

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.633.6

С.И. Ляшко, Д.А. Ключин, А.А. Тимошенко, Н.И. Ляшко, Е.С. Бондар

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВОДЫ В НЕНАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ*

Ключевые слова: оптимизация, уравнение Ричардса–Клюта, управление, метод конечных разностей, пористая среда.

Введение

Влагоперенос в ненасыщенной пористой среде с точечными и линейными источниками остается предметом многочисленных современных исследований, которые можно разделить на две большие группы в зависимости от используемого математического аппарата. К первой группе относятся работы, в которых получены аналитические решения, а во вторую входят работы, посвященные компьютерному моделированию. Аналитические методы решения таких задач предшествовали появлению компьютерных методов и опирались на идеализированные предположения о геометрической форме источника (сферическая, полусферическая, цилиндрическая) и свойствах пористой среды (неограниченная область решения, однородность). И все же эти методы не вышли из употребления благодаря простоте вычисления полученных решений и легкости их интерпретации [1–5]. С другой стороны, компьютерное моделирование переноса влаги позволяет учитывать реальные свойства пористых сред на основе уравнения Ричардса–Клюта в ограниченных областях сложной формы и структуры. Эти работы стали предметом анализа в обширных обзорах [6–8]. Изучив большое количество работ, опубликованных за последние десятилетия, авторы этих обзоров пришли к выводу, что численное решение уравнения Ричардса–Клюта все еще остается очень сложным с вычислительной точки зрения, а в некоторых случаях представляет собой неустойчивый процесс. Это объясняется тем, что процесс влагопереноса, описываемый этим уравнением, характеризуется большим разнообразием параметров и поэтому, например, методы решения задач влагопереноса в частично увлажненной пористой среде могут не подходить для решения задачи орошения совершенно сухого грунта [9].

Исследования по компьютерному моделированию влагопереноса в пористой среде можно классифицировать по применяемым методам, в частности, одни исследователи предпочитают метод конечных разностей [10–15], а другие приме-

* Работа выполнена в рамках проекта «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології» (ГР № 0219U003403), поддержанного Министерством образования и науки Украины.

© С.И. ЛЯШКО, Д.А. КЛЮШИН, А.А. ТИМОШЕНКО, Н.И. ЛЯШКО, Е.С. БОНДАР, 2019

няют метод конечных элементов [16–20]. Диапазон условий, учитываемых в этих моделях, значительно шире, по сравнению с аналитическими методами, но при этом происходит резкое повышение вычислительной сложности решения. Для снижения этой сложности ряд авторов [21–23] предложили применить подход, который широко использовался в работах, посвященных аналитическим решениям задачи влагопереноса, основанный на преобразовании Кирхгофа, позволяющем свести квазилинейную задачу к линейной. Это значительно повысило быстродействие предложенных алгоритмов. Тем не менее, несмотря на большое количество работ по моделированию влагопереноса в ненасыщенной пористой среде, задача оптимального управления квазилинейным уравнением Ричардса–Клюта исследована очень мало [24–26], причем главным объектом внимания в этих задачах являются свойства грунта, а не параметры источников увлажнения.

При решении линейных задач оптимального управления подземным массо-переносом из точечных источников часто используется трехэтапный вариационный алгоритм с использованием сопряженного оператора [27–29]. В связи с этим целесообразно исследовать численный подход к решению уравнения Ричардса–Клюта, основанный на линеаризации. Для построения системы уравнений в нашем случае используется метод конечных разностей. В случае использования распараллеливания вычислительных процессов для ускорения работы алгоритма, можно воспользоваться подходом, описанным в [30]. Для исследования корректности построенной модели используется метод, изложенный в работах [31–35].

