежит $End_R(F)$, имеем каноническое вложение кольца целых рациональных чисел в $End_R(F)$, задаваемое формулой $m \mapsto [m]_F(T)=F([m-1]_F(T),T)$; $[-1]_R(T)$ — набор рядов $i_F(T)$, определенный ранее. Определим в $End_R(F)$ операцию умножения, положив для $\varphi,\psi \in End_R(F)$: $\varphi \circ \psi(T)=\varphi(\psi(T))$. Нетрудно видеть, что тем самым задана на $End_R(F)$ структура (не обязательно коммутативного) кольца с единицей.

Определение 5. Пусть $\varphi \in Hom_R(F,G)$. Определим гомоморфизм Любина $c{:}\varphi \to Mat_{nm}(R)$. Он сопоставляет набору рядов, который задает φ, элемент $c(\varphi)$ алгебры матрицы $Mat_{nm}(R)$ размера $n\times m$ над R, образованный коэффициентами в линейной части гомоморфизма φ ($n=\dim_R(F)$, $m=\dim_R(G)$).

Если $n=m$ и φ — изоморфизм, то ясно, что $\det(c(\varphi))$ есть единица кольца R. Изоморфизм φ называется сильным (по Хонда, который рассмотрел одномерный случай [14]), если $c(\varphi)=E$, где E — единичная матрица.

Замечание 3. Отображение Любина $c: Hom_R(F,G)\to Mat_{nm}(R)$ является гомоморфизмом групп $Hom_R(F,G)$ и $Mat_{nm}(R)$, а в случае $c{:}End_R(F)\to$ $\to Mat_n(R)$ — гомоморфизмом колец $End_R(F)$ и $Mat_n(R)$. (Это оправдывает название «гомоморфизм Любина».)

Доказательство. Пусть $\varphi,\psi \in Hom_R(F,G){:}\, c(\varphi+\psi)=c(\varphi)+c(\psi)$; $c(0)=0$ — единица аддитивной группы $Mat_{nm}(R)$; $\varphi,\psi\in End_R(F)$, $c(\varphi\circ\psi)=c(\varphi)\times c(\psi)=$ $=c(\varphi)c(\psi)$ (умножение матриц); $c(T)=E$ — единица кольца $Mat_n(R)$.

Так как $\varphi(T)\equiv c(\varphi)T[\operatorname{mod}\deg 2]$ и $\psi(T)\equiv c(\psi)T[\operatorname{mod}\deg 2]$, то $c(\varphi\circ\psi(T))=$ $=c(c(\varphi)c(\psi)T+\{\text{члены степени} \geq 2\})=c(\varphi)c(\psi)$.

Замечание доказано.

Если R и S — коммутативные кольца с единицами и если $a\mapsto a^*$ — унитальный гомоморфизм R в S, то групповой закон $F=(F_i)$, определенный над R, можно преобразовать в групповой закон $F^*=(F_i^*)$, определенный над S. Аналогично, если $f(T)\in Hom_R(F,G)$, то можно определить $f^*(T)\in$ $\in Hom_k(F^*,G^*)$. Если $f,g\in Hom_R(F,G)$, то $(f+g)^*=f^*+g^*$, и если $f\in Hom_R(F,G)$, $h\in Hom_R(G,H)$, то $(h\circ f)^*=h^*\circ f^*$. В дальнейшем в качестве кольца S используется поле вычетов кольца R относительно его максимального идеала, и отображение * будет факторизацией относительно этого идеала.

Определение 6. Групповой закон F называют аддитивным, если $F(X,Y)=$ $=X+Y$, где $X=(X_1,\dots,X_n)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$.

Предложение 1. Если кольцо R есть Q-алгебра, то n-мерный коммутативный групповой закон над R сильно изоморфен аддитивному. (Это утверждение доказано Фрелихом с применением теории Ли, а также его можно получить использованием методов Лазара и Хонды (см. [14]).)

Изоморфизм φ, который реализует сильный изоморфизм предложения 1, имеет вид $\varphi(F(X,Y))=\varphi(X)+\varphi(Y)$; его иногда называют логарифмом коммутативного группового закона.

Далее полагаем, что в качестве кольца R используется полное дискретно нормированное кольцо O характеристики ноль с максимальным идеалом $M=\pi O$, так что поле вычетов $k=O/M$ имеет характеристику $p>0$.

Предложение 2. Отображение $c: Hom_O(F,G)\to Mat_{nm}(O)$ есть инъекция. Здесь F и G — соответственно n- и m-мерные групповые законы над O.

Доказательство. Ввиду предложения 1 имеем $F(X,Y)=\varphi^{-1}\circ(\varphi(X)+\varphi(Y))$, $G(X,Y)=\psi^{-1}\circ(\psi(X)+\psi(Y))$.

Пусть $f(T)\in Hom_O(F,G)$. Тогда $f\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi(X)+\varphi(Y))=\psi^{-1}\circ(\psi\circ f(X)+$ $+\psi\circ f(Y))$. Так как $\psi^{-1}(Y)$ обратим, то $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi(X)+\varphi(Y))=\psi\circ f(X)+$ $+\psi\circ f(Y)$. Введем замену переменных $X\to\varphi^{-1}(Y)$. Ввиду обратимости $\varphi^{-1}(T)$ эта замена невырожденная. Имеем

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ(X+Y)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(X)+\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(Y).$$

Несложно показать, используя индукцию, что набор рядов $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(T)$ имеет вид:

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(T)=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что $c\colon Hom_O(F,G)\to Mat_{nm}(O)$ инъективно. Действительно, допустим, что $c(f)=0$. Тогда $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(T)=0$ и, умножая слева и справа соответственно на ψ^{-1} и φ, получаем, что $f=0$.

Предложение 2 доказано.

Заметим, что если имеются наборы рядов ψ^{-1} и φ из предложения 2 и матрица $(a_{ij})\in Mat_{nm}(O)$, то можно построить гомоморфизм $f(T)\in Hom_K(F,G)$, определив его формулой $f(T):=\psi\circ(a_{ij})\circ\varphi^{-1}(T)$, полезной для определения формальных модулей.

Пусть F и G — соответственно n- и m-мерные групповые законы над полем k характеристики $p>0$. Пусть $f(T)\in Hom_k(F,G)$. Из результатов Фрелиха [14] следует, что имеет место разложение $f(T)=g(T^{p^h})$, где $T^{p^h}=(T_1^{p^h},\dots,T_n^{p^h})$, $c(g)\neq 0$ в $Mat_{nm}(k)$, и число $ht(f)=h$ является наибольшим целым таким, что g есть набор степенных рядов от T^{p^h}. Это число $ht(f)$ называем высотой гомоморфизма f. Набор рядов $g(T^{p^h})$ далее будет обозначаться также $g(T)\circ\pi^h$.

Пусть теперь $F(X,Y)$ — групповой закон, определенный над кольцом O.

Определение 7. Число $ht([p]_F^*(T))$ будем называть высотой редукции группового закона F и обозначать $ht(F^*)$ или $h(F^*)$. Положим $ht(F^*)=\infty$, если $[p]_F^*(T)=0$.

Замечание 4. Если групповые законы F и G, определенные над кольцом O, изоморфны, то их высоты редукции совпадают.

Пусть теперь групповые законы F и G определены над полем $k=O/M$, если не оговорено противное.

Пример 2. Приведем известные результаты Дьедонне, Лазара и Любина о гомоморфизмах и эндоморфизмах одномерных групповых законов:

— пусть F и G — одномерные групповые законы над полем k характеристики $p>0$, f — гомоморфизм из F в G над k. Тогда существует число p^r такое, что $f(T)\equiv aT^{p^r}[\bmod\deg(p^r+1)]$, $a\neq 0$. В этом случае $f(T)$ является степенным рядом от T^{p^r};

— для всех h $(1 \le h \le \infty)$ существует одномерная формальная группа высоты h, определенная над простым конечным полем характеристики $p > 0$;

— пусть $\bar{k}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$. Для любых одномерных групповых законов F, G над $\bar{k}$ с условием $h(F) = h(G)$ выполнено, что F слабо изоморфно G над $\bar{k}$. При $h(F) = h(G) = \infty$ групповой закон F сильно изоморфен G над $\bar{k}$;

— пусть F — групповой закон над $\bar{k}$ высоты $h(F) < \infty$. Тогда $End_{\bar{k}}(F)$ является максимальным порядком в центральной алгебре с делением с инвариантом $1/h$ над полем p-адических чисел.

Замечание 5. В отличие от одномерного случая для n-мерных $(n \ge 2)$ групповых законов, вообще говоря, не справедливо утверждение о том, что $Hom_k(F, G) = 0$, если высоты редукции F и G различные.

Пример 3. Если $F(X, Y) = \begin{Bmatrix} X_1 + Y_1 \\ X_2 + Y_2 + X_2 Y_2 \end{Bmatrix}$, $G(X, Y) = X_1 + Y_1$, то для $f(T_1, T_2) = T_1$ имеем $f(F_1, F_2) = G(f(X), f(Y))$, хотя $ht(F^*) = 1$, $ht(G^*) = \infty$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ДЕЙСТВИЕ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Положим $A = R[[x_1, \ldots, x_n]] = R[[x]]$ и обозначим $D(A, R)$ A-модуль R-дифференцирований кольца A, непрерывных в (X)-адической топологии [12, 14]. Модуль $D(A, R)$ есть свободный модуль ранга n, порожденный элементами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Обозначим $D^*(A, R)$ двойственный к $D(A, R)$ модуль, его элементы называются дифференциалами R-алгебры A, $D^*(A, R) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots \right.$ $\left. \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n = Df(x) \right\}$ для всякого $f(x) \in R[[x]]$. Элементы $dx_1, \ldots, dx_n$ образуют его базис. Положим $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$. Пусть Т — операция транспонирования, $\psi(x) \in A^n = A \times \ldots \times A (n)$ раз и $\omega = \psi(x) dx^{\mathrm{T}}$ — некоторый дифференциал. Если $\varphi(x) \in A^n$ и $\varphi(0) = 0$, то $\psi(\varphi(x)) D\varphi(x)$ — тоже дифференциал, который обозначим $\varphi^*(\omega)$. Очевидно, что φ является R-эндоморфизмом R модуля $D^*(A, R)$. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$. К кольцу R присоединим n переменных $t_1, \ldots, t_n$ и рассмотрим F как формальную группу над $R[[t]]$. Определим правый сдвиг (правое действие) T_t группы $F(x, y)$ формулой $T_t(x) = (F_1(x, t), \ldots$ $\ldots, F_n(x, t)) = F(x, t)$.

Определение 8. Дифференциал ω называется инвариантным на группе F, если и только если он удовлетворяет условию $T_t^* \omega = \omega$.

Пример 4. Для двумерной формальной группы при $\psi(x) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2))$,

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

дифференциал $\omega = \psi(x) dx^{\mathrm{T}}$ будет инвариантным на группе $F(x, y) = (F_1(x, y),$

$F_2(x, y))$, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, если выполнено тождество

$$\psi(x)\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)}dx = \psi(x)dx^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим $D^*(F, R)$ модуль F-инвариантных дифференциалов.

Предложение 3. Пусть $\Delta = \left(\dfrac{\partial F_1(0,t)}{\partial x_j}\right)$ и $\psi(t)=\Delta^{-1}$.

Определим $\omega(z)=(\omega_i(z))=\psi(z)dz^{\mathrm{T}}$. Тогда $\psi(0)=E$ и $D^*(F, R)$ — свободный модуль ранга n, порожденный $\omega_i(z)$.

Доказательство предложения 3 можно получить методами Хонды [14]. Дадим полный список двумерных формальных групповых законов, у которых при членах степеней больших или равных трем коэффициенты нулевые.

Предложение 4. Такие групповые законы имеют вид

$$F(x, y)=\begin{cases} x_1+y_1+\alpha x_1 y_1, \\ x_2+y_2+\beta x_2 y_2; \end{cases} \quad F_a(x, y)=\begin{cases} x_1+y_1+\alpha x_1 y_1, \\ x_2+y_2+\beta x_1 y_1; \end{cases}$$

$$F_b(x, y)=\begin{cases} x_1+y_1+\alpha x_2 y_2, \\ x_2+y_2+\beta x_2 y_2; \end{cases} \quad F_c(x, y)=\begin{cases} x_1+y_1+\alpha(x_1+x_2)(y_1+y_2), \\ x_2+y_2+\beta(x_1+x_2)(y_1+y_2), \end{cases}$$

где α, β — произвольные элементы кольца R.

Предложение 4 доказывается выписыванием общего вида двух формальных степенных рядов указанного типа и выделением из них с использованием аксиом формальных групп. Например, модуль инвариантных дифференциалов $D(F_b, R)$ группы $F_b(x, y)$ порождается элементами $\omega_1(T)=dT_1-\dfrac{\alpha dT_2}{1+\beta T_2}$ и $\omega_2(T)=\dfrac{dT_2}{1+\beta T_2}$. Нетрудно показать, что все инвариантные дифференциалы групп из предложения 4 точны, т.е. существуют элементы $f_1, f_2 \in R[[T]]$ такие, что $\omega_1(T)=df_1(T), \omega_2(T)=df_2(T)$.

Пример 5. С.П. Новиков и В.М. Бухштабер [14] указали, в частности, следующую связь формальной группы с формальной группой геометрических кобордизмов. Пусть $A=\mathrm{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ — кольцо многочленов от бесконечного числа переменных. Рассмотрим ряд $g(u)=u+\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{u^{n+1}x_n}{n+1}$, тогда определен групповой закон $F(u,v)=g^{-1}(g(u)+g(v))$, где $g^{-1}(g(u))=u$. Коэффициенты ряда $F(u,v)$ лежат в кольце $A\otimes Q$. Эта группа совпадает с универсальным групповым законом Лазара, который в свою очередь совпадает с формальной группой геометрических кобордизмов. Инвариантный дифференциал этой группы имеет вид $dg(u)=\left(\sum\limits_{n\ge0}[CP^n]u^n\right)du$, где $[CP^n]$ — классы унитарных кобордизмов комплексных проективных пространств.

5. ИЗОГЕНИИ

Сопоставим каждому n-мерному групповому закону F, определенному над кольцом R, кольцо $R[[T_1, \ldots, T_n]]$, которое будем называть кольцом функций группового закона F. Если F и G — соответственно n- и m-мерные групповые законы над кольцом R и f — гомоморфизм из F в G, то f определяет гомоморфизм ν_f колец функций $\nu_f : R[[T_1, \ldots, T_n]] \to R[[T_1, \ldots, T_n]]$, задаваемый формулами $T_i \nu_f = f_i(T_1, \ldots, T_n)$, $i = 1, \ldots, m$. Заметим, что если групповые законы имеют одинаковые размерности и определены над одним и тем же кольцом R, то их кольца функций совпадают.

Определение 9. Пусть F и G — n-мерные групповые законы над кольцом R с одним и тем же кольцом функций $A = R[[T_1, \ldots, T_n]]$. Назовем изогенией такой гомоморфизм f группового закона F в G, для которого определяемый по f гомоморфизм колец $\nu_f : A \to A$ превращает A в свободный модуль конечного ранга над $\operatorname{Im} \nu_f$.

Замечание 6. Из определения изогении следует, что кольца $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ и $R[[f_1(T), \ldots, f_n(T)]]$ имеют одну и ту же степень трансцендентности, если f — изогения. Иными словами, в этом случае элементы $f_1(T), \ldots, f_n(T)$ алгебраически независимы над кольцом R.

Предложение 5. Пусть F и G — групповые законы над кольцом R, и f — гомоморфизм из F в G над R.

Если поле отношений кольца R имеет характеристику ноль, то гомоморфизм f будет изогенией тогда и только тогда, когда $\det\left(\dfrac{\partial f_i(0)}{\partial T_j}\right) \neq 0$.

Если $R = k = O / M$ и $f(T) = g(T) \circ \pi^h$, то гомоморфизм f будет изогенией тогда и только тогда, когда $\det(c(f)) \neq 0$ в поле k.

Доказательство предложения 5 несложно, но достаточно громоздко и здесь опускается.

Обозначим $Iso_R(F, G)$ множество изогений группового закона F в G над кольцом R. Заметим, что $0 \notin Iso_R(F, G)$. Можно доказать следующее.

Лемма 2. Если высоты групповых законов F и G над полем k различны, то множество $Iso_R(F, G)$ пусто.

Пусть теперь F и G — групповые законы, определенные над кольцом O.

Предложение 6. Отображение $* : Iso_O(F, G) \to Iso_k(F, G)$ является инъективным, если $[p]_F^*(T)$ — изогения.

6. ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ

Пусть K — полное дискретно нормированное поле характеристики ноль с кольцом целых $O = O_K$ и максимальным идеалом $M = M_K = \pi O$, а F есть n-мерный коммутативный групповой закон, определенный над O. Ранее указывалось, что кольцо целых рациональных чисел Z отображается в $End_O(F)$ так, что $End_O(F)$ является Z-модулем. Пусть $Mat_n(O)$ — кольцо матриц размера $n \times n$ над кольцом $O = O_K$. Структура $Mat_n(O)$-модуля может быть введена на D_p^n с помощью n-мерной формальной группы F на n-диске D_p^n. Именно для матрицы $(a_{ij}) \in Mat_n(O)$ и логарифма φ формальной группы F определим гомоморфизм колец $(a_{ij}) \mapsto [a_{ij}]_F := \varphi \circ (a_{ij}) \circ \varphi^{-1}(T)$, $[]_F : Mat_n(O) \to End_O(F)$. Формальную группу F над $O = O_K$ с гомоморфизмом $[]_F : Mat_n(O) \to End_O(F)$ будем называть формальным $Mat_n(O)$-модулем $F(D_p^n)$.

Предложение 7. Задание структуры формального $Mat_n(O)$-модуля определяет структуру $Mat_n(O)$-модуля на формальном модуле $F(D_p^n)$, который задается на n-диске формальной группой F.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены новые результаты и дан краткий обзор новых методов теории динамических систем на многообразиях над локальными полями и формальных групп над локальными кольцами. Для исследования n-мерных многообразий и их динамики, динамических систем на таких многообразиях использованы формальные структуры, в частности n-мерные формальные группы. В терминах формальных групп представлены инфинитезимальные деформации. Известный одномерный случай расширен на n-мерные ($n \geq 1$) аналитические отображения открытого p-адического полидиска (n-диска) D_p^n. Введены n-мерные аналоги модулей, возникающие в формальных и неархимедовых структурах динамики, приведена их формально-алгебраическая стрктура. Обращено внимание на жесткие структуры, объекты и методы. С точки зрения системного анализа введены и исследованы новые, а именно формальные и неархимедовы грани и структуры систем, отображения и итерации отображений между этими гранями и структурами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривонос Ю.Г., Харченко В.П., Глазунов Н.М. Дифференциально-алгебраические уравнения и динамические системы на многообразиях. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 3. С. 83–96.
2. Zerz E. Algebraic systems theory. Aachen: Lehrstuhl D fuer Mathematik RWTH, 2006. 104 p.
3. Hannan E.J., Deistler M. The statistical theory of linear systems. Philadelphia: SIAM Publ., 2012. 390 p.
4. Wood J. Modules and behaviours in nD systems theory. *Multidimensional Systems and Signal Processing*. 2000. Vol. 11, Iss. 1–2. P. 11–48.
5. Арбиб М.А., Мейнс Э., Брокетт Р., Лобри К., Бернс К.И., Харт Н.Э., Осетинский Н.И. Математические методы в теории систем. Москва: Мир, 1979. 328 с.
6. Теория систем. Математические методы и моделирование. Москва: Мир, 1989. 382 с.
7. Глушков В.М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. *Кибернетика*. 1965. № 5. С. 1–10.
8. Глушков В.М. Введение в АСУ. Киев: Техника, 1974. 320 с.
9. Глазунов М.М. Про «нормені підгрупи» одновимірних формальних груп, визначених над кільцем цілих локального поля. *Доп. Академії Наук УРСР. Сер. А*. 1973. № 11. С. 965–968.
10. Lubin J. Non-Archimedean dynamical systems. *Compos. Math*. 1994. Vol. 94. P. 321–346.
11. Hua-Chien Li. p-adic dynamical systems and formal groups. *Compos. Math*. 1996. Vol. 104. P. 41–54.
12. Serre J.P. Lie algebras and Lie groups. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1500. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. 168 p.
13. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы: 3-е изд. Москва: Наука, 1986. 519 с.
14. Hazewinkel M. Formal groups and applications. Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 2012. 573 p.
15. Mumford D. Abelian varieties. Tata Institute of fundamental research publications. Vol. 13, 2012. 263 p.
16. Schwede S. Equivariant properties of symmetric products. *J. Amer. Math. Soc*. 2017. Vol. 30, N 3. P. 673–711.
17. Schwede S. Formal groups and stable homotopy of commutative rings. *Geometry & Topology*. 2004. Vol. 8. P. 335–412.
18. Snaith V. Stable homotopy around the arf-kervaire invariant. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 2009. 240 p.
19. Faltings G. p-adic hodge theory. *J. Amer. Math. Soc*. 1988. Vol. 1, N 1. P. 255–288.
20. Kisin M. Crystalline representations and F-crystals. In: *Algebraic Geometry and Number Theory. Progress in Mathematics*. Ginzburg V. (ed.). Boston: Birkhäuser, 2006. Vol. 253. P. 459–496.
21. Glazunov N.M. Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics. *Чебышевский сборник. Научно-теоретический журнал*. 2015. Т. XVI, вып. 3(55). С. 124–146.
22. Glazunov N.M. On norm maps and “universal norms” of formal groups over integer rings of local fields. *Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. P. 73–80.
23. Khrennikov A.Yu., Nilsson M. p-adic deterministic and random dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2004. 280 p.
24. Vladimirov V.S., Volovich I.V., Zelenov E.I. p-adic analysis and mathematical physics. *Series on Soviet and East European Mathematics*. New York: World Scientific Co., Inc. 1994. Vol. 1. 340 p.

25. Woodcock C.F., Smart N.P. p-adic chaos and random number generation. *Experiment Math*. 1998. P. 333–342.
26. Thiran E., Verstegen D., Weyers J. p-adic dynamics. *J. Stat. Phys*. 1989. Vol. 54. P. 893–913.
27. Ben-Menahem S. p-adic iterations. Preprint, TAUP 1627–88, Tel Aviv University, 1988. 43 p.
28. Gromov M. Soft and hard symplectic geometry. *Proc. of the International Congress of Mathematicians Berkeley*. California, USA, 1986. P. 81–98.
29. Постников А.Г. Избранные труды. Москва: Физматлит, 2005. 512 с.
30. Rigidity (mathematics). URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Rigidity_(mathematics).
31. Serre J.P. Corps locaux. Paris: Hermann. 2004. 246 p.
32. Field M., Jarden M. Field arithmetic. Third ed. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. *A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Vol. 11, Berlin: Springer-Verlag, 2008. 792 p.
33. Шафаревич И.Р. Математические работы. Т. 3, ч. 1. Москва: Прима Б., 1996. 415 с.

Надійшла до редакції 07.07.2017

В.П. Харченко, М.М. Глазунов

ФОРМАЛЬНІ ТА НЕАРХІМЕДОВІ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

Анотація. Наведено нові результати і короткий огляд нових методів теорії динамічних систем на многовидах над локальними полями і формальних груп над локальними кільцями. Для дослідження n-вимірних многовидів, динамічних систем на таких многовидах використано формальні структури, зокрема, n-вимірні формальні групи. У термінах формальних груп представлено інфінітезімальні деформації. Відомий одновимірний випадок розширено на n-вимірні ($n \geq 1$) аналітичні відображення відкритого p-адичного полідиска (n-диска) D_p^n. Уведено n-вимірні аналоги модулів, які виникають в формальних і неархімедових динамічних структурах, наведено їхню формально-алгебраїчну структуру. Стисло описано жорсткі структури, об'єкти та методи. З точки зору системного аналізу введено та досліджено нові формальні та неархімедові грані та структури систем, відображення та ітерації відображень між ними.

Ключові слова: формальна група, локальне кільце, комутативна формальна групова схема, деформація, формальний модуль, динамічна система, модуль диференціалів.

V.P. Kharchenko, N.M. Glazunov

FORMAL AND NONARCHIMEDIAN STRUCTURES OF DYNAMIC SYSTEMS ON MANIFOLDS

Abstract. New results are presented and a brief review of new methods and results of the theory of dynamic systems on manifolds over local fields and formal groups over local rings is given. For the analysis of n-dimensional manifolds and their dynamics, dynamic systems on such manifolds, formal structures are used, in particular, n-dimensional formal groups. Infinitesimal deformations are presented in terms of formal groups. The well-known one-dimensional case extends, and n-dimensional ($n \geq 1$) analytic mappings of an open p-adic polydisc (n-disk) D_p^n are considered. We introduce and investigate the n-dimensional analogs of modules arising in formal and non-Archimedean dynamic structures. Attention is drawn to rigid structures, objects and methods. From the point of view of system analysis, new, namely, formal and non-Archimedean, faces and structures of systems, maps and iterations of mappings between these faces and structures are introduced and investigated.

Keywords: formal group, local ring, commutative formal group scheme, deformation, formal module, dynamic system, module of differentials.

Харченко Владимир Петрович,
доктор тех. наук, профессор, заведующий кафедрой, проректор по научной работе Национального авиационного университета, Киев, e-mail: kharch@nau.edu.ua.

Глазунов Николай Михайлович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры Национального авиационного университета, Киев, e-mail: glanm@yahoo.com.