

КОНСТРУКТИВНО-ПРОДУКЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

Аннотация. Предложен конструктивно-продукционный подход порождения фракталов, который является более общим, чем другие известные подходы. Показаны возможности применения большой вариативности атрибутики и исходных элементов формирования фракталов, а также комбинирования фракталов в мультифракталах. Возможности формирования фракталов расширены путем устранения необходимых при других подходах ограничений. Предложенный подход позволил установить несколько неизвестных ранее свойств дробной размерности, которые заключаются в возможности ее изменения в процессе порождения фрактала и несовпадения дробных размерностей предела форм в процессе порождения и предельного фрактала. Дано простое определение детерминированного геометрического фрактала, учитывающего все характеризующие его свойства.

Ключевые слова: конструктор, фрактал, мультифрактал, дробная размерность, треугольник Серпинского, фрактальная геометрия.

ВВЕДЕНИЕ

Начало бурному развитию фрактальной геометрии положила работа Б. Мандельброта [1]. Фракталы обнаружены во многих естественных объектах и процессах. Фрактальные модели применяются во многих научных областях: биологии, архитектуре, медицине, материаловедении, ядерной физике, астрономии, математике, в информационных системах и т.д.

Существует несколько альтернативных подходов формирования фракталов: алгоритмический [1–5]; функционально-алгоритмический с применением системы итерированных функций на основе совокупности сжимающих отображений [2, 4, 5]; L-систем [2]; сжимающих аффинных автоматов [6].

Алгоритмический подход был сформирован при описании первых, ставших классическими, фракталов, таких как треугольник, ковер Серпинского, снежинка Коха и др. Предлагался алгоритм формирования этих фракталов.

Функционально-алгоритмический подход — представление фрактальной геометрии средствами классической математики.

Достаточно новое направление формирования фракталов — сжимающие аффинные автоматы — позволяет формировать фракталы на основе аффинных преобразований и имеет теоретическую основу в виде конечных автоматов.

Наибольшее практическое применение в компьютерной графике получили L-системы, предложенные А. Линдмайером [7], как существенная модификация формальных грамматик.

В [8–10] заложены основы конструктивно-продукционного моделирования (КПМ), в рамках которого представляется возможным моделирование любых конструкций и конструктивных процессов в области информационных технологий, строительства, машиностроения, робототехники, биологии и т.д. Предложенный аппарат позволяет формализовать процессы и результаты формирования конструкций различной природы, связывая элементы конструкций и учитывая свойства элементов, их агрегатов (форм) и связей.

В настоящей статье рассматривается применение КПМ для формирования фракталов. Этот подход наиболее близок к L-системам. Он является более приспособленным к работе с атрибутикой и более гибким при задании процесса вывода.

ПОНЯТИЕ КОНСТРУКТОРА

Назовем конструктором тройку [8]:

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle,$$

где M — неоднородный пополняемый носитель, Σ — сигнатура операций (и соответствующих отношений) связывания, подстановки и вывода, а также операций над атрибутами, Λ — множество (формальных и неформальных) утверждений информационного обеспечения конструирования (ИОК). ИОК включает онтологию, цель, правила, ограничения, начальные условия и условия завершения конструирования. Онтология обобщенного конструктора Λ представлена в [8]. При этом предусматривается ряд уточняющих преобразований обобщенного конструктора.

Специализация определяет онтологию предметной области: семантическую природу носителя, общее для семейства задач цели, конечное множество операций и их семантику, атрибутику операций, порядок их выполнения и ограничения. Операция специализации $S \mapsto$ выполняется внешним исполнителем.

Интерпретация заключается в связывании операций сигнатуры с алгоритмами выполнения некоторой алгоритмической структуры [10]. При интерпретации выполняется связывание моделей конструктора и внутреннего исполнителя процесса конструирования. Результатом интерпретации $I \mapsto$ является конструктивная система. Операция интерпретации выполняется внешним исполнителем.

Конкретизация конструктора предусматривает задание конкретных правил, ограничений, начальных условий, а также условия завершения конструирования, конкретизации элементной базы носителя: множества нетерминальных и терминальных символов с их атрибутами и (при необходимости) значений атрибутов. После интерпретации и конкретизации $K \mapsto$, выполняемой внешним исполнителем, конструктивная система имеет все необходимое для самостоятельного формирования конструкций.

Реализация $R \mapsto$, выполняемая внутренним исполнителем системы, заключается в формировании конструкции из элементов носителя путем выполнения алгоритмов, связанных с операциями сигнатуры. Реализация возможна только для предварительно специализированного, интерпретированного и конкретизированного конструктора.

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ КОНСТРУКТОРОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbf{R}^2

Специализация конструктора — это формирование геометрических фигур (конструкций) в пространстве \mathbf{R}^2 , в том числе фракталов

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle \xrightarrow{S} C_G = \langle M_G, \Sigma_G, \Lambda_G \rangle,$$

где $\Lambda_G = \Lambda \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{M_G \supset \mathbf{R}^2 \cup T_G \cup F_G \cup K_G\}$; $\Sigma_G = \{\Xi_G, \Theta_G, \Phi_G, \{\rightarrow, \leftarrow\}\}$, $\Phi_G = \{\bullet, /, +, -, \circ\}$, $\Theta_G = \{\Rightarrow, \mapsto, \|\Rightarrow\}\}$. Здесь имеем такие множества: T_G — условно неделимых графических элементов конструирования; F_G, K_G — промежуточных форм и конструкций соответственно; Ξ_G — отношения взаимного расположения геометрических фигур (связывания элементов), которые задаются графически; операции Θ_G — подстановки и вывода, операции Φ_G — над атрибутами, а также отношение подстановки (\rightarrow) и атрибутивности (\leftarrow).

Составляющая ИОК Λ_2 содержит следующие определения, дополнения и ограничения, которые уточняют алфавит, атрибуты носителя, отношения подстановки, определяют особенность выполнения операций подстановки и вывода.

Фигурой или объектом назовем связное компактное множество в \mathbf{R}^2 .

Наличие атрибута w у элемента носителя m обозначим ${}_w m$ (идентификатор m с атрибутом w), а обозначение $w \downarrow m$ свидетельствует о том, что w является атрибутом идентификатора m .

Терминальный алфавит T_G состоит из множества геометрических объектов с атрибутами.

Согласно [8] формой ${}_w f$ с атрибутом w называется набор терминалов, объединяемых операциями связывания.

Конечная форма называется конструкцией, промежуточные формы — сентенциальными формами.

Общий вид правил подстановки: $\psi_r = \langle s_r, g_r \rangle \in \Psi$, где s_r — одно или несколько отношений подстановки, $s_r = \langle s_{r_1}, s_{r_2} \dots s_{r_n} \rangle$; $g_r = \langle g_{r_1}, g_{r_2} \dots g_{r_n} \rangle$ — набор операций над атрибутами.

Отношение подстановки s_{r_i} представляет собой двухместное отношение с атрибутами ${}_{w_i} l_i \rightarrow {}_{w_j} l_j$ (здесь ${}_{w_i} l_i, {}_{w_j} l_j$ — формы левой и правой частей отношения подстановки) [8]. Для формы ${}_{w_l} f_l = {}_{w_0} \oplus ({}_{w_1} f_1, {}_{w_2} f_2, \dots, {}_{w_h} l_h, \dots, {}_{w_k} f_k)$ и отношения подстановки ${}_{w_h} l_h \rightarrow {}_{w_q} l_q$ такого, что ${}_{w_h} l_h \prec {}_{w_l} f_l$ (${}_{w_h} l_h$ является частью ${}_{w_l} f_l$), результатом трехместной операции подстановки ${}_{w_p} \Rightarrow ({}_{w_h} l_h, {}_{w_q} l_q, {}_{w_l} f_l)$ будет форма ${}_{w_l}^* f_l^* = {}_{w_0} \oplus ({}_{w_1} f_1, {}_{w_2} f_2, \dots, {}_{w_q} l_q, \dots, {}_{w_k} f_k)$, где \oplus — произвольное отношение связывания [8].

Двухместная операция частичного вывода $f^* = (|\Rightarrow (\Psi, f))$ (здесь f, f^* — формы до и после выполнения операции частичного выбора) заключается в очередном выборе всех возможных для текущей сентенциальной формы правил подстановки $\psi_r: \langle s_r, g_r \rangle \in \Psi$, с отношениями подстановки s_r и заданными операциями над атрибутами g_r , которые будут выполняться в соответствии с атрибутом порядка выполнения последних.

Порядок применения операции над атрибутами в процессе выполнения операции частичного вывода задается атрибутом $\tau_j \in I$, $I = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2\}$, $I \subset M_G$, τ_0, τ_1, τ_2 — операция над атрибутами, которая выполняется соответственно перед операцией подстановки, после операции подстановки и перед завершением операции частичного вывода.

Операция полного вывода (или просто вывода) заключается в последовательном выполнении операции частичного вывода, начиная с начального терминала и заканчивая конструкцией, удовлетворяющей условию окончания вывода.

В рассматриваемых далее конструкторах предусмотрены следующие операции связывания и операции над атрибутами:

- дублирование множества $f_i \bullet f_j$, множество f_i копируется в f_j (в правилах вывода отношение $f_i \bullet f_j$ «может быть скопировано»);
- операция деления вещественных чисел $/ (a, b)$, реализуемая как $a := a / b$;
- операция сложения $+ (c, a, b)$, реализуемая как $c := a + b$;
- операция вычитания $- (c, a, b)$, реализуемая как $c := a - b$;
- копирование сентенциальной формы f_k в \bar{f}_k , последовательное объединение плоскостей $z_i = a_i$ формы \bar{f}_k с плоскостью $z = 0$ в порядке удаления от последней $\circ (\bar{f}_k, f_k)$.

Условием окончания вывода является выполнение N -й операции частичного вывода (гипотетически N может быть равно бесконечности), N задается как ограничение в ИОК при конкретизации.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОНСТРУКТОРОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ R^2

Для интерпретации операций конструирования необходимо задать базовую алгоритмическую структуру (БАС) [10].

Пусть имеется следующая БАС:

$$C_A = \langle M_A, V_A, \Sigma_A, \Lambda_A \rangle,$$

где M_A — неоднородный носитель, Σ_A — сигнатура, Λ_A — аксиоматика, $V_A \subset M_A$ — множество базовых алгоритмов внутреннего исполнителя конструирования, $V_A \supset \{A_1|_{l_h, l_q, f_i}^{f_j}, A_2|_{f_i, \Psi}^{f_j}, A_3|_{f_i, \Psi}^{f_j}, A_4|_{a, b}^a, A_5|_{a, b}^c, A_6|_{a, b}^c, A_7|_{f_i}^{\bar{f}_i}, A_8|_{f_i}^{f_i, f_j}\}$.

Указанные выше алгоритмы реализуют следующие операции:

- $A_1|_{l_h, l_q, f_i}^{f_j}$ — подстановки;
- $A_2|_{f_i, \Psi}^{f_j}, A_3|_{\sigma, \Psi}^{\bar{\Omega}}$ — частичного и полного вывода; здесь f_i, f_j — формы, σ — начальный терминал, $\bar{\Omega}$ — множество сформированных конструкций;
- $A_4|_{a, b}^a, A_5|_{a, b}^c, A_6|_{a, b}^c$ — деления, сложения и вычитания вещественных чисел соответственно;
- $A_7|_{f_i}^{\bar{f}_i}$ — реализации операции $\circ(f_i, f_i)$;
- $A_8|_{f_i}^{f_i, f_j}$ — реализации операции $f_i \bullet f_j$.

Интерпретация операций конструирования (формирование конструктивной системы):

$$\langle C_G = \langle M_G, \Sigma_G, \Lambda_G \rangle, C_A = \langle M_A, V_A, \Sigma_A, \Lambda_A \rangle \rangle I \mapsto C_{GI} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{GI} \rangle,$$

где $I \mapsto$ — операция интерпретации; $\Lambda_{GI} = \Lambda_G \cup \Lambda_A \cup \Lambda_3$, $\Lambda_3 = \{(A_1|_{l_h, l_q, f_i}^{f_j} \dashv \Rightarrow), (A_2|_{f_i, \Psi}^{f_j} \dashv \Rightarrow), (A_3|_{\sigma, \Psi}^{\bar{\Omega}} \dashv \Rightarrow), (A_4|_{a, b}^a \dashv /), (A_5|_{a, b}^c \dashv +), (A_6|_{a, b}^c \dashv -), (A_7|_{f_i}^{\bar{f}_i} \dashv \circ), (A_8|_{f_i}^{f_i, f_j} \dashv \bullet)\}$.

КОНСТРУКТОР ТРЕУГОЛЬНИКА СЕРПИНСКОГО

Выполним конкретизацию конструктора C_{SERP} , предназначенную для формирования классического фрактала — треугольника (салфетки) Серпинского [1–4, 6, 11]:

$$C_{GI} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{GI} \rangle K \mapsto C_{SERP} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{SERP} \rangle,$$

где $\Lambda_{SERP} = \Lambda_{GI} \cup \Lambda_4$, часть ИОК Λ_4 определяет:

— начальные условия: начальная фигура (терминал) \blacktriangle с атрибутами размеров $h = \sqrt{3}/2, l = 1$ и положением центра $x_{Ц} = 0, y_{Ц} = 0$;

— правило подстановки $\psi = \langle s, g \rangle$, где s состоит из единственного отношения подстановки, представленного на рис. 1, и операций над атрибутами $g = \langle \tau_2/(h, 2), \tau_2/(l, 2) \rangle$;

— размер фигуры в правой части отношения подстановки s такой же, как и в левой;

— условие завершения $N = \infty$.

Реализацию представим в виде последовательности сентенциальных форм $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ (рис. 2, изображение увеличено по отношению к s).

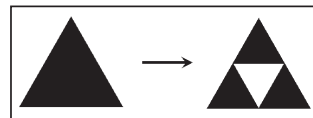


Рис. 1. Отношение подстановки s конструктора C_{SERP}

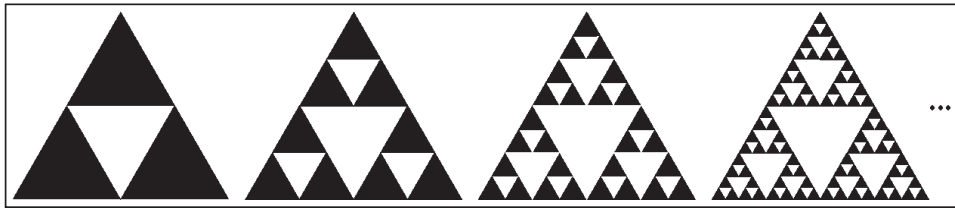


Рис. 2. Последовательность конструирования треугольника Серпинского

Реализация выполняется следующим образом. Операция частичного вывода осуществляет преобразование формы f_i в f_{i+1} :

— начальную форму f_0 (\blacktriangle) (согласно отношению на рис. 1) преобразует в f_1 , однократно применяя операцию подстановки;

— выполняя операции над атрибутами, уменьшает размеры треугольников левой и правой частей отношения подстановки s .

Следующая форма f_2 получена операцией частичного вывода с трехкратным применением операции подстановки (согласно отношению на рис. 1) с последующим уменьшением еще в два раза размеров фигур в левой и правой частях отношения s . Таким же образом получены формы f_3 , f_4 и т.д.

Операция полного вывода с многократным применением операции частичного вывода выполняет преобразование от f_0 до f_∞ .

Форма f_{i+1} представляет собой объединение $N = 3$ форм f_i , существенно непересекающихся и уменьшенных в два раза (коэффициент подобия $r = 1/2$). Следовательно, представленные фракталы (предфракталы) имеют дробную размерность [2]:

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585.$$

Отметим, что дробная размерность получена в предположении, что изображенные на рис. 2 треугольники пустые. Если считать, что внутренние треугольники белые, то получим размерность два во всех сентенциальных формах, в том числе и в предельной (f_∞ при $n \rightarrow \infty$).

ВАРИАТИВНОСТЬ КОНСТРУКТОРОВ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Взаимное расположение элементов (отношение связывания) в правой части отношений подстановки не изменяет фрактальной природы формируемых конструкций (пустых частей здесь нет). Рассмотрим конструктор $C_1 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_5 \rangle$, где $\Lambda_5 = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_1\}$, $\psi_1 = \langle s_1, g \rangle$; отношение s_1 представлено на рис. 3.

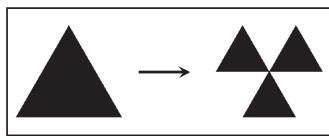


Рис. 3. Отношение подстановки s_1 конструктора C_1

Правая часть отношения s_1 отличается от отношения s тем, что верхний треугольник перемещен вниз. Соответствующие сентенциальные формы представлены на рис. 4.

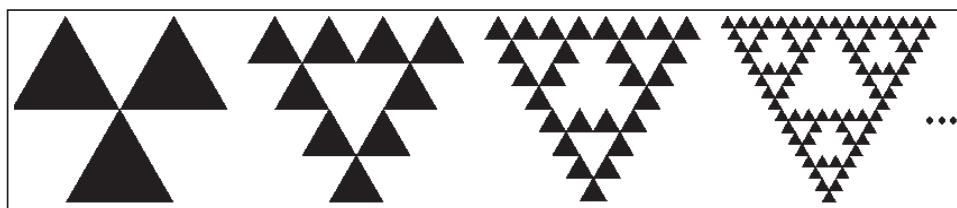


Рис. 4. Множество F_G конструктора C_1 или $F_G(C_1)$

Конструктор $C_2 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_6 \rangle$, где $\Lambda_6 = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_2\}$, $\psi_2 = \langle s_2, g \rangle$, с отношением s_2 , представленным на рис. 5, порождает формы, изображенные на рис. 6.

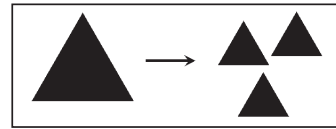


Рис. 5. Отношение подстановки s_2 конструктора C_2

Если считать изображенное белым цветом пустым, дробная размерность будет такой же, как у треугольника Серпинского, т.е. 1.585.

Известные подходы формирования фракталов [1–6] вполне применимы для формирования предельных форм $K_G(C_1)$ и $K_G(C_2)$. В этом смысле КПМ можно рассматривать как равноценную альтернативу известным подходам. Однако последний проявляет большую гибкость и универсальность при работе с атрибутикой.

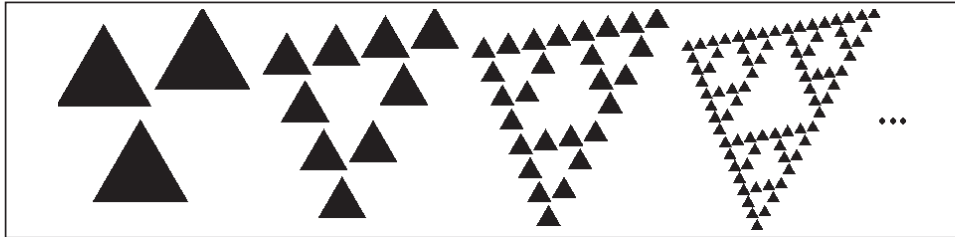


Рис. 6. Множество форм $F_G(C_2)$

АТРИБУТЫ ЦВЕТА В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОСНОВЕ ФРАКТАЛОВ T_G

Рассмотрим пример конструктора с разноцветными элементами $C_3 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_7 \rangle$, где $\Lambda_7 = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_3\} \cup \Lambda_8$, $\psi_3 = \langle s_3, g \rangle$; отношение подстановки s_3 представлено на рис. 7.

ИОК Λ_8 определяет операцию подстановки таким образом, чтобы учитывалась только форма фигур. При этом элементы (в данном случае треугольные) могут быть разноцветными, иметь градиентную заливку, узоры, фотоизображения или другие заливки.

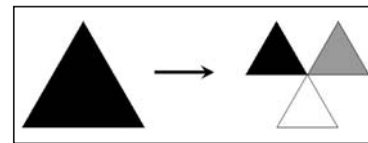


Рис. 7. Отношение подстановки s_3 конструктора C_3

Реализация C_3 в виде $F_G(C_3)$ представлена на рис. 8.

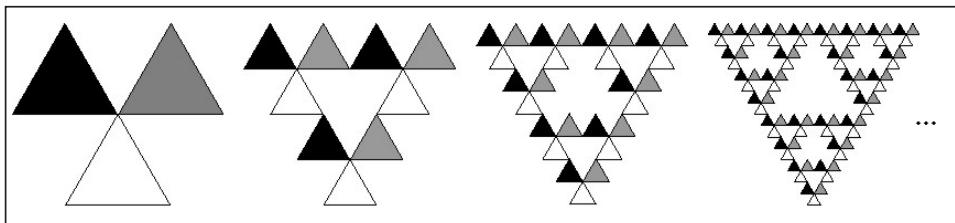


Рис. 8. Множество форм $F_G(C_3)$

Если считать, что в правой части отношения s_3 цвета треугольников — черный, серый и белый, то дробная размерность такая же, как у $F_G(C_{SERP})$ и $K_G(C_{SERP})$ — 1.585. Если же нижний треугольник является лишь контуром (внутренность вырезана), вопрос о дробной размерности остается открытым и может решаться неоднозначно.

ВАРИАТИВНОСТЬ КОНСТРУКТОРОВ ПО ФОРМЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУИРОВАНИЯ

Рассмотренные выше конструкторы реализуют фракталы с однородными элементами так же, как и известные подходы. Конструктивно-продукционный подход (КПП) существенно расширяет возможности формирования фракталов,

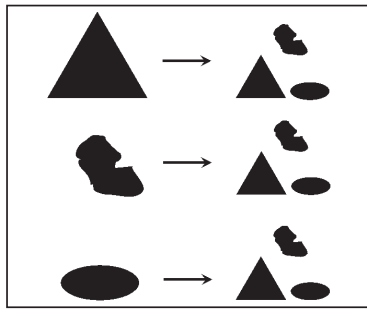


Рис. 9. Отношения подстановки s_4, s_5, s_6 конструктора C_4

применяя множественность отношений подстановки. Рассмотрим, например, конструктор $C_4 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_9 \rangle$, где $\Lambda_9 = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_4, \psi_5, \psi_6\}$, $\psi_i = \langle s_i, g \rangle$, $i = 4, \dots, 6$. Отношения подстановки s_4, s_5, s_6 представлены на рис. 9, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 10. Здесь овал и фигура неправильной формы вписаны в соответствующие треугольники отношения s .



Рис. 10. Множество форм $F_G(C_4)$

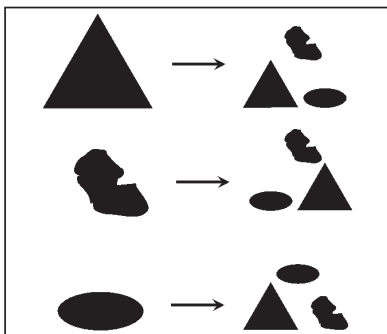


Рис. 11. Отношения подстановки s_7, s_8, s_9 конструктора C_5

Известные подходы формирования геометрических фракталов основаны на применении аффинных преобразований, при которых сохраняется форма и взаимное расположение элементов — преобразования сжатия, вращения и перемещения. КПП позволяет формировать более сложные фракталы с нарушением аффинности. Например, рассмотрим конструктор $C_5 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{10} \rangle$, где $\Lambda_{10} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_7, \psi_8, \psi_9\}$, $\psi_i = \langle s_i, g \rangle$, $i = 7, \dots, 9$. Отношения подстановки s_7, s_8, s_9 представлены на рис. 11, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 12.



Рис. 12. Множество форм $F_G(C_5)$

КОНСТРУКТОРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ С АТТРИБУТИКОЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ

При формировании фракталов с атрибутом существования возникает парадокс несовпадения фрактальной размерности промежуточных форм с фрактальной размерностью предельной фигуры. Рассмотрим конструктор $C_6 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{11} \rangle$, где $\Lambda_{11} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{10}\} \cup \Lambda_{12}$, $\psi_{10} = \langle s, g_1 \rangle$, $g_1 = \langle \tau_2/(h, 2), \tau_2/(l, 2), \tau_2/(e, 2) \rangle$; Λ_{12} включает следующие положения:

- элементы T_G имеют атрибут существования e , принимающий значения на отрезке $[0, 1]$, при этом 1 — элемент существует, 0 — элемента нет;
- начальные условия C_{SERP} дополнены значением $e=1$.

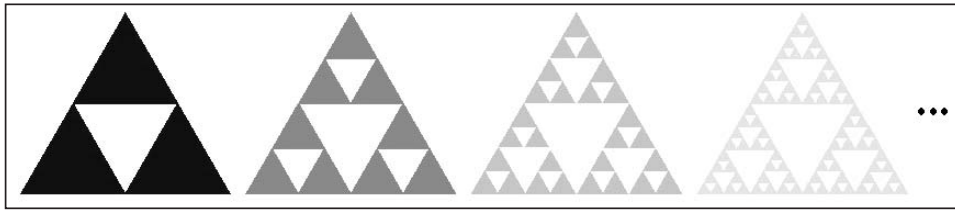


Рис. 13. Множество форм $F_G(C_6)$

Атрибут существования реализован в известных графических редакторах Corel Draw, Photoshop и др. в виде атрибута прозрачности. Реализация конструктора C_6 в виде последовательности сентенциальных форм представлена на рис. 13.

Дробная размерность любой формы из $F_G(C_6)$ равна 1.585, а $K_G(C_6)$ — нулю, т.е. $\lim_{N \rightarrow \infty} (d(f_N)) \neq d(\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N))$.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЭЛЕМЕНТАМИ

Все известные геометрические фракталы построены на основе требования существенно не пересекающихся элементов. Покажем возможности КПП, снимающие данное ограничение. Они основаны на формировании фракталов в трехмерном пространстве с последующим проецированием на плоскость.

Рассмотрим конструктор $C_7 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{13} \rangle$, где $\Lambda_{13} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{11}\} \cup \Lambda_{14}$, $\psi_{11} = \langle s_{10}, g_2, g_3 \rangle$, отношение подстановки s_{10} представлено на рис. 14, $g_2 = \langle \tau_2 / (h, 2), \tau_2 / (l, 2), \tau_2 \circ (\bar{f}_i, f_i), \tau_2 + (i, i, 1) \rangle$, $g_3 = \langle \tau_0 + (z \downarrow t_1, z \downarrow t, 0), \tau_0 + (z \downarrow t_2, z \downarrow t, l), \tau_0 - (z \downarrow t_3, z \downarrow t, l) \rangle$.

Информационное обеспечение конструирования Λ_{14} включает следующие положения:

- все элементы имеют атрибут смещения относительно плоскости $z = 0$;
- начальные условия C_{SERP} дополняются значениями атрибутов заменяемого треугольника $z \downarrow t = 0$, треугольников в левой части отношения подстановки $z \downarrow t_1 = 0, z \downarrow t_2 = l, z \downarrow t_3 = -l$ и значением $i = 1$;
- конструктор формирует две формы одновременно: объемную (с фигурами на параллельных плоскостях) f_i , предназначенную для дальнейшего формирования фрактала, и плоскую \bar{f}_i , в которой все плоскости f_i совмещены с плоскостью $z = 0$ операцией $\circ (f_i, f_i)$.

Реализация сентенциальных форм \bar{f}_i конструктора C_7 представлена на рис. 15.

Отметим, что многослойные изображения применяются во многих графических редакторах, таких как Corel Draw, Photoshop, AutoCAD и др.

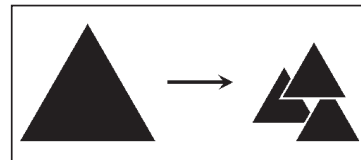


Рис. 14. Отношение подстановки s_{10} конструктора C_7

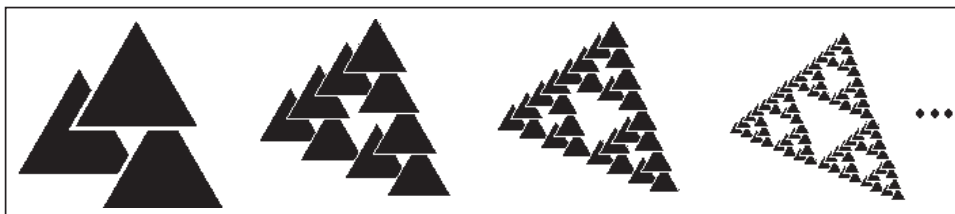


Рис. 15. Сентенциальные формы \bar{f}_i конструктора C_7

ФРАКТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ДРОБНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

В рассмотренных выше конструкторах реализации фракталов имеют постоянную дробную размерность. Рассмотрим примеры изменения дробной размерности в процессе порождения фракталов, в частности конструктора $C_8 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{15} \rangle$, где $\Lambda_{15} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{12}, \psi_{13}\}$, $\psi_i = \langle s_i, g \rangle$, $i=12,13$. Отношения подстановки s_{12}, s_{13} представлены на рис. 16, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 17.

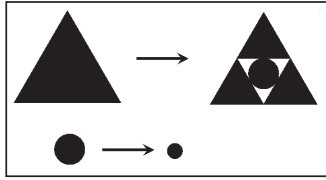


Рис. 16. Отношения подстановки s_{12}, s_{13} конструктора C_8

Сентенциальная форма f_i состоит из $n_i = 3^i$ треугольников с коэффициентом сжатия $1/2^i$ (относительно начального) и $m_i = n_{i-1} + 3^{i-1}$ кругов с таким же коэффициентом сжатия. С применением метрики Хаусдорфа [2] и треугольника в качестве «шара» [2] получим дробную размерность формы f_i :

$$d_i = \frac{\log(4n_i + m_i)}{\log 2^i} = \frac{\log(4n_i + m_i)}{i \log 2},$$

график зависимости которой представлен на рис. 18.

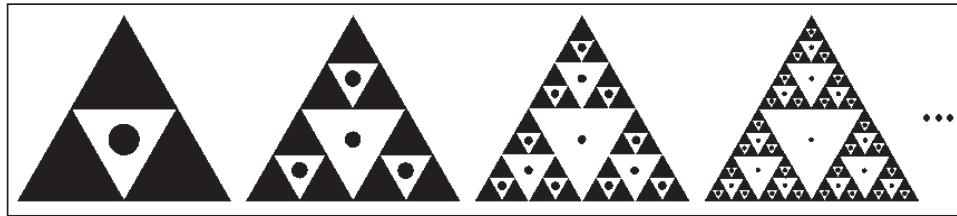


Рис. 17. Множество форм $F_G(C_8)$

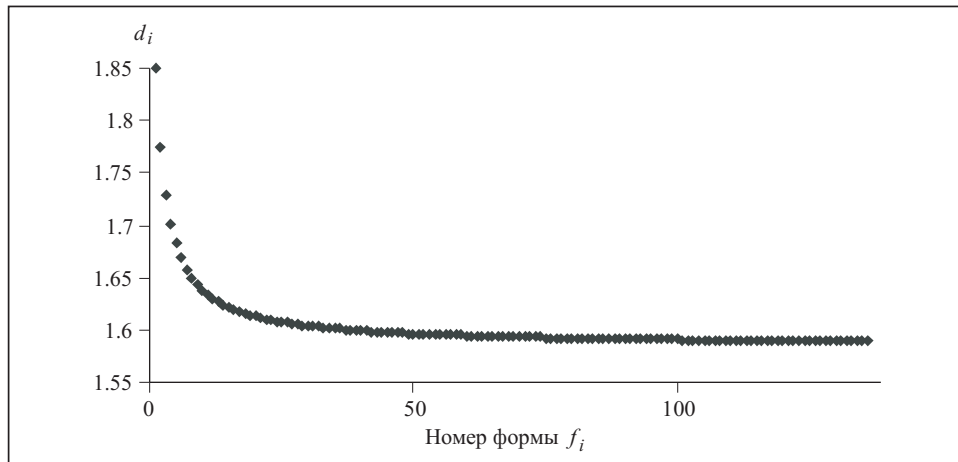


Рис. 18. График зависимости дробной размерности формы f_i конструктора C_8

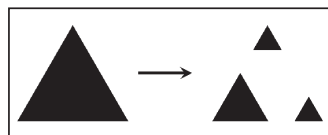


Рис. 19. Отношение подстановки s_{14} конструктора C_9

Следующий конструктор $C_9 = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{16} \rangle$, где $\Lambda_{16} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{14}\}$, $\psi_{14} = \langle s_{14}, g \rangle$, примечателен значением дробной размерности f_∞ . Отношения подстановки s_{14} представлено на рис. 19, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 20.

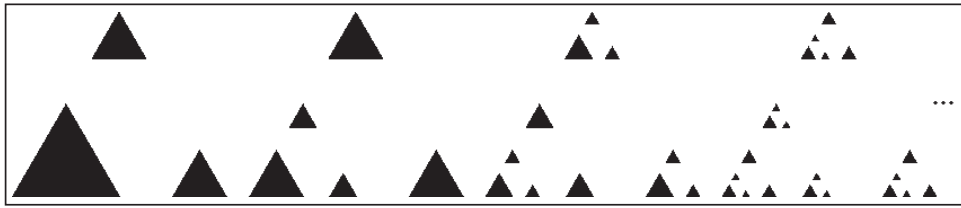


Рис. 20. Множество форм $F_G(C_9)$

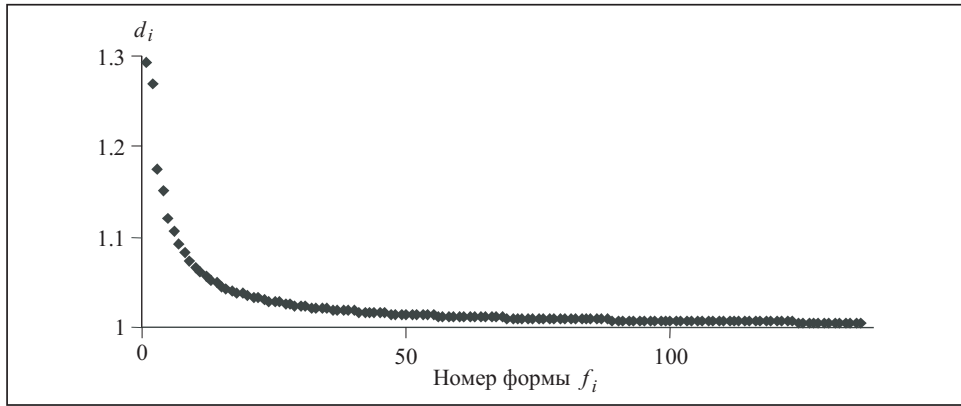


Рис. 21. График зависимости дробной размерности формы f_i конструктора C_9

Сентенциальная форма f_1 состоит из одного треугольника ($n_1 = 1$) с коэффициентом сжатия $1/2$ и $m_1 = 2$ треугольников с коэффициентом сжатия $1/4$. Форма f_i состоит соответственно из $n_i = n_{i-1} = 2m_{i-1}$ (коэффициент $1/2^i$) и из $m_i = 2n_{i-1}$ (коэффициент $1/2^{i+1}$) треугольников. Вычисляя, как и ранее, дробную размерность формы f_i , получаем

$$d_i = \frac{\log(4n_i + m_i)}{\log 2^{i+1}} = \frac{\log(4n_i + m_i)}{(i+1)\log 2};$$

ее график зависимости представлен на рис. 21.

Таким образом, дробная размерность $\lim_{N \rightarrow \infty} (d(f_N)) = 1$ сконструированного фрактала f_∞ , являющегося канторовой пылью [2], такая же, как и у гладкой кривой. Это ставит под сомнение общепринятую интерпретацию дробной размерности как промежуточную между целочисленными размерностями евклидова пространства.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МУЛЬТИФРАКТАЛОВ

Один из способов формирования мультифракталов рассмотрим на примере пары конструкторов: $C_{10} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{17} \rangle$, где $\Lambda_{17} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{15}\}$, $\psi_{15} = \langle s_{15}, g \rangle$, и $C_{11} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{18} \rangle$, где $\Lambda_{18} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{16}\}$, $\psi_{16} = \langle s_{16}, g \rangle$. Отношения подстановки s_{15} и s_{16} представлены на рис. 22 и рис. 23, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 24 и рис. 25.

Обозначив f_i сентенциальные формы конструктора C_{SERP} , f_i — конструктора C_{10} и \hat{f}_i — конструктора

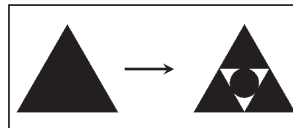


Рис. 22. Отношение подстановки s_{15} конструктора C_{10}

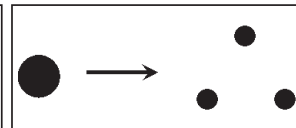


Рис. 23. Отношение подстановки s_{16} конструктора C_{11}

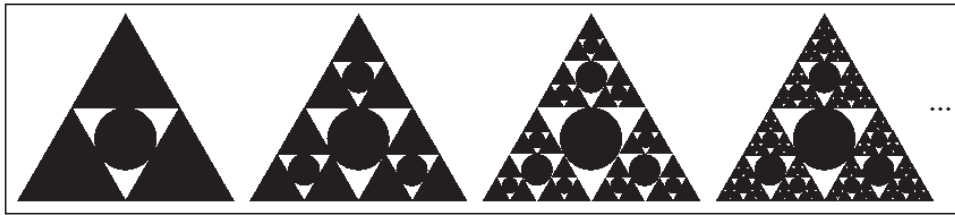


Рис. 24. Множество форм $F_G(C_{10})$

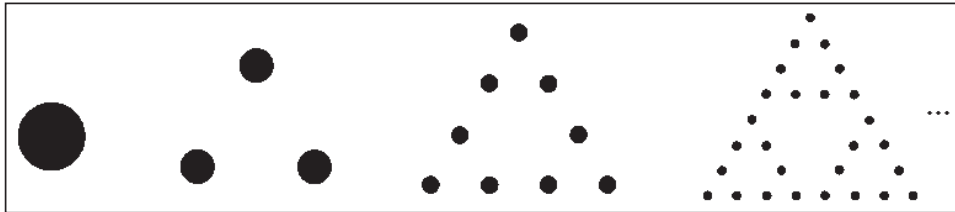


Рис. 25. Множество форм $F_G(C_{11})$

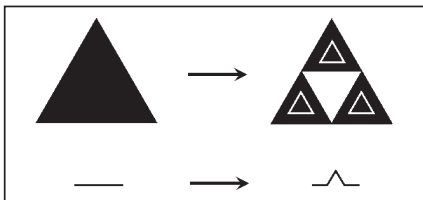


Рис. 26. Отношения подстановки s_{17}, s_{18} конструктора C_{12}

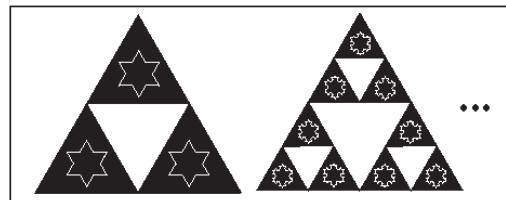


Рис. 27. Множество форм $F_G(C_{12})$

ра C_{11} ; заметим, что $\tilde{f}_i = f_i \cup \left(\bigcup_k^i \hat{f}_k \right)$ является комбинацией сентенциальных форм двух фрактальных последовательностей.

Еще один способ формирования мультифракталов — вложенность фракталов один в другой — представлен конструктором $C_{12} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{19} \rangle$, где $\Lambda_{19} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{17}, \psi_{18}\} \cup \Lambda_{20}$, $\psi_{17} = \langle s_{17}, g \rangle$, $\psi_{18} = \langle s_{18}, g_3 \rangle$, $g_3 = \langle \tau_2 / (l_{line}, 3) \rangle$. ИОК Λ_{20} дополняет начальные условия C_{SERP} начальным значением длины отрезка отношения s_{18} : $l_{line} = 0.4$. Отношения подстановки s_{17} и s_{18} (в s_{18} цвет линий — белый) представлены на рис. 26, а соответствующие сентенциальные формы — на рис. 27. На рис. 27 внутри каждого треугольника Серпинского «развивается» снежинка Коха. Возникает проблема практического определения дробной размерности таких фракталов.

ФРАКТАЛЫ НА ОСНОВЕ СЖИМАЮЩИХ/РАЗЖИМАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Общепринятая основа формирования фракталов — сжимающие отображения. КПМ позволяет формировать фракталы на основе расширяющихся отображений, а также и одновременно сжимающих/разжимающих. Рассмотрим конструктор $C_{13} = \langle M_{GI}, \Sigma_{GI}, \Lambda_{21} \rangle$, где $\Lambda_{21} = \Lambda_{SERP} \setminus \{\psi\} \cup \{\psi_{19}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}\} \cup \Lambda_{22}$; Λ_{22} включает следующие обозначения: f'_i и f''_i — левая и правая части конструкции, добавляемой на i -м шаге, $f'_0 = f''_0$ — начальная конструкция треугольника, как в C_{SERP} ; $i=1$; $h \lrcorner t_{21}$, $l \lrcorner t_{21}$ — высота и ширина треугольников в левой и правой частях отношения $s \lrcorner \psi_{21}$; $h \lrcorner t_{22}$, $l \lrcorner t_{22}$ — высота и ширина треугольников в левой и правой частях отношения $s \lrcorner \psi_{22}$;

$$\psi_{19} = \langle s_{19}, g_4 \rangle, \psi_{20} = \langle s_{20}, g_5 \rangle, \psi_{21} = \langle s, g_6 \rangle, \psi_{22} = \langle s, g_7 \rangle,$$

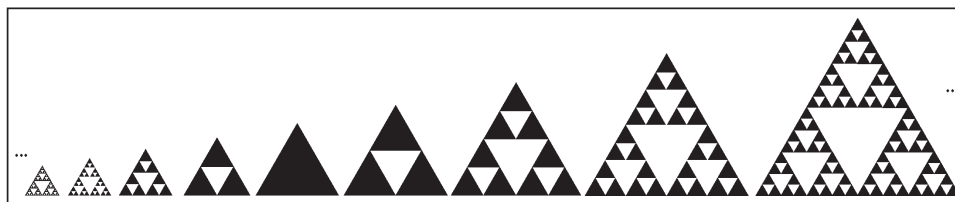


Рис. 28. Фрактал $K_G(C_{13})$

$$\begin{aligned}
 s_{19} &= \langle f'_{i-1} \rightarrow f'_{i-1} \cdot f'_i \rangle, \quad s_{20} = \langle f''_{i-1} \rightarrow f''_{i-1} \cdot f''_i \rangle, \\
 g_4 &= \langle \tau_2^-(x_{\text{ц}} \leftarrow f'_i, l), \tau_2^-(y_{\text{ц}} \leftarrow f'_i, 1.25), \tau_2^-(l \leftarrow f'_i, 1.25), \tau_2^-(h \leftarrow f'_i, 1.25) \rangle, \\
 g_5 &= \langle \tau_2^-(y_{\text{ц}} \leftarrow f''_i, 0.8), \tau_2^-(l \leftarrow f''_i, 0.8), \tau_2^+(x_{\text{ц}} \leftarrow f''_i, l), \tau_2^-(h \leftarrow f''_i, 0.8) \rangle, \\
 g_6 &= \langle \tau_0^-(l \leftarrow t_{21}, 2.5), \tau_0^-(h \leftarrow t_{21}, 2.5) \rangle, \\
 g_7 &= \langle \tau_0^-(l \leftarrow t_{22}, 1.6), \tau_0^-(h \leftarrow t_{22}, 1.6) \rangle.
 \end{aligned}$$

Сформированный фрактал приведен на рис. 28.

Значение коэффициентов сжатия в правилах $s \leftarrow \psi_{21}$ и $s \leftarrow \psi_{22}$ могут быть как больше, так и меньше единицы.

Таким образом, показаны возможности формирования нового, ранее не известного и не изученного класса фракталов. При разжимающем отображении можно получить фигуру, заполняющую всю плоскость, но с нулевой площадью.

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФРАКТАЛОВ

Полагаем справедливым высказывание В.А. Еровенко [11] относительно понятия фрактала: «Хотя точного определения фрактала до сих пор не предложено, такое определение при наличии разрушающих его контрпримеров особо не нужно в силу сложившейся «интересубъективной практики» научного применения этой категории математики. Это тот случай, когда нужно продолжать знакомство с новым понятием не с уточнения его определения, а с рассмотрения конкретизирующих его контрпримеров».

Приведенные в данной статье примеры дают основания для строгого определения фракталов, объединяющего все известные в настоящее время характерные особенности фракталов. Общепринятыми являются свойства самоподобия, дробной размерности и нетривиальная структура во всех масштабах. Более полный перечень свойств самоподобия изложен в работе [3]:

- дробная фрактальная размерность;
- функции, не дифференцируемые ни в одной точке;
- самоподобие: геометрическое множество Q содержит копии самого себя во многих различных масштабах;
- множество Q имеет «тонкую структуру», которая содержит детали в произвольных малых масштабах;
- множество Q имеет сложную структуру, но его фактическое определение достаточно простое;
- Q получается рекурсивной процедурой;
- геометрию множества Q сложно описать в классических терминах, и она не является множеством решений любого простого уравнения;
- затруднительно описывать локальную геометрию множества Q — вблизи каждой ее точки находится большое количество других точек и расстояния между ними различно;
- размер Q не определяется такими мерами, как длина, площадь, объем.

Заметим, что геометрические фракталы определяют как множества, обладающие свойством самоподобия, хотя самоподобием обладают только предельные фигуры (f_∞).

Перечисленные характерные признаки проявляются в том или ином сочетании при рекурсивном порождении конструктивной системой.

Определение 1. Детерминированным геометрическим фракталом называется фигура, которая может быть сформирована конструктивной системой с рекурсивными, постоянно применимыми правилами.

Это определение учитывает все признаки фрактальности.

Можно выделить чистые фракталы, если все отношения подстановки — рекурсивные.

Отметим некоторую противоречивость в определении предфрактала как самоподобной геометрической фигуры, каждый фрагмент которой повторяется в упрощенном виде при уменьшении масштаба конечное число раз. Количество уровней масштаба, на которых наблюдается подобие, называется порядком предфрактала. При порядке, стремящемся к бесконечности, предфрактал переходит во фрактал. Противоречивость заключается в том, что в классических работах определение дробной размерности показано на предфракталах одного–двух порядков (т.е. уже начальные предфракталы обладают дробной размерностью — по определению К. Фалькона они являются фракталами); большое количество работ по исследованию фракталов в природе и технике не используют пределов, фактически оперируют с предфракталами низких порядков, называя их фракталами.

Понятие «предфрактал» определяется как фрактал конечного порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный конструктивно-продукционный подход порождения фракталов является более общим, чем известные алгоритмический, функционально-алгоритмический и сжимающих аффинных автоматов, L-систем и другие подходы. Он позволяет порождать более широкий класс фракталов. В частности, показаны возможности применения большой вариативности атрибутики цвета; неоднородных исходных элементов формирования фракталов; комбинирования различных (в том числе классических) фракталов в мультифракталах.

Кроме того, возможности формирования фракталов расширены путем устранения ограничений, необходимых для других подходов, а именно:

— исходные элементы формирования фракталов должны быть представлены существенно непересекающимися множествами;

— применяются только сжимающие отображения.

Предложенный подход позволил установить несколько неизвестных ранее свойств дробной размерности:

— возможность изменения ее в процессе порождения предельного фрактала и сходимости, в частности, к единице;

— несовпадение дробных размерностей предела форм в процессе порождения и предельного фрактала $\lim_{N \rightarrow \infty} (d(f_N)) \neq d(\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N))$.

Применение КПМ позволило дать простое определение детерминированного геометрического фрактала, учитывающего все характеризующие его свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Кроновер Р. Фрактал и хаос в динамических системах. Москва: Техносфера, 2006. 484 с.

3. Falconer K. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1999. 288 p.
4. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.
5. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.
6. Рысцов И.К. Аффинные автоматы и классические фракталы. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, №1. С. 13–23.
7. Lindenmayer A. Mathematical models for cellular interaction in development. *J. Theoret. Biology*. 1968. Vol. 18, Iss. 3. P. 280–315.
8. Шинкаренко В.И., Ильман В.М. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. I. Обобщенная формальная конструктивно-продукционная структура. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 8–16.
9. Шинкаренко В.И., Ильман В.М. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. II. Уточняющие преобразования. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 6. С. 15–28.
10. Шинкаренко В.И., Ильман В.М., Скалозуб В.В. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования. I. Формальные алгоритмические структуры. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 3. С. 3–14.
11. Ерошенко В.А. Концепция фрактала Мандельброта с математической и философской точек зрения. *Математические структуры и моделирование*. 2015. № 4 (36). С. 29–39.

Надійшла до редакції 13.03.2018

В.І. Шинкаренко

КОНСТРУКТИВНО-ПРОДУКЦІЙНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФРАКТАЛІВ

Анотація. Запропоновано конструктивно-продукційний підхід породження фракталів, який є більш загальним, ніж інші відомі підходи. Показано можливості застосування великої варіативності атрибутів і вихідних елементів формування фракталів, а також комбінування фракталів у мультифракталах. Можливості формування фракталів розширено шляхом усунення необхідних для інших підходів обмежень. Запропонований підхід дозволив встановити кілька невідомих раніше властивостей дробової розмірності, що полягають у можливості її зміни в процесі породження фракталу і розбіжності дробових розмірностей границі форм у процесі породження і граничного фракталу. Наведено просте визначення детермінованого геометричного фракталу, яке враховує усі його характеристики.

Ключові слова: конструктор, фрактал, мультифрактал, дробова розмірність, трикутник Серпінського, фрактальна геометрія.

V.I. Shynkarenko

CONSTRUCTIVE-SYNTHESIZING REPRESENTATION OF GEOMETRIC FRACTALS

Abstract. A constructive-production approach to the generation of fractals is proposed, which is more general than other known approaches. The possibilities of application are shown: great variability of the attributes and initial elements of the formation of fractals; combination of fractals in multifractals. The possibilities of fractal generation are extended by eliminating the constraints necessary for other approaches. The proposed approach allowed us to establish several properties of fractional dimension that were previously unknown, which allow its change in the process of fractal generation and mismatch of fractional dimensions of the form limit in the process of generation and the limiting fractal. A simple definition of a deterministic geometric fractal that takes into account all the characteristic properties is given.

Keywords: constructor, fractal, multifractal, fractional dimension, Sierpinski triangle, fractal geometry.

Шинкаренко Виктор Иванович,

доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепр, e-mail: Shinkarenko_vi@ua.fm.