УДК 681.51

А.А. Стенин, Ю.А Тимошин, И.Г. Дроздович

ФУНКЦИИ УОЛША В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: линейные нестационарные системы, линейно-квадратичные задачи оптимизации, функции Уолша, фундаментальная матрица, замкнутое оптимальное управление.

Введение

Известно, что все реальные объекты управления в той или иной мере нелинейны и нестационарны [1]. Анализ и синтез систем управления для таких объектов представляет собой сложную математическую проблему, решение которой до настоящего времени получено для некоторых частных случаев. Однако большинство объектов управления позволяет принять в качестве математической модели линеаризованную нестационарную систему (ЛНС) и применить развитой математический аппарат решения линейных нестационарных дифференциальных уравнений к решению задач управления ими [2–4]. Несмотря на это, синтез оптимальных систем управления для таких объектов по-прежнему остается сложной проблемой ввиду нестационарности параметров, решение которой во многом зависит от ограничений, наложенных на векторы состояния и управления, на время управления и целей оптимизации. Один из возможных вариантов решения указанной проблемы — совместное использование известных методов оптимизации и математического аппарата функций Уолша.

Постановка задачи

Пусть динамика ЛНС описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t),\ \ t \in [t_0, T_f],\ \ \bar{x}(t_0) = x^{-(0)}, \tag{1}$$

где $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ik}(t)\}$ — матрицы размерности $n \times n$ è $n \times m$ соответственно, элементы которых — знакопостоянные

$$\operatorname{sign}[a_{ij}(t)] = \text{const},\ \operatorname{sign}[b_{ik}(t)] = \text{const}, \tag{2}$$

монотонные

$$\operatorname{sign}[da_{ij}(t)/dt] = \text{const},\ \operatorname{sign}[db_{ik}(t)/dt] = \text{const} \tag{3}$$

функции, имеют непрерывные первые производные и ограниченные области определения на интервале времени $[t_0, T_f]$, конечное состояние фиксировано и равно нулю, вектор управляющих воздействий неограничен.

В общем случае критерий качества для детерминированных процессов с непрерывным временем представляет функционал вида

$$I = V(\bar{x}(T), T) + \int_{t_0}^{T} \Lambda(\bar{x}, \bar{u}, t)dt, \tag{4}$$

где V, Λ — скалярные функции векторов состояния и управления.

Для линейно-квадратичных задач оптимизации критерием качества является функционал вида

$$I=\frac{1}{2}\left\{x^{-\mathrm{T}}(T_f)F\bar{x}(T_f)+\int_{t_0}^{\mathrm{T}_f}[x^{-\mathrm{T}}(t)Q(t)\bar{x}(t)+u^{-\mathrm{T}}(t)\Theta(t)\bar{u}(t)]dt\right\}, \tag{5}$$

где F, $Q(t)$ — постоянная и нестационарная положительно-полуопределенная матрицы размера $n\times n$; $R(t)$ — нестационарная положительно-определенная матрица размера $m\times m$. В общем случае линейно-квадратичная задача оптимизации формулируется следующим образом [5]: необходимо найти оптимальное управление $\bar{u}^*(t)$, $t\in[t_0,T_f]$, обеспечивающее перевод системы (1) из заданного начального состояния $\bar{x}(t_0)=\bar{x}^{(0)}$ в конечное состояние $\bar{x}(T_f)$ и минимизирующее функционал (5).

Класс линейно-квадратичных задач оптимизации впервые был рассмотрен профессором А.М. Летовым [6] и американским математиком Р. Калманом [7].

Принцип максимума в линейно-квадратичных задачах оптимизации

В соответствие с принципом максимума [8] вводится в рассмотрение линейная однородная вспомогательная система дифференциальных уравнений, которая для (1) и функционала (4) имеет вид

$$\dot{\bar{p}}(t)=-\frac{\partial\Lambda(\bar{x},\bar{u},t)}{\partial\bar{x}}-A^T(t)\bar{p}(t), \tag{6}$$

где вектор $\bar{p}(t)$ называется вспомогательным и определен только вдоль оптимальной траектории $\bar{x}^*(t)$. Для системы (1) и функционала (4) с учетом (6) образуется функция Гамильтона

$$H(\bar{x},\,\bar{p},\bar{u},t)=\Lambda(\bar{x},\bar{u},t)+p^{-\mathrm{T}}(t)(A(t)\bar{x}(t)+B(t)\bar{u}(t)). \tag{7}$$

Необходимое условие оптимальности для указанного типа задач формируется следующим образом: если $\bar{u}^*(t)$ оптимально в смысле выбранного функционала, то существует непрерывная ненулевая вектор-функция $\bar{p}(t)$, такая, что решения $\bar{x}^*$ è $\bar{p}^*$ канонических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}^*(t)&=\frac{\partial H(\bar{x}^*,\,\bar{p}^*,\bar{u}^*,t)}{\partial\bar{p}(t)},\\ \dot{\bar{p}}^*(t)&=\frac{\partial H(\bar{x}^*,\,\bar{p}^*,\bar{u}^*,t)}{\partial\bar{x}(t)}\end{aligned} \tag{8}$$

удовлетворяют граничным условиям:

$$\bar{x}^*(t_0)=\bar{x}(t_0),\;\; \bar{x}^*(T_f)=\bar{x}(T_f),\;\; \bar{p}^*(T_f)=\mathrm{const}$$

— произвольный постоянный положительный вектор.

В работе [9] показано, что гамильтониан (7) для системы (1) и функционала (5) принимает минимальное значение, если

$$\bar{u}^*(t)=-\Theta^{-1}(t)B^T(t)\bar{p}^*(t). \tag{9}$$

Соотношение (9) показывает, что вектор оптимального управления $\bar{u}^*(t)$ — линейная функция вспомогательного вектора $\bar{p}^*(t)$ и однозначно определяется этим вектором. Отсюда следует, что рассматриваемая оптимизационная задача является нормальной.

Известно [9], что $\bar{p}^*(t)$ и $\bar{x}^*(t)$ связаны соотношением вида $\bar{p}^*(t) = Z(t)\bar{x}^*(t)$, где матрица $Z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{Z}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)Z(t) - Z(t)A(t) + Z(t)B(t)\Theta^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)Z(t) - Q(t) \tag{10}$$

с граничным условием $Z(T_f) = F$.

Уравнение (10) представляет собой нелинейное дифференциальное матричное уравнение Риккати, численное решение которого даже для небольшой размерности вектора $\bar{x}(t)$ при нестационарных матрицах $A(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$, $Q(t)$ связано с трудностями вычислительного характера. Это обстоятельство усложняет или делает невозможной непосредственную реализацию аналитических методов определения оптимального управления для нестационарных объектов и многообразных условий их функционирования.

Однако подстановка выражения для оптимального управления (10) в канонические уравнения (8) позволяет получить систему упрощенных канонических уравнений для переменных состояния $\bar{x}^*(t)$ и вспомогательной переменной $\bar{p}^*(t)$. Связь между $\bar{p}^*(t)$ и $\bar{x}^*(t)$ может быть определена с помощью фундаментальной матрицы системы упрощенных канонических уравнений в виде

$$\bar{p}^*(t) = K(t)\bar{x}^*(t), \tag{11}$$

где $K(t)$ — матрица, определяемая фундаментальной матрицей. Подставив соотношение (11) в (9), получим выражение для оптимального управления:

$$\bar{u}^*(t) = -\Theta^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K(t)\bar{x}^*(t). \tag{12}$$

Для линейных нестационарных систем вида (1) и матриц $Q(t)$, $\Lambda(t)$ квадратичного функционала (5), зависящих от времени, аналитическое выражение для фундаментальной матрицы в общем случае получить невозможно. Однако ее можно найти приближенно, воспользовавшись разложениями в ряды по различным системам линейно-независимых функций, в частности функций Уолша [10, 11].

Актуальность применения функций Уолша

Принятие ограничений (2), (3) относительно коэффициентов уравнений (1) и ограничений на время управления позволяют использовать математический аппарат функций Уолша для преодоления указанных выше трудностей. В частности, предлагается находить фундаментальную матрицу системы упрощенных канонических уравнений путем приближенного интегрирования линейного матричного дифференциального уравнения состояния, которому она удовлетворяет. При этом элементы искомой матрицы определяются в виде рядов Уолша, постоянные коэффициенты которых находятся из системы алгебраических уравнений. Поскольку в (9) известные матрицы $\Theta(t)$ могут быть представлены в терминах функций Уолша, в выражении (12) матрица также определяется в терминах функций Уолша.

В настоящее время систематизированного изложения материала по применению функций Уолша в теории управления не существует. Актуальность применения функций Уолша для решения задач анализа и синтеза линейных нестационарных систем объясняется тем, что функции Уолша принимают значения только ± 1 и предоставляют собой аппарат, тесно связанный с двоичным разложением. В связи с этим применение системы функций Уолша позволяет легко на цифровой технике генерировать и моделировать кодовые последовательности системы Уолша (свойство коммутативности), что позволяет существенно упростить вычислительные процедуры цифровой реализации алгоритмов, построенных на их основе. Кроме того, в работе [12] показано, что интеграл от функций Уолша $I_k(x) = \int\limits_0^x \varphi_k(x')dx' (k = 0,1,2,...)$ может быть представлен в виде ряда по функциям Уолша при $k = 2^n + k',\ 0 \le k' \le 2^n$:

$$I_0(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}\varphi_{2^p}(x),$$

$$I_k(x) = 2^{-(n+2)}\left[\varphi_k(x) - \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p}\varphi_{2^{n+p}+k}(x)\right],\ k \ge 1.$$

Эти соотношения могут быть представлены в компактной форме

$$\int\limits_0^x \overline{\varphi}_N(x')dx' \approx P_{(N\times N)}\overline{\varphi}_N(x), \tag{13}$$

где $\varphi^{-\ T}(x) = \{\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots.\}$ — вектор, компонентами которого являются функции Уолша; P — операционная матрица интегрирования [12].

Поскольку $\overline{\varphi}(x)$ и P в (13) имеют бесконечную размерность, аппроксимация конечной размерности может быть получена ограничением вектора $\overline{\varphi}(x)$, содержащего только 2^n функций Уолша для некоторого целого $n \ge 1$.

Общее выражение для операционной матрицы произвольной конечной размерности N имеет вид [12]

$$P_{(N\times N)} \begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & -2/NI_{(N/8)} & & \\ & 0 & -1/NI_{N/4} & \\ & & & -1/2NI_{N/2} \\ 2/NI_{(N/8)} & O_{(N/8)} & & \\ & 1/NI_{(N/4)} & O_{(N/4)} & \\ & & 1/2NI_{N/2} & O_{(N/2)} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Для использования функций Уолша необходимо также ввести безразмерное время τ равное $\tau = \dfrac{t - t_0}{T_f - t}$, чтобы привести интервал управления $[t_0, T_f]$ к нормированному интервалу $[0, 1]$.

Линейно-квадратичная задача минимизации энергии

В данном случае задача формулируется следующим образом: найти управление $\bar{u}(t) \in E^m$, переводящее линейную нестационарную систему вида (1) из заданного начального состояния $\bar{x}(t_0)$ в нулевое конечное $\bar{x}(T_f) = 0$ за фиксированный промежуток времени $t \in [t_0, T_f]$ и минимизирующее функционал (6) при $Q = 0$, $F = 0$. Оптимальный закон управления для этой задачи может быть получен с помощью принципа максимума и определяется в виде (9). В силу положительной определенности матрицы $\Theta(t)$ управление (9) обеспечивает единственный минимум функции Гамильтона вида (7) для ЛНС (1) и функционала (5) при $Q = 0$, $F = 0$.

Запишем уравнение (8) с учетом (9) в упрошенной канонической форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^*(t) \\ \dot{\bar{p}}^*(t) \end{bmatrix} = N(t) \begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{p}^* \end{bmatrix} \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^*(T_f) = \bar{0}\,. \tag{16}$$

Здесь $N(t)$ — матрица размера $2n \times 2n$, имеющая блочную структуру

$$N(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ 0 & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}.$$

Пусть $W(t, t_0)$ — матрица переходов системы (15) размера $2n \times 2n$, которая также может быть представлена в виде блочной матрицы:

$$W(t, t_0) = \begin{bmatrix} W_{11}(t, t_0) & W_{12}(t, t_0) \\ W_{21}(t, t_0) & W_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Из основного соотношения

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix} = W(t, t_0) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t_0) \\ \bar{p}^*(t_0) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

учитывая (16) и предполагая, что $W_{12}(T_f, t_0)$ невырождена, следует, что

$$\bar{p}^*(t_0) = -W_{12}^{-1}(T_f, t_0) W_{11}(T_f, t_0) \bar{x}^*(t_0)\,.$$

Отсюда уравнения (17) можно записать в виде

$$\bar{x}^*(t) = [W_{11}(t, t_0) - W_{12}(t, t_0) W_{12}^{-1}(T_f, t_0) W_{11}(T_f, t_0)] \bar{x}^*(t_0) = K_1(t) \bar{x}^*(t_0)\,,$$

$$\bar{p}^*(t) = [W_{21}(t, t_0) - W_{22}(t, t_0) W_{12}^{-1}(T_f, t_0) W_{11}(T_f, t_0)] \bar{x}^*(t_0) = K_2(t) \bar{x}^*(t_0)\,. \tag{18}$$

Подстановка соотношения (18) в (9) позволяет записать закон оптимального управления следующим образом:

$$\bar{u}^*(t) = -G(t) \bar{x}^*(t_0)\,, \tag{19}$$

где матрица коэффициентов усиления $G(t)$ размера $m \times n$ имеет вид

$$G(t) = \Theta^{-1}(t) B^{\mathrm{T}}(t) K_2(t)\,. \tag{20}$$

Так как $\Theta(t)$, $B(t)$ в (20) заданы, то для определения $G(t)$ в (19) с учетом (18) необходимо найти фундаментальную матрицу $W(t, t_0)$.

Матрица $W(t, t_0)$ является решением уравнения состояния

$$\dot{W}(t, t_0) = N(t)W(t, t_0) \tag{21}$$

с начальным условием $W(t, t_0) = I$.

Для решения уравнения (21) воспользуемся математическим аппаратом функций Уолша. Полагаем, что найдено приближение элементов матриц

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\},\ \ B(t) = \{b_{ik}(t)\}\ (i,\ j = \overline{1, n}),\ \ (k = \overline{1, m})$$

уравнения (1) в виде рядов по системе функций Уолша. В силу того, что матрица $\Theta(t) = \{\theta_{ik}(t)\}\ (i, k = \overline{1}, \overline{m})$ задана, ее элементы также могут быть аппроксимированы рядами по системе функций Уолша, т.е. имеем представления элементов матриц $A(t)$, $B(t)$, $\Theta(t)$ рядами Уолша:

$$\begin{gathered} a_{ij}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} a_r^{(ik)} \varphi_r(t)\,(i,\ j = \overline{1, n}),\ \ A(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} A_r \varphi_r(t), \\ A_r = \{a_r^{(ij)}\}\,(r = \overline{0, R-1}), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} b_{ik}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} b_r^{(ik)} \varphi_r(t)\ (i = \overline{1}, \overline{n}),\ \ (k = \overline{1}, \overline{m}),\ \ B(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} B_r \varphi_r(t), \\ B_r = \{b_r^{(ij)}\}(\theta = \overline{0}, \overline{R} - \overline{0}), \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \theta_{ik}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} r_r^{(ik)} \varphi_r(t)\ (i, k = \overline{1}, \overline{m}),\ \ \Theta(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} \Theta_r \varphi_r(t), \\ \Theta_r = \{\theta_r{}^{(ij)}\}(r = \overline{0}, \overline{R} - \overline{1}). \end{gathered} \tag{24}$$

С помощью разложений в ряд Уолша матрицы $N(t) = \{n_{ij}(t)\}$ и $W(t, t_0) = \{w_{ij}(t, t_0)\}(i,\ j = \overline{1{,}2\,n})$ на рассматриваемом интервале $[t_0, T_f]$ представим в виде

$$\begin{gathered} N(t) \approx \begin{bmatrix} \overline{n}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{n}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{n}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{n}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}, \\ W(t, t_0) \approx \begin{bmatrix} \overline{w}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{w}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{w}^{(2n,1)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{w}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{25}$$

Здесь $\overline{\varphi}_R^{\mathrm{T}}(t) = \{\varphi_0(t), ..., \varphi_r(t), ..., \varphi_{R-1}(t)\}$ — R-мерный вектор функций Уолша, заданных на интервале $[t_0, T_f]$; $\overline{n}^{(ij)\mathrm{T}} = \{n_0^{(ij)}, ..., n_r^{(ij)}, ..., n_{R-1}^{(ij)}\}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов разложения в ряд Уолша известной функции

$n_{ij}(t)$; $\overline{w}^{(ij)\mathrm{T}} = \{w_0^{(ij)}, ..., w_r^{(ij)}, ..., w_{R-1}^{(ij)}\}$ — R-мерный вектор постоянных неизвестных коэффициентов разложения в ряд Уолша искомой функции $W(t, t_0)$. Интегрируя уравнение (21), получаем

$$W(t, t_0) - I = \int_{t_0}^{t} N(t')W(t', t_0)dt'. \tag{26}$$

Обозначим подынтегральное выражение в (26) как $C(t) = N(t)W(t, t_0)$, где $C(t) = \{c_{ik}(t)\}$ — матрица размера $2n \times 2n$, элементы которой определяем следующим образом:

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \overline{n}^{(ij)\mathrm{T}} \overline{\varphi}_R(t) \overline{w}^{(jk)} \varphi_R(t) .$$

Используя свойство мультипликативности системы функций Уолша [10] на заданном интервале $[t_0, T_f]$, преобразуем выражение для элементов $c_{ik}(t)$ к виду

$$c_{ik}(t) \approx \sum_{j=1}^{2n} \overline{c}_j^{(ij)\mathrm{T}} \overline{\varphi}_R(t) = \overline{c}^{(jk)\mathrm{T}} \varphi_R(t) .$$

Здесь $\overline{\tilde{n}}_j^{(ik)\mathrm{T}} = c_{j,0}^{(ik)}, ..., c_{j,r}^{(ik)}, ..., c_{j,R-1}^{(ik)}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов, элементы которого составлены из суммы произведений коэффициентов разложения $n_r^{(ij)}, w_r^{(ik)}$ в ряд Уолша функкпий $n_{ij}(t), w_{ik}(t, t_0)$ и могут быть определены следующим образом:

$$c_{j,r_1}^{(ik)} \approx \sum_{r=0}^{R-1} n_r^{(ij)} w_{r \oplus r_1}^{(jk)} \;\; (r_1 = \overline{0, R-1}) ;$$

$\overline{\tilde{n}}^{(ik)\mathrm{T}} = c_0^{(ik)}, ..., c_r^{(ik)}, ..., c_{R-1}^{(ik)}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов, элементы которого могут быть определены как

$$c_r^{(ik)} = \sum_{j=1}^{2n} c_{j,r}^{(ik)} \;\; (r_1 = \overline{0, R-1}) .$$

Тогда матрица $C(t)$ может быть определена аналогично $N(t)$, $W(t, t_0)$ как

$$C(t) \approx \begin{bmatrix} \overline{c}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{c}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \overline{c}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix} . \tag{27}$$

Для удобства дальнейших преобразований представим единичную матрицу I размера $2n \times 2n$ из уравнения (26) в виде

$$I = \begin{bmatrix} \overline{e}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \overline{e}^{(i,\,i)\mathrm{T}} & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{e}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix} , \tag{28}$$

где $\bar{e}^{(ii)\mathrm{T}} = \{1, 0, ..., 0\}$ — R-мерный вектор. Учитывая, что $\varphi_0(t) = I$ на всем интервале $[t_0, T_f]$, такое представление возможно.

Подставим (25), (27), (28) в уравнение (26). Используя соотношение (13) для приближенного интегрирования в выражении (14) для операционной матрицы интегрирования, которая с учетом рассматриваемого интервала $[t_0, T_f]$ может быть определена как $P'_{(R\times R)} = (T_f - t_0)P_{(R\times R)}$, получим

$$\begin{bmatrix} \bar{w}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{w}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{w}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{e}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{c}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{c}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \otimes P'_{(R\times R)} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix},$$

где $\otimes$ — прямое произведение. Приравнивая коэффициенты при $\bar{\varphi}_R(t)$ в обеих частях уравнения, получаем

$$\begin{gathered} \bar{w}^{(ii)\mathrm{T}} - \bar{e}^{(ii)T} = \bar{c}^{(ii)\mathrm{T}} P'_{(R\times R)}, \quad i = k, \\ \bar{w}^{(ik)\mathrm{T}} = \bar{c}^{(ik)\mathrm{T}} P'_{(R\times R)}, \; i \neq k (i, k = \overline{1, 2n}). \end{gathered} \tag{29}$$

Уравнения (29) представляют собой систему $2n \times 2n \times R$ линейных алгебраических уравнений, которые используются для определения неизвестных коэффициентов разложения

$$W_r^{(ik)} (r = \overline{0, R-1}), \; (i, k = \overline{1, 2n})$$

элементов переходной матрицы $W(t, t_0)$ в ряд Уолша.

Матрицы $K_1(t), K_2(t)$ размера $n \times n$ на основе полученных коэффициентов разложения в ряд Уолша элементов матрицы $W(t, t_0)$ из уравнений (29) запишем аналогично соотношениям (22)–(24) в виде:

$$\begin{gathered} k_{1ij}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} k_{1r}^{(ij)} \varphi_r(t) (i, \, j = \overline{1, n}), \; K_1(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} K_{1r} \varphi_r(t), \\ K_{1r} = \{k_{1r}^{ij}\} (r = \overline{0, R-1}), \\ k_{2ij}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} k_{2r}^{(ij)} \bar{\varphi}_r(t) (i, \, j = \overline{1, n}), \; K_2(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} K_{2r} \varphi_r(t), \\ K_{2r} = \{k_{2r}^{(ij)}\} (r = \overline{0, R-1}). \end{gathered} \tag{30}$$

Подстановка соотношений (30), (23), (24) в (20) позволяет определить матрицу усиления оптимального управления (19) в виде

$$G(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} \Theta_r^{-1} B_r^{\mathrm{T}} K_{2r} \varphi_r(t) \,. \tag{31}$$

Линейно-квадратичная задача минимизации обобщенного функционала

Задача в этом случае формируется следующим образом. Найти управление $u(t) \in E^m$, позволяющее перевести систему (1) из заданного начального состояния $\bar{x}(t_0)$ к нулю в течение заданного времени $[t_0, T_f]$ и минимизирующее функционал (5).

Оптимальный закон управления для данной задачи также можно получить на основе принципа максимума и определить в виде (9). В силу $\Theta(t) > 0$ управление (9) доставляет единственный минимум гамильтониану вида (7) для ЛНС (1) и обобщенного функционала (5).

При оптимальном управлении (9) упрощенное каноническое управление (8) для $\bar{x}^*(t)$ è $\bar{p}^*(t)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^*(t) \\ \dot{\bar{p}}^*(t) \end{bmatrix} = M(t) \begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{p}^* \end{bmatrix}, \tag{32}$$

где $M(t)$ — матрица размера $2n \times 2n$, имеющая блочную структуру.

$$M(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ -Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}.$$

Общие граничные условия могут быть получены с помощью заданного начального состояния $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}^{(0)}$, оставшиеся граничные условия — с помощью условий трансверсальности, которые в данной задаче имеют вид

$$\bar{p}^*(T_f) = F\bar{x}^*(T_f). \tag{33}$$

Пусть $\Omega(T_f, t)$ — матрица переходов состояний уравнения размера $2n \times 2n$, которая может быть представлена в виде блочной матрицы

$$\Omega(T_f, t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T_f, t) & \Omega_{12}(T_f, t) \\ \Omega_{21}(T_f, t) & \Omega_{22}(T_f, t) \end{bmatrix}.$$

Из основного соотношения

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^*(T_f) \\ \bar{p}^*(T_f) \end{bmatrix} = \Omega(T_f, t) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix}.$$

С учетом (33) получим

$$\bar{p}^*(t) = \{[\Omega_{22} - F\Omega_{22}]^{-1}[F\Omega_{11} - \Omega_{21}]\}\,\bar{x}^*(t) = L(t)\bar{x}^*(t). \tag{34}$$

Подстановка соотношения (34) в (9) позволяет записать закон оптимального управления следующим образом:

$$\bar{u}^*(t) = -C(t)\bar{x}^*(t), \tag{35}$$

где матрица усиления $C(t)$ размера $m \times n$ имеет вид

$$C(t) = \Theta^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)L(t). \tag{36}$$

Так как $\Theta(t)$, $B(t)$ заданы, то для определения $C(t)$ необходимо найти фундаментальную матрицу $\Omega(T_f, t)$. Матрица $\Omega(T_f, t)$ удовлетворяет решению уравнения состояния

$$\dot{\Omega}(T_f, t) = -\Omega(T_f, t)M(t), \ \text{ïðè} \quad \Omega(T_f, T_f) = I. \tag{37}$$

Как и ранее, в случае уравнения (21) для решения уравнения (37) воспользуемся математическим аппаратом функций Уолша. Пусть имеются все необходимые приближения в ряд Уолша, подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче. Интегрируя назад уравнение (37) от T_f до t, получаем

$$\Omega(T_f, t) - I = -\int_{T_f}^{t} \Omega(T_f, t')\, M(t')dt'. \tag{38}$$

Обозначим подынтегральное выражение в (38) как $D(t) = \Omega(T_f, t)M(t)$. Здесь $D(t) = \{d_{ik}(t)\}$ — матрица размера $2n \times 2n$, элементы которой с учетом аппроксимаций рядами Уолша матриц $M(t)$, $\Omega(T_f, t)$ вида

$$M(t) \approx \begin{bmatrix} \bar{m}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{m}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{m}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{m}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix},$$

$$\Omega(T_f, t) \approx \begin{bmatrix} \bar{\omega}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{\omega}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{\omega}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

где $\bar{\varphi}_R(t) = \{\varphi_0(t), ..., \varphi_r(t), ..., \varphi_{R-1}(t)\}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов ряда Уолша известных функций $m_{ij}(t)$; $\bar{w}^{(ij)\mathrm{T}} = \{w_0^{(ij)}, ..., w_r^{(ij)}, ..., w_{R-1}^{(ij)}\}$ — R-мерный вектор постоянных неизвестных коэффициентов ряда Уолша искомых функций $\omega_{ij}(T_f, t)$, и свойств системы функций Уолша, можно определить следующим образом:

$$d_{ik}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \bar{\omega}^{(ij)\mathrm{T}} \bar{\varphi}_R(t) \bar{m}^{(jk)\mathrm{T}} \bar{\varphi}_R(t) = \sum_{i=1}^{2n} \bar{d}_j^{(ik)\mathrm{T}} \bar{\varphi}_R(t) = \bar{d}^{(ik)\mathrm{T}} \bar{\varphi}_R(t).$$

Здесь $\bar{d}_j^{(ik)\mathrm{T}} = \{d_{j,0}^{(ik)}, ..., d_{j,r}^{(ik)}, ..., d_{j,R-1}^{(ik)}\}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов, определяемый как $d_{i,r_i}^{(ik)} = \sum_{r=0}^{R-1} \omega_r^{(ij)} m_{r\oplus r_1}^{(ik)}$, $(r_1 = \overline{0, R-1})$; $\bar{d}^{(ik)\mathrm{T}} = \{d_0^{(ik)}, ..., d_r^{(ik)}, ..., d_{R-1}^{(ik)}\}$ — R-мерный вектор постоянных коэффициентов, элементы которого могут быть определены как $d_{i,r_i}^{(ik)} = \sum_{j=1}^{2n} d_{j,r}^{(ik)} (r_1 = \overline{0, R-1})$.

Тогда матрица $D(t)$ может быть определена в виде

$$D(t)=\begin{bmatrix} \bar{d}^{(11)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{d}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{d}^{(2n,\,1)\mathrm{T}} & \cdots & \bar{d}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Матрицу I, как и в предыдущем случае, представим в виде (28).

Подставим (28), (39), (40) в уравнение (38). Используя соотношение (13) для приближенного интегрирования в обратном времени и выражение (14) для операционной матрицы обратного интегрирования, которая с учетом рассматриваемого интервала времени $[t_0, T_f]$ может быть определена как $D'_{(R\times R)}=(T_f-t_0)D_{(R\times R)}$.

В результате получим

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}^{(11)\mathrm{T}}\cdots\bar{\omega}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \bar{\omega}^{(2n,\,1)\mathrm{T}}\cdots\bar{\omega}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t)\cdots 0 \\ 0\ldots\cdots\bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \bar{e}^{(11)\mathrm{T}}\cdots 0 \\ 0\ldots\ldots\bar{e}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t)\cdots 0 \\ 0\cdots\bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix} \bar{d}^{(11)\mathrm{T}}\ldots\bar{d}^{(1,\,2n)\mathrm{T}} \\ \bar{d}^{(2n,\,1)\mathrm{T}}\cdots\bar{d}^{(2n,\,2n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}\otimes D'_{(R\times R)}\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t)\cdots 0 \\ 0\cdots\bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\bar{\varphi}_R(t)$ в обеих частях уравнения, получаем

$$\bar{\omega}^{(ii)\mathrm{T}}-\bar{e}^{(ii)\mathrm{T}}=-\bar{d}^{(ii)\mathrm{T}}D'_{(R\times R)},\ \ i=k,$$

$$\bar{\omega}^{(ik)\mathrm{T}}=-d^{(ik)\mathrm{T}}D'_{(R\times R)},\ \ i\neq k\ (i,k=\overline{1,2n}). \qquad (41)$$

Уравнения (41) аналогичны уравнениям (29) и представляют собой систему $2n\times 2n\times R$ линейных алгебраических уравнений, которые используются для определения неизвестных коэффициентов разложения $\omega_\gamma^{(ik)}$ $(r=\overline{0,R-1})$, $(i,k=\overline{1,2n})$ элементов переходной матрицы $\Omega(T_f,t)$ в ряд Уолша. Затем получим закон оптимального управления. Для этого запишем $L(t)$ размера $n\times n$, входящую в матрицу усиления $C(t)$, на основе полученных коэффициентов разложения в ряд Уолша элементов матрицы $\Omega(T_f,t)$ из уравнений (41) аналогично соотношениям (22)–(24) в виде

$$l_{ij}(t)\approx\sum_{r=0}^{R-1} l_r^{(ij)}\varphi_r(t)\ (i,\,j=\overline{1,n}),\ \ L(t)\approx\sum_{r=0}^{R-1} L_r\varphi_r(t),$$
$$L_r=\{l_r^{(ij)}\}\ (r=\overline{0,R-1}). \qquad (42)$$

Подстановка соотношений (42), (23), (24) в (36) позволяет определить матрицу усиления оптимального управления (36) в терминах функций Уолша в следуюшем виде:

$$C(t)\approx\sum_{r=0}^{R-1}\Theta_r^{-1}B_r^{\mathrm{T}}L_r\varphi_r(t). \qquad (43)$$

 ISSN 0572-2691

Пример синтеза

Синтез матрицы усиления оптимального закона управления продемонстрируем на примере решения задачи стабилизации ЛНС первого порядка:

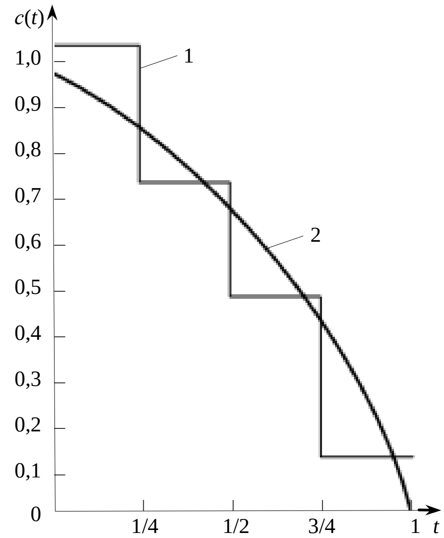
$$\dot{x}(t) = tx(t) + u(t), \ \ x(0) = 1, \ \ t \in [0, 1],$$

с квадратичным функционалом $I = 1/2\int\limits_0^1 [x^2(t') + u^2(t')]dt'$. Оптимальный закон управления в этом случае имеет вид $u^*(t) = -c(t)\bar{x}^*(t)$.

Для получения необходимых аппроксимаций в ряды Уолша выбрано четыре функции — R = 4. Полученные значения кусочно-постоянного коэффициента усиления $c(t)$ представлены на рисунке (кривая 1). Коэффициент усиления $c(t)$ для рассматриваемой системы и функционала получен также из уравнения Риккати (кривая 2):

$$\dot{\tilde{n}}(t) = c^2(t) - 2tc(t) - 1, c(1) = 0.$$

Из результата сравнения следует, что использование функций Уолша для получения коэффициента усиления оптимального закона управления дает удовлетворительный результат даже при R = 4.



Заключение

На основе метода оптимизации, использующего принцип максимума в сочетании с математическим аппаратом функций Уолша для линейно-квадратичных задач оптимизации синтезированы матрицы усиления (31) и (43) оптимальных законов управления соответственно (19) и (35) в виде аппроксимаций рядами Уолша, постоянные коэффициенты которых находятся решением системы линейных алгебраических уравнений. Полученные в аналитической форме оптимальные законы ввиду их кусочно-постоянного характера весьма удобны для их практической реализации.

Точность полученного приближенного оптимального решения достигается выбором соответствующего числа членов разложения в ряд Уолша.

О.А. Стенін, Ю.А. Тімошин, І.Г. Дроздович

ФУНКЦІЇ УОЛША В ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

Вирішення задач аналітичного конструювання оптимального регулятора (АКОР) для стаціонарних динамічних об'єктів досить добре вивчено, і їм присвячена низка робіт. Водночас синтез оптимальних законів керування нестаціонарними динамічними об'єктами у загальному випадку — досить складне завдання, яке часто не піддається вирішенню в аналітичній формі. Це пов'язано, в першу чергу, з труднощами вирішення нестаціонарного нелінійного векторно-матричного рівняння Ріккаті. У даній статті розглядаються лінійно-квадратичні завдання синтезу замкнутого оптимального закону керування одним класом лінійних нестаціонарних систем. Визначення оптимального закону керування в рамках завдання АКОР здійснюється на основі принципу максимуму Понтрягіна. Для встановлення зв'язку між допоміжним вектором і вектором стану використовується фундаментальна матриця системи спрощених канонічних рівнянь. Слід зазначити, що, в загальному випадку, для лінійних нестаціонарних систем отримати аналітичне вираження фундаментальної матриці неможливо. У даній статті запропоновано знаходити фундаментальну матрицю системи спрощених канонічних рівнянь шляхом наближеного інтегрування лінійного матричного диференціального рівняння стану, якому вона задовольняє, з використанням математичного апарата функцій Уолша. При цьому елементи матриці оптимального закону керування також визначаються у вигляді рядів Уолша, постійні коефіцієнти яких знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь. Оскільки елементи матриці оптимального закону керування є кусково-сталими функціями, це значно спрощує їх практичну реалізацію порівняно з нестаціонарними матрицями оптимального керування, отриманими на основі рішення рівняння Ріккаті. Точність отриманого наближеного оптимального рішення досягається вибором відповідного числа членів розкладу в ряд Уолша.

Ключові слова: лінійні нестаціонарні системи, лінійно-квадратичні оптимізаційні завдання, функції Уолша, фундаментальна матриця, замкнуте оптимальне керування.

A.A. Stenin, Yu.A. Timoshin, I.G. Drozdovych

WALSH FUNCTIONS IN LINEAR-QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEMS OF LINEAR NONSTATIONARY SYSTEMS

Currently, the solution of the problems of analytical design of the optimal controller (ADOC) for stationary dynamic objects is well studied and a number of works are devoted to them. At the same time, the synthesis of optimal control laws of nonstationary dynamic objects in general case is quite a complex task, which often can't be solved in analytical form. This is primarily due to the difficulty of solving the nonstationary nonlinear vector-matrix Riccati equation. This article deals with linear-quadratic problems of synthesis of a closed optimal control law for one class of linear nonstationary systems. Determination of the optimal control law within the framework of the ADOC problem is based on the Pontryagin maximum principle. The fundamental matrix of the system of simplified canonical equations is used to establish the connection between the auxiliary vector and the state vector. In general case, it is not possible to obtain an analytical expression of the fundamental matrix for linear nonstationary systems. In this article it is proposed to find the fundamental matrix of the system of simplified canonical equations by means of approximate integration of the linear matrix differential equation of state, to which it satisfies, using the mathematical apparatus of Walsh functions. In this case, the elements of the matrix of the optimal control law are also determined in the form of Walsh series, the constant coefficients of which are found from the system of algebraic equations. Since the elements of the matrix of the optimal control law are piecewise constant functions, this greatly simplifies their practical implementation in comparison with the nonstationary matrices of optimal control obtained on the basis of the solution of the Riccati equation. The accuracy of the obtained approximate optimal solution is achieved by choosing the appropriate number of terms of the Walsh series expansion.

Keywords: linear nonstationary systems, linear-quadratic optimization problems, Walsh functions, fundamental matrix, closed optimal control.

1. Морозова Т.Ю., Иванова И.А., Никонов В.В, Гришин А.А. Совершенствование системы управления нестационарными сложными техническими объектами. *Технические науки*. 2012. № 3. С. 22–30. DOI: 10.12731/WSD-2015-6-10.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1971. 507 с.
3. Егупов Н.Д. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация. М. : МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. 632 с.
4. Масталиев Р. О. О задаче оптимального управления линейной системой с переменной структурой. *Владикавказский математический журнал*. 2016. **18**, вып. 1. С. 63–70. DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5953.
5. Быстров С.В., Григорьев В.В., Першин И.М., Мансурова О.К. Синтез линейно-квадратичных законов управления для непрерывных динамических объектов *Международный научно-исследовательский журнал.* 2017. № 2(56), ч. 3. С. 97–100. DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.56.052
6. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. *Автоматика и телемеханика.* 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435.
7. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control. *Bul.Soc.Mech.Mat*. 1960. **12**, N 2. P.102–119.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Физматгиз, 1961. 392 с.
9. Michael Athans, Peter L. Falb Optimal control: An introduction to the theory and its applications. Courier Corporation, 2006. 879 p.
10. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М. : Наука. 1989. 496 с.
11. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. М. : Наука, 1987. 346 с.
12. Chen C.F., Hsiao C.H. Walsh series analysys in optimal control. *Int. J. Control*. 1975. **21**, N 6. P. 881–897.

Получено 02.04.2019
После доработки 24.06.2019