СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Д.А. НОМИРОВСКИЙ, Б.В. РУБЛЕВ, В.В. СЕМЁНОВ

УДК 517.988

СХОДИМОСТЬ ДВУХЭТАПНОГО МЕТОДА С РАСХОЖДЕНИЕМ БРЭГМАНА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

Аннотация. Предложен новый двухэтапный метод для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, который является модификацией нескольких известных двухэтапных алгоритмов с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. Как и другие подобные схемы, данный метод в некоторых случаях позволяет явно учесть структуру допустимого множества задачи. Доказана теорема сходимости метода. Для монотонного оператора и выпуклого компактного допустимого множества получены неасимптотические оценки его эффективности.

Ключевые слова: вариационное неравенство, псевдомонотонность, монотонность, условие Липшица, двухэтапный метод, расхождение Брэгмана, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

В форме вариационных неравенств [1, 2] можно записать большое количество актуальных задач исследования операций и математической физики. Особенно часто такие неравенства применяются в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр [1, 2]. Для их решения предложено много методов, в частности проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество) [1–17]. Наиболее известным аналогом метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [3]. Его обобщению и исследованию посвящено достаточно много публикаций [4–6, 9–14]. В частности, предложены модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [9–14]. В так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах [9, 10, 13, 14] и алгоритме Корпелевич первые этапы итерации совпадают, а для получения следующего приближения вместо проектирования на допустимое множество его осуществляют на некоторое опорное для допустимого множества полупространство. В начале 1980-х годов Л.Д. Попов предложил интересную модификацию алгоритма Эрроу–Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций [15]. В работе [16] исследована модификация метода Попова для решения вариационных неравенств с монотонными операторами. В [18] предложен двух-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

этапный проксимальный алгоритм для решения задачи равновесного программирования, являющийся адаптацией метода [15] к общим неравенствам Ки Фаня.

В большинстве указанных методов используются евклидовы расстояние и проекция. В некоторых случаях это не позволяет применять структуру допустимых множеств и эффективно решать задачи. Возможный выход из ситуации состоит в более гибком подборе расстояния для осуществления проектирования на допустимое множество. Одной из первых успешных реализаций такой стратегии является работа Л.М. Брэгмана [19], в которой предложен метод типа циклического проектирования для нахождения общей точки выпуклых множеств. Данная статья открыла целое направление в математическом программировании и нелинейном анализе. В конце 1970-х годов А.С. Немировским и Д.Б. Юдиным для решения выпуклых задач оптимизации был предложен метод зеркального спуска [20], получивший широкое распространение для решения задач больших размерностей. В случае задач с ограничениями его можно проинтерпретировать как вариант метода проекции субградиента, когда проектирование понимается в смысле расхождения Брэгмана [21]. Метод зеркального спуска позволяет учитывать структуру допустимого множества задачи оптимизации. Например, для симплекса в качестве расстояния можно использовать расхождение Кульбака–Лейблера и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс [21]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [4]. Подобные методы подробно рассмотрены в [5]. Интересный метод двойственной экстраполяции для решения вариационных неравенств предложен в [6]. В работе [17] исследован двухэтапный проксимальный зеркальный метод, являющийся модификацией двухэтапного проксимального алгоритма [18] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния.

Настоящая статья продолжает работу [22] и посвящена изучению нового двухэтапного метода для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, определенными в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод — модификация описанных ранее двухэтапных алгоритмов [16, 18]. Предлагаемую схему можно получить также заменой допустимого множества специальными опорными для него полупространствами на первом этапе проксимального зеркального метода [17].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Пусть E — конечномерное действительное линейное пространство с нормой $||\cdot||$ (не обязательно евклидовой). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ обозначим (a, b) значение линейной функции a в точке b. Двойственную норму $||\cdot||_*$ на E^* определим стандартным способом: $||a||_* = \max\{(a, b): ||b|| = 1\}$, обеспечивающим выполнение неравенства Шварца $(a, b) \le ||a||_* \, ||b||$ для всех $a \in E^*$, $b \in E$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство: найти

$$x \in C: \ (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;
- множество S не пусто.

Замечание 1. Напомним, что псевдомонотонность оператора A на множестве C заключается в том, что для всех $x,\ y \in C$ из $(Ax, y-x) \ge 0$ следует $(Ay, y-x) \ge 0$.

Рассмотрим дуальное вариационное неравенство: найти

$$x \in C:\ (Ay, x-y) \le 0 \quad \forall\, y \in C. \tag{2}$$

Множество решений (2) обозначим S^d. Заметим, что множество S^d выпуклое и замкнутое. Неравенство (2) иногда называют слабой или дуальной постановкой (1), а решения (2) — слабыми решениями (1) [1]. Действительно, при псевдомонотонности оператора A имеем $S \subseteq S^d$. В рассматриваемых условиях $S^d = S$ [1].

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям:

- $\operatorname{int}\operatorname{dom}\ \varphi \subseteq E$ — непустое выпуклое множество;
- φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;
- если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_* \to +\infty$;
- φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) + \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall\, a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 2. Функции φ принято называть distance generating functions.

Соответствующее функции φ расхождение Брэгмана задается формулой [21]

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 3. Иногда расхождение Брэгмана называют расстоянием [4, 21, 23], но это не совсем корректное определение: из аксиом метрики для V в общем случае выполняется только $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Примеры практически важных расхождений Брэгмана приведены в [21]. Рассмотрим здесь два основных примера. При $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, имеем $V(x, y) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2$. Для неотрицательного ортанта $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0\}$ и функции отрицательной энтропии $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$ (сильно выпуклой с константой 1 относительно ℓ_1-нормы на симплексе $S_m = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\right\}$) получаем расхождение (расстояние) Кульбака–Лейблера

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln(x_i / y_i) - \sum_{i=1}^m (x_i - y_i),\ x \in \mathbb{R}_+^m,\ \ y \in \mathbb{R}_{++}^m = \operatorname{int}(\mathbb{R}_+^m).$$

Имеет место полезное 3-точечное тождество [21]

$$V(a,c) = V(a,b) + V(b,c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a-b). \tag{3}$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a,b) \ge \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall\, a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{4}$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom} \varphi$ — непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi \neq \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y \in K} \{-(a, y-x) + V(y, x)\} \quad \forall a \in E^*, \ x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi. \qquad (5)$$

Известно [4, 21], что задача (5) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, причем

$$-(a, y-z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y-z) \geq 0 \quad \forall y \in K. \qquad (6)$$

Замечание 4. Точка $P_x^K(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией $P_K(x+a) = \arg\min_{y \in K} \| y - (x+a) \|_2$.

Замечание 5. Для симплекса $S_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$ и расхождения Кульбака–Лейблера имеем [21]

$$P_x^{S_m}(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ldots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \ a \in \mathbb{R}^m, \ x \in \operatorname{ri}(S_m).$$

Для случая полупространства $H_{\leq}(b, \beta) = \{ y : (b, y) \leq \beta \}$, где $b \in E^* \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, имеем [23]

$$P_x^{H_{\leq}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a),$$

если $(\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a) \in H_{\leq}(b, \beta)$, иначе

$$P_x^{H_{\leq}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a - \tau b),$$

где $\tau = \arg\min_{t > 0} \varphi^*(\nabla\varphi(x) + a - tb) + t\beta$, φ^* — сопряженная к φ функция, т.е.

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \operatorname{dom} \varphi} ((y, x) - \varphi(x)).$$

Опишем алгоритм для решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1. Двухэтапный метод с расхождением Брэгмана. Выбираем элементы x_0, $y_0 \in C$ и положительное число λ. Полагаем $n = 1$.

Шаг 0. Вычислить

$$x_1 = P_{x_0}^C(-\lambda A y_0), \quad y_1 = P_{x_1}^C(-\lambda A y_0).$$

Шаг 1. Вычислить $x_{n+1} = P_{x_n}^{T_n}(-\lambda A y_n)$, $y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^C(-\lambda A y_n)$,

где

$$T_n = \{ z \in E : (\nabla\varphi(x_n) - \lambda A y_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), z - y_n) \leq 0 \}.$$

Шаг 2. Если $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n = y_{n-1}$, то СТОП и $y_n \in S$, иначе положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 6. Имеем $C \subseteq T_n$. Действительно, если предположить существование точки $w \in C \setminus T_n$, то неравенство

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda A y_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), w - y_n) > 0$$

противоречит равенству $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda A y_{n-1})$.

Замечание 7. Если $\varphi(\cdot)=\frac{1}{2}||\cdot||_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид метода, предложенного в [16]:

$$\begin{cases} T_n=\{z\in H\colon\ (x_n-\lambda Ay_{n-1}-y_n,\, z-y_n)\le 0\},\\ x_{n+1}=P_{T_n}(x_n-\lambda Ay_n),\\ y_{n+1}=P_C(x_{n+1}-\lambda Ay_n). \end{cases}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если для некоторого $n\in\mathbb{N}$ в алгоритме 1 имеем $x_{n+1}=x_n$ и $y_{n+1}=y_n=y_{n-1}$, то $y_n\in S$.

Доказательство. Равенство $x_{n+1}=P_{x_n}^{T_n}(-\lambda Ay_n)$ в силу (6) равносильно неравенству

$$(Ay_n,\, y-x_{n+1})+\frac{(\nabla\varphi(x_{n+1})-\nabla\varphi(x_n),\, y-y_n)}{\lambda}\ge 0\ \ \forall\, y\in T_n.$$

Из равенства $x_{n+1}=x_n$ следует

$$(Ay_n,\, y-x_n)\ge 0\ \ \forall\, y\in T_n. \tag{7}$$

Учитывая $x_{n+1}\in T_n$ и $y_n=y_{n-1}$, получаем $(\nabla\varphi(x_n)-\lambda Ay_n-\nabla\varphi(y_n), x_n-y_n)\le 0$, откуда имеем $(Ay_n, x_n-y_n)\ge 0$. Представим (7) в виде

$$(Ay_n,\, y-y_n)-(Ay_n, x_n-y_n)\ge 0\ \ \forall\, y\in T_n.$$

Следовательно,

$$(Ay_n,\, y-y_n)\ge(Ay_n, x_n-y_n)\ge 0\ \ \forall\, y\in T_n.$$

Поскольку $y_n\in C\subseteq T_n$, имеем $y_n\in S$. ■

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n\in\mathbb{N}$ условие остановки на шаге 2 алгоритма 1 не имеет места, и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ТОЧЕК, ПОРОЖДЕННЫХ АЛГОРИТМОМ

Вначале докажем важную оценку, связывающую расхождения Брэгмана между порожденной двухэтапным алгоритмом 1 точкой x_n и произвольным элементом множества решений S.

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$V(z,x_{n+1})\le V(z,x_n)-\left(1-(1+\sqrt{2})\frac{\lambda L}{\sigma}\right)V(y_n,x_n)-$$

$$-\left(1-\sqrt{2}\frac{\lambda L}{\sigma}\right)V(x_{n+1},y_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n,y_{n-1}), \tag{8}$$

где $z\in S$.

Доказательство. Пусть $z\in S$. Запишем 3-точечное тождество (3) в виде

$$V(z,x_{n+1})=V(z,x_n)-V(x_{n+1},x_n)+(\nabla\varphi(x_{n+1})-\nabla\varphi(x_n), x_{n+1}-z). \tag{9}$$

Из определения точки x_{n+1} и $z\in S\subseteq T_n$ следует

$$\lambda(Ay_n,\, z-x_{n+1})+(\nabla\varphi(x_{n+1})-\nabla\varphi(x_n),\, z-x_{n+1})\ge 0. \tag{10}$$

Используя неравенства (10) для оценки скалярного произведения в (9), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda(Ay_n, z - x_{n+1}). \tag{11}$$

Из псевдомонотонности A и $y_n \in C$ следует $(Ay_n, z - y_n) \le 0$. К правой части неравенства (11) добавим слагаемое $\lambda(Ay_n, y_n - z)$. Получим

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda(Ay_n, y_n - x_{n+1}) =$$
$$= V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) + \lambda(Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}). \tag{12}$$

Запишем слагаемое $\lambda(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1})$ в виде

$$\lambda(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) = (\nabla\varphi(x_n) - \lambda Ay_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) +$$
$$+ (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n).$$

Из включения $x_{n+1} \in T_n$ вытекает неравенство

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda Ay_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) \le 0.$$

Следовательно, имеем

$$\lambda(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) \le (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n).$$

Используя 3-точечное тождество (3), получаем

$$\lambda(Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) \le V(x_{n+1}, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n). \tag{13}$$

Оценив правую часть (12) с помощью (13), получим неравенство

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{14}$$

Теперь оценим слагаемое $\lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$. Имеем

$$\lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le \lambda \| Ay_{n-1} - Ay_n \|_* \| x_{n+1} - y_n \| \le$$
$$\le \lambda L \| y_{n-1} - y_n \| \| x_{n+1} - y_n \| \le \lambda L \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} \| y_{n-1} - y_n \|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \| x_{n+1} - y_n \|^2 \right\} \le$$
$$\le \frac{\lambda L}{2\sqrt{2}} \{ \sqrt{2} \| y_{n-1} - x_n \|^2 + (2 + \sqrt{2}) \| x_n - y_n \|^2 \} + \frac{\lambda L}{\sqrt{2}} \| x_{n+1} - y_n \|^2 =$$
$$= \frac{\lambda L}{2} \| y_{n-1} - x_n \|^2 + \lambda L \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \| x_n - y_n \|^2 + \frac{\lambda L}{\sqrt{2}} \| x_{n+1} - y_n \|^2. \tag{15}$$

Здесь воспользовались элементарными неравенствами

$$ab \le \frac{\varepsilon^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} b^2, \ (a + b)^2 \le \sqrt{2} a^2 + (2 + \sqrt{2}) b^2.$$

Оценивая нормы в (15) с помощью неравенства (4), имеем

$$\lambda(Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) \le \frac{\lambda L}{\sigma} V(x_n, y_{n-1}) +$$
$$+ \frac{\lambda L}{\sigma} (1 + \sqrt{2}) V(y_n, x_n) + \frac{\lambda L}{\sigma} \sqrt{2} V(x_{n+1}, y_n). \tag{16}$$

Применив (16) в (14), получим

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$

$$+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n, y_{n-1})+\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})V(y_n, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}\sqrt{2}V(x_{n+1}, y_n)\le$$

$$\le V(z, x_n)-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}\sqrt{2}\right)V(x_{n+1}, y_n)-$$

$$-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)V(y_n, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n, y_{n-1}),$$

что и требовалось доказать. ■

Перейдем к доказательству сходимости алгоритма 1.

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА 1

Для доказательства сходимости алгоритма потребуется элементарная лемма о числовых последовательностях.

Лемма 3. Пусть (a_n), (b_n) — последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющие неравенству $a_{n+1}\le a_n-b_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<+\infty$.

Сформулируем один из основных результатов данной работы.

Теорема 1. Пусть множество $C\subseteq E$ выпуклое и замкнутое, оператор $A:E\to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L>0$, $S\ne\varnothing$ и $\lambda\in\left(0,(\sqrt{2}-1)\frac{\sigma}{L}\right)$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке $\bar{z}\in S$.

Доказательство. Пусть $z\in S$. Положим

$$a_n=V(z, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n=\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)(V(y_n, x_n)+V(x_{n+1}, y_n)).$$

Неравенство (8) принимает вид $a_{n+1}\le a_n-b_n$. Тогда из леммы 3 о числовых последовательностях следует существование конечного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(V(z, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n, y_{n-1})\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)(V(y_n, x_n)+V(x_{n+1}, y_n))<+\infty.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty}V(y_n, x_n)=\lim_{n\to\infty}V(x_{n+1}, y_n)=0 \qquad (17)$$

и сходимость числовой последовательности $(V(z, x_n))$ для всех $z\in S$. Из (17) вытекает

$$\lim_{n\to\infty}||y_n-x_n||=\lim_{n\to\infty}||x_{n+1}-y_n||=0. \qquad (18)$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}||x_{n+1}-x_n||=0. \qquad (19)$$

Из неравенства $V(z, x_n) \geq \frac{\sigma}{2} || z - x_n ||^2$ и (18) следует ограниченность последовательностей (x_n), (y_n).

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $\bar{z} \in E$. Тогда из (18) следует, что $y_{n_k} \to \bar{z}$ и $x_{n_k+1} \to \bar{z}$, причем $\bar{z} \in C$. Покажем, что $\bar{z} \in S$. Имеем

$$(Ay_{n_k}, y - x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda} (\nabla\varphi(x_{n_k+1}) - \nabla\varphi(x_{n_k}), y - x_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall\, y \in C \subseteq T_n. \quad (20)$$

Выполнив в (20) предельный переход с учетом (18), (19), получим $(A\bar{z}, y - \bar{z}) \geq 0$ $\forall\, y \in C$, т.е. $\bar{z} \in C$.

Покажем, что $x_n \to \bar{z}$ (тогда из $|| x_n - y_n || \to 0$ следует, что и $y_n \to \bar{z}$). Известно, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla\varphi(x_n), \bar{z} - x_n)).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, имеем также $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = 0$, откуда $|| x_n - \bar{z} || \to 0$. ■

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА 1

Рассмотрим вариационное неравенство (1) с монотонным липшицевым оператором A и выпуклым компактным множеством C. Получим для этого случая неасимптотические оценки эффективности алгоритма 1.

Напомним одно важное понятие. Функцией разрыва (gap function) называют функцию вида

$$G(x) = \max_{y\in C} (Ay, x - y), \quad x \in C.$$

Функция разрыва выпукла, неотрицательна и принимает нулевое значение в точке $x \in C$ тогда и только тогда, когда эта точка принадлежит множеству S [1]. Функция разрыва часто применяется для оценки качества приближенного решения вариационного неравенства (1) [4, 6, 22].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть множество $C \subseteq E$ выпуклое и компактное, оператор $A: E \to E^*$ монотонный и липшицевый с константой $L > 0$ и $\lambda \in \left(0, (\sqrt{2} - 1)\frac{\sigma}{L}\right)$. Тогда имеет место неравенство

$$G(z_N) = \max_{y\in C} (Ay, z_N - y) \leq \frac{\frac{1}{\lambda} R_C(x_1) + \frac{L}{\sigma} V(x_1, y_0)}{N},$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$ — усредненный выход работы алгоритма 1, $R_C(x_1) = \max_{y\in C} V(y, x_1)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $y \in C$ имеет место неравенство

$$V(y, x_{n+1}) \leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda (Ay_n, y - x_{n+1}).$$

Из монотонности оператора A следует

$$(Ay_n, y - x_{n+1}) = (Ay_n, y - y_n) + (Ay_n, y_n - x_{n+1}) \leq (Ay, y - y_n) + (Ay_n, y_n - x_{n+1}).$$

Таким образом,

$$V(y,x_{n+1})\le V(y,x_n)-V(x_{n+1},x_n)+\lambda(Ay_n,\, y_n-x_{n+1})+\lambda(Ay,\, y-y_n)=$$
$$=V(y,x_n)-V(x_{n+1},x_n)+\lambda(Ay_{n-1},\, y_n-x_{n+1})+$$
$$+\lambda(Ay_n-Ay_{n-1},\, y_n-x_{n+1})+\lambda(Ay,\, y-y_n). \tag{21}$$

Далее, как и при доказательстве леммы 2, из (21) получаем неравенство

$$V(y,x_{n+1})\le V(y,x_n)-\left(1-(1+\sqrt{2})\frac{\lambda L}{\sigma}\right)V(y_n,x_n)-$$
$$-\left(1-\sqrt{2}\frac{\lambda L}{\sigma}\right)V(x_{n+1},\, y_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n,\, y_{n-1})+\lambda(Ay,\, y-y_n). \tag{22}$$

Перепишем (22) в следующем виде:

$$\lambda(Ay,\, y_n-y)\le\left(V(y,x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_n,\, y_{n-1})\right)-\left(V(y,x_{n+1})+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_{n+1},\, y_n)\right)-$$
$$-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)(V(y_n,x_n)+V(x_{n+1},\, y_n)). \tag{23}$$

Суммируя (23) по n от 1 до N, получаем

$$\lambda\sum_{n=1}^{N}(Ay,\, y_n-y)\le\left(V(y,x_1)+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_1,\, y_0)\right)-\left(V(y,x_{N+1})+\frac{\lambda L}{\sigma}V(x_{N+1},\, y_N)\right)-$$
$$-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)\sum_{n=1}^{N}(V(y_n,x_n)+V(x_{n+1},\, y_n)).$$

Отсюда следует

$$(Ay,\, z_N-y)\le\frac{\frac{1}{\lambda}V(y,x_1)+\frac{L}{\sigma}V(x_1,\, y_0)}{N}, \tag{24}$$

где $z_N=\frac{\sum_{n=1}^{N}y_n}{N}$. Перейдя в (24) к максимуму по $y\in C$, получим

$$G(z_N)=\max_{y\in C}(Ay,\, z_N-y)\le\frac{\frac{1}{\lambda}R_C(x_1)+\frac{L}{\sigma}V(x_1,\, y_0)}{N},$$

где $R_C(x_1)=\max_{y\in C}V(y,x_1)$. ■

Из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть необходимо решить задачу (1) с помощью алгоритма 1 при $\lambda=\frac{\sigma}{3L}$ и $\varepsilon>0$. Тогда после

$$N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\frac{L}{\sigma}(3R_C(x_1)+V(x_1,\, y_0))\right\rceil$$

итераций имеет место следующая оценка:

$$G(z_N)=\max_{y\in C}(Ay,\, z_N-y)\le\varepsilon,$$

где $z_N=\frac{\sum_{n=1}^{N}y_n}{N}$ — усредненный выход работы алгоритма 1 за N итераций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый двухэтапный метод для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, определенными в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией нескольких ранее описанных двухэтапных алгоритмов [16, 18] с применением расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. Как и другие схемы, использующие расхождение Брэгмана [4–6, 17, 19–23], предложенный метод в некоторых случаях позволяет эффективно применять структуру допустимого множества задачи, т.е. строить последовательность приближений с помощью явно вычисляемого оператора проектирования на допустимое множество.

Доказана теорема сходимости метода. Для случая монотонного оператора и выпуклого компактного допустимого множества получены неасимптотические оценки эффективности метода.

Интерес представляет построение адаптивного аналога рассморенного метода, позволяющего получать аппроксимирующие последовательности без знания точного значения константы Липшица оператора. Отметим также, что появление генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network, GAN) обусловило интерес к адаптивным алгоритмам решения вариационных неравенств специалистов по машинному обучению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2001. 181 p.
2. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
3. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и мат. методы*. 1976. Т. 12, № 4. С. 747–756.
4. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2004. Vol. 15. P. 229–251.
5. Auslender A., Teboulle M. Interior projection-like methods for monotone variational inequalities. *Mathematical Programming*. 2005. Vol. 104, Iss. 1. P. 39–68.
6. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Mathematical Programming*. 2007. Vol. 109, Iss. 2–3. P. 319–344.
7. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2008. Т. 48, № 12. С. 2121–2128.
8. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 2. С. 42–46.
9. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 148. P. 318–335.
10. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 146–154.
11. Семенов В.В. Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 3. С. 22–32.
12. Семенов В.В. Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 104–112.
13. Верлань Д.А., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 4. С. 37–50.
14. Денисов С.В., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сходимость модифицированного экстраградиентного метода для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 5. С. 102–110.
15. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек. *Мат. заметки*. 1980. Т. 28, № 5. С. 777–784.

16. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 2. С. 125–131.

17. Семенов В.В. Вариант метода зеркального спуска для вариационных неравенств. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 2. С. 83–93.

18. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications*. Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325.

19. Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1967. № 3. С. 620–631.

20. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. Москва: Наука, 1979. 384 с.

21. Beck A. First-order methods in optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. 479 p.

22. Семенов В.В. Модифицированный экстраградиентный метод с расхождением Брэгмана для вариационных неравенств. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 4. С. 43–53.

23. Lorenz D.A., Schopfer F., Wenger S. The linearized Bregman method via split feasibility problems. Analysis and generalizations. *SIAM Journal on Imaging Sciences*. 2014. Vol. 7, Iss. 2. P. 1237–1262.

Надійшла до редакції 06.07.2018

Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов, В.В. Семенов

ЗБІЖНІСТЬ ДВОЕТАПНОГО МЕТОДУ З РОЗБІЖНІСТЮ БРЕГМАНА ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Анотація. Запропоновано новий двоетапний метод для наближеного розв'язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та ліпшицевими операторами, що є модифікацією декількох відомих двоетапних алгоритмів з використанням розбіжності Брегмана замість евклідової відстані. Як і інші подібні схеми, цей метод у деяких випадках дозволяє явно врахувати структуру допустимої множини задачі. Доведено теорему збіжності методу. Для монотонного оператора та опуклої компактної допустимої множини отримано неасимптотичні оцінки його ефективності.

Ключові слова: варіаційна нерівність, псевдомонотонність, монотонність, умова Ліпшиця, двоетапний метод, розбіжність Брегмана, збіжність.

D.A. Nomirovskii, B.V. Rublyov, V.V. Semenov

CONVERGENCE OF TWO-STEP METHOD WITH BREGMAN DIVERGENCE FOR SOLVING VARIATIONAL INEQUALITIES

Abstract. A new two-step method for the approximate solution of variational inequalities with pseudo-monotone and Lipschitz-continuous operators acting in a finite- dimensional linear normed space is proposed. This method is a modification of several previously studied two-stage algorithms using the Bregman divergence instead of the Euclidean distance. Like other schemes using Bregman divergence, the proposed method can sometimes efficiently take into account the structure of the feasible set of the problem. A theorem on the convergence of the method is proved and, in the case of a monotone operator and convex compact feasible set, non-asymptotic estimates of the efficiency of the method are obtained.

Keywords: variational inequality, pseudo-monotonicity, monotonicity, Lipschitz condition, two-step method, Bregman divergence, convergence.

Номировский Дмитрий Анатолиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: kashpir74@gmail.com.

Рублев Богдан Владиславович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: rublyovbv@gmail.com.

Семёнов Владимир Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.