Таким образом, цель нашей публикации — разработка вариационного алгоритма идентификации оптимальной мощности точечных источников, позволяющий решать квазилинейные задачи влагопереноса в ненасыщенной пористой среде с помощью их линеаризации на основе преобразования Кирхгофа при реалистичных предположениях и доказать его эффективность.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу увлажнения ограниченной области пористой среды с известными начальными условиями, фиксированной влажностью на нижней границе и заданной целевой влажностью в конечный момент времени. Уравнение, описывающее процесс, имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(\omega) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(\omega) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N Q_j(t) \delta(x - x_j) \times \delta(y - y_j), \quad (1)$$

$$(x, y, t) \in \Omega_0 \times (0, T],$$

$$\omega|_{x=0} = 0; \quad \omega|_{x=L_1} = 0; \quad (2)$$

$$\omega|_{y=0} = 0; \quad \omega|_{y=L_2} = 0;$$

$$\omega(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_0.$$

Здесь I означает интенсивность поглощения влаги корнями растений, $H = \psi(\omega) - y$ — напор, $D_y(\omega) = K_y(\omega) \frac{d\psi}{d\omega}$ — коэффициент диффузивности вдоль оси y , $\Omega_0 = [(x, y): 0 < x < L_1, 0 < y < L_2]$, $y = y_0$ — уровень поверхности грунта (ось Oy направлена сверху вниз). Будем предполагать, что $K_x(\omega) = k_1 k(\omega)$, $K_y(\omega) = k_2 k(\omega)$, где k_1, k_2 — коэффициенты фильтрации вдоль осей Ox, Oy ,

$k(\omega)$ — влагопроводность грунта. Для простоты изложения положим $k_1 = k_2$, $L_1 = L_2 = 1$. Для того чтобы выполнить переход к безразмерному линейному уравнению, следуя Д.Ф. Шульгину и С.Н. Новосельскому [36], введем следующие переменные:

$$\beta_2 = 0,5\ell, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\beta_2, \quad \alpha = \frac{\langle D_y \rangle \beta_2^2}{T}, \quad \xi = \frac{\beta_1}{L_1}x, \quad \zeta = \frac{\beta_2}{L_2}y, \quad \tau = \alpha t,$$

где $\langle D_y \rangle$ — среднее значение D_y .

Применим преобразование Кирхгофа [36]:

$$\Theta = \frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2} \int_{\omega_0}^{\omega} D_y(\omega) d\omega,$$

где Q^* — масштабный множитель, и предположим, что выполняются следующие условия:

- зависимость между $\Theta(\omega)$ и $K_y(\omega)$ является линейной, т.е. $D_y^{-1}(\omega) \frac{dK_y(\omega)}{d\omega} = \ell = \text{const}$;

- $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{k_2 \beta_2 Q^*}{4\pi k_1} \frac{1}{D_y(\omega)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \approx \frac{k_2 \beta_2^3 Q^*}{4\pi k_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}$.

Введем следующие обозначения: $q_j = \frac{Q_j}{Q^*}$, Ω, Γ — безразмерные аналоги областей Ω_0, Γ_0 , где Γ_0 — граница области Ω_0 .

В таком случае начально-краевую задачу (1), (2) можно свести к виду:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \times \delta(\zeta - \zeta_j), \quad (\xi, \zeta, \tau) \in \Omega \times (0, 1], \quad (3)$$

$$\Theta|_{\xi=0} = 0; \quad \Theta|_{\xi=1} = 0;$$

$$\Theta|_{\zeta=0} = 0; \quad \Theta|_{\zeta=1} = 0; \quad (\xi, \zeta, \tau) \in \Gamma \times [0, 1]. \quad (4)$$

$$\Theta(\xi, \zeta, 0) = 0, \quad (\xi, \zeta) \in \Omega$$

Обозначим $r_j, j = \overline{1, N}$, положения источников мощности $q_j(\tau)$. Целевые значения влажности $\varphi_m(\tau)$ интерпретируются как усреднение $\Theta(\xi, \zeta, \tau)$ в окрестности ω_m заданных точек $(\xi_m, \zeta_m) \in \Omega, m = \overline{1, M}$. Следует найти функции $q_j(\tau), j = \overline{1, N}$, минимизирующие квадратичное отклонение $\Theta(\xi_m, \zeta_m, \tau)$ от $\varphi_m(\tau)$ в норме $L_2(0, 1)$.

Пусть оптимальное управление принадлежит гильбертовому пространству

$$(L_2(0, 1))^N \text{ со скалярным произведением } \langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^N \int_0^1 x_j(\tau) y_j(\tau) d\tau,$$

Сглаживающий функционал запишем

$$J_\alpha(\bar{Q}) = \sum_{m=1}^M \int_0^1 \left(\varphi_m(\tau) - \int_{\Omega} g_m(\xi, \zeta) \Theta(\xi, \zeta, \tau) d\Omega \right)^2 d\tau + \alpha \|\bar{Q}\|^2, \quad (5)$$

где $\bar{Q}(\tau) = (q_1(\tau), \dots, q_N(\tau))^T$ — вектор управления, $g_m(x) = \frac{\chi_{\omega_m}}{\text{diam } \omega_m}$ — ядро усреднения в области ω_m , χ_{ω_m} — индикаторная функция, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Оптимальное управление минимизирует функционал

$$J_\alpha(\bar{Q}^*) = \min_{q \in (L_2(0,1))^N} J_\alpha(\bar{Q}). \quad (6)$$

Корректность модели

Пусть H — пополнение пространства гладких функций, удовлетворяющих условиям (2) по норме

$$\|u\|_H = \left(\int_Q (u_\tau^2 + u_\xi^2 + u_\zeta^2 + u_{\xi\zeta}^2) dQ \right)^{1/2}.$$

Обозначим H_+ аналогичное пространство, удовлетворяющее начальным и граничным условиям сопряженной задачи (4). Расширяя оператор L на H по непрерывности с учетом граничных условий, получаем следующее операторное уравнение:

$$L\Theta \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Delta \Theta + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = f. \quad (7)$$

Применив подходы, описанные в [28], получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Для любой функции $f \in (H_+)^*$ существует единственное слабое решение задачи (7), т.е. $\langle \Theta, L^* \Psi \rangle_{L^2(Q)} = \langle f, \Psi \rangle_+ \quad \forall \Psi \in H_+, \Theta \in L_2(Q)$.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы, доказанной в [28], как частный случай.

Теорема 2. Если состояние системы определяется как слабое решение задачи (7), то существует единственное оптимальное управление, минимизирующее функционал (6).

Доказательство. Покажем, что для нашего случая выполняются условия теоремы о существовании единственного оптимального управления операторным уравнением [28], т.е. функционал (5) $J(\cdot): L_2 \rightarrow R^1$ является слабо полунепрерывным снизу по состоянию системы $\Theta(\xi, \zeta, \tau)$, ограниченным снизу и строго выпуклым, а множество допустимых управлений $U_\partial \subset (L_2(0,1))^N$ ограничено, замкнуто и выпукло в пространстве H .

Для простоты ограничимся случаем с одним точечным источником, имеющим мощность $q_1(\tau)$ и сосредоточенным в точке (ξ_1, ζ_1) . Оператор управления в этом случае принимает вид $4\pi q_1(\tau) \delta(\xi - \xi_1) \times \delta(\zeta - \zeta_1)$. Слабая полунепрерывность, ограниченность и строгая выпуклость следуют из структуры квадратичного функционала $J(q)$. Ограниченность, замкнутость и выпуклость области $U_\partial \subset (L_2(0,1))^N$ следует из свойств точечного источника, мощность которого ограничена сверху и снизу. Таким образом, условия теоремы [28] выполняются и оптимальное решение существует, что и требовалось доказать.

Итерационный алгоритм

Решим начально-краевую задачу (3), (4) с помощью итерационного алгоритма [28], состоящего из трех этапов.

1. Решение прямой задачи:

$$L\Theta^{(k)} \equiv \frac{\partial \Theta^k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta^k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta^k}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Theta^k}{\partial \zeta} = 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \times \delta(\zeta - \zeta_j); \quad (8)$$

$$0 < \tau \leq 1; \quad \Theta^k(0) = 0.$$

2. Решение сопряженной задачи:

$$L^*\Psi^{(k)} \equiv -\frac{\partial \Psi^k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Psi^k}{\partial \zeta} = 2(\Theta^k - \varphi(\tau)); \quad 0 \leq \tau < 1, \quad \Psi^{(k)}(1) = 0.$$

3. Вычисление нового значения интенсивности источников:

$$\frac{Q^{(k+1)} - Q^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \Psi^{(k)} + \alpha Q^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для решения прямой задачи построим неявную разностную схему для уравнения (8), выполнив разбиение $0 \leq \xi, \zeta \leq 1$ с шагом $h = \frac{1}{30}$ и временными шагами

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{100} \text{ для } 0 \leq \tau \leq 1.$$

Запишем систему уравнений для прямой задачи с помощью интегро-интерполяционного метода:

$$\Lambda(\xi, \zeta) = \Lambda_1(\xi) + \Lambda_2(\zeta) = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \left(\varphi(\xi, \zeta) + \frac{1}{h} \varphi_1(\xi) + \frac{1}{h} \varphi_2(\zeta) \right).$$

С учетом граничных условий получаем

$$\Lambda_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = 0, \\ (\Theta_{\bar{\xi}})_{\xi}, & 0 < \xi < 1, \\ 0, & \xi = 1, \end{cases} \quad \Lambda_2(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta = 0, \\ (\Theta_{\bar{\zeta}})_{\zeta} - 2\Theta_{\zeta}, & 0 < \zeta < 1, \\ 0, & \zeta = 1. \end{cases}$$

Пусть \hat{y} — центральная разностная производная. Согласно граничным условиям $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\zeta) = 0$. Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Якоби. Также для сравнения использовалась явная схема для прямой и сопряженной задач.

В третьем этапе точность вычислений зависит от параметра регуляризации. При его выборе учитывалась погрешность вычислений по пространству $O(h^2)$ и времени $O(\tau)$, а также порядок полученных в прямой и сопряженной задаче величин. При выборе слишком большого параметра регуляризации конечный результат не достигал нужной точности, так как значения сопряженной задачи, корректирующие его в правильном направлении, перекрывались параметром регуляризации, мешая сходимости.

Для обеспечения конечности вычислений и достижения точности в качестве условия остановки алгоритма было выбрано три альтернативы.

1. Среднее значение модуля разности между текущими и предыдущими значениями Θ не превысило 10^{-7} (остановка по точности).

2. Количество итераций не превысило определенную константу (брались значения 1000, 2000) — обеспечение конечности количества итераций.

3. Ограничение по полученной мощности источника — использовалось для определения количества итераций, достаточных для получения количества итераций, достаточного для получения определенной мощности, не используется при глобальной оптимизации.

Результаты моделирования

Целевую функцию влажности зададим как результат моделирования безразмерной задачи при мощности, равной 10. Итерационный поиск начинаем с нулевой мощности. Рассмотрим различные расположения источника относительно области — поблизости угла, посередине недалеко от верхней границы, посередине недалеко от левой боковой границы, в центре области. Соответствующие функции имеют вид:

$$\varphi(\xi, \zeta) = \begin{cases} 4\pi q, & \xi = \frac{7}{30}, \zeta = \frac{7}{30}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \varphi(\xi, \zeta) = \begin{cases} 4\pi q, & \xi = 0,5, \zeta = \frac{7}{30}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi(\xi, \zeta) = \begin{cases} 4\pi q, & \xi = \frac{7}{30}, \zeta = 0,5; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \varphi(\xi, \zeta) = \begin{cases} 4\pi q, & \xi = 0,5, \zeta = 0,5; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Максимальное отклонение полученной мощности от желаемой составило менее 2 % при параметре регуляризации, равном 10^{-7} . Значения, полученные при решении сопряженной задачи при мощности 9,8 имели порядок 10^{-6} . Учитывая погрешность вычислений при данных шагах по времени и пространству, выбранный параметр регуляризации на этапе уточнения мощности позволяет достичь высокой точности, при этом обеспечивает сходимость.

Распределение Θ при найденной мощности, а также сравнение с целевой функцией показано на графиках. На графиках с вертикальной пространственной координатой выполняется одномерный срез через источник.

В случае первого расположения зависимость Θ от глубины демонстрирует рис. 1, также приведены соответствующие изолинии (рис. 2). Если точечный источник расположен в $(0,5, \frac{7}{30})$, зависимость показана на рис. 3 и изолинии приве-

дены ниже (рис. 4). Для источника посреди левой боковой границы $(\frac{7}{30}, 0,5)$ срез также выполнен через источник (рис. 5) и изолинии приведены соответственно (рис. 6). Для центральной точки области $(0,5, 0,5)$, срез выполнен через центр (рис. 7) и изолинии указаны на последнем графике (рис. 8).

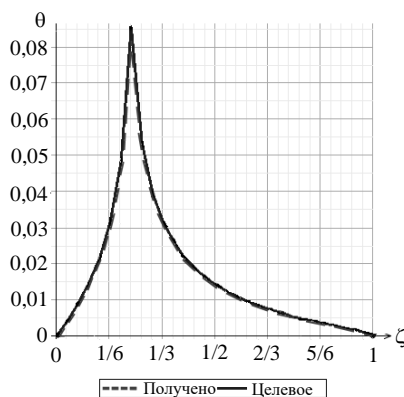


Рис. 1

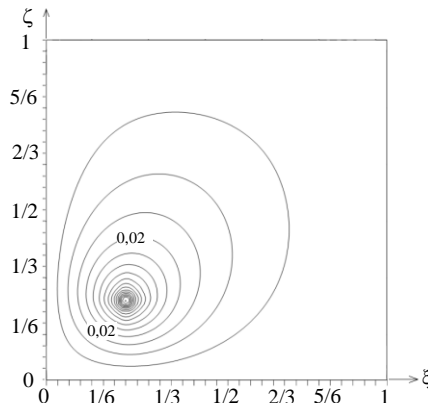


Рис. 2

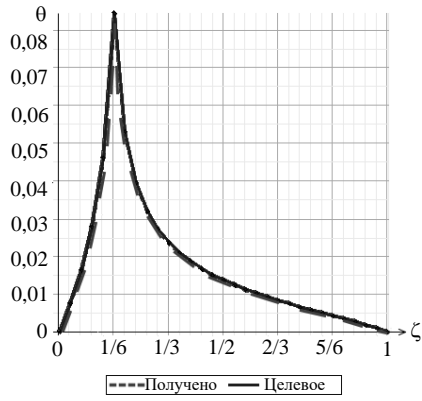


Рис. 3

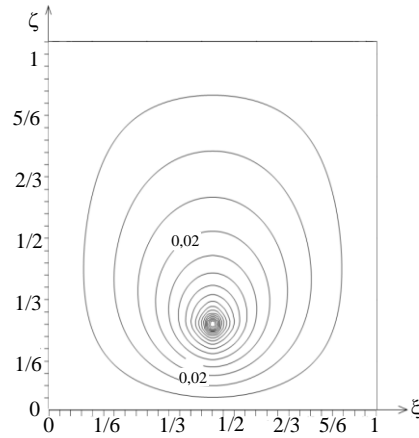


Рис. 4

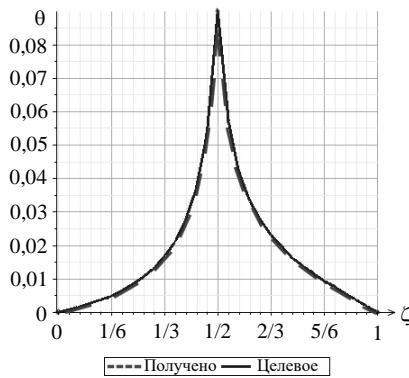


Рис. 5

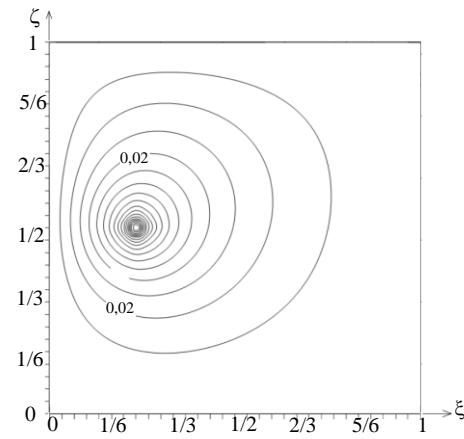


Рис. 6

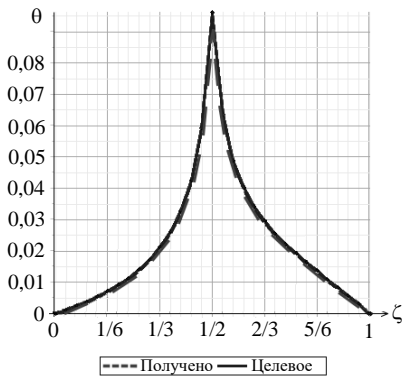


Рис. 7

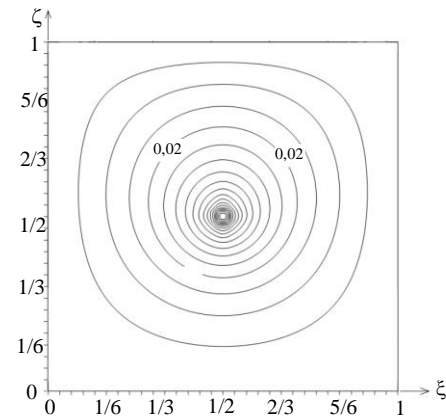


Рис. 8

Отметим, что для проверки в качестве начального значения было взято также значение мощности, превышающее необходимое. В этом случае итерационный процесс также сошелся к решению. Утверждение о большом необходимом количестве итераций для поставленной задачи с нулевыми граничными условиями подтвердилось. Для сравнения был проведен тест для критерия качества, основанном только на конечном моменте времени вместо всего временного промежутка. Оптимальная мощность была найдена за меньшее количество итераций, отклонение от решения составило также менее 2 %.

Таким образом, предложенный метод показал высокую точность определения оптимальной мощности источника для нескольких вариантов его расположения. При этом важно правильно подобрать параметр регуляризации и согласовать правую часть сопряженного уравнения с критерием качества.

Заклучение

Разработан вариационный алгоритм идентификации оптимальной мощности точечных источников, позволяющий решать квазилинейные задачи влагопереноса в ненасыщенной пористой среде с помощью их линеаризации на основе преобразования Кирхгофа при реалистичных предположениях. Вычислительные эксперименты продемонстрировали высокую точность метода. Предложенный метод позволяет решить актуальную задачу оптимального выбора параметров систем капельного орошения и повышения их эффективности.

С.І. Ляшко, Д.А. Ключин, А.А. Тимошенко, Н.І. Ляшко, О.С. Бондар

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ІНТЕНСИВНІСТЮ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ ВОДИ В НЕНАСИЧЕНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Вологоперенесення у ненасиченому пористому середовищі з точковими джерелами, що описується рівнянням Річардса–Клюта, являє собою дуже складний та нестійкий обчислювальний процес. Це пояснюється тим, що фізичний процес, що описується цим рівнянням, характеризується великою кількістю різноманітних параметрів. Для зниження цієї складності пропонується підхід, заснований на перетворенні Кірхгофа, що дозволяє звести квазілінійну параболічну початково-крайову задачу до лінійної та безрозмірної. Розглядається двовимірна квазілінійна задача точкового оптимального керування зволоженням прямокутної ненасиченої області пористого середовища з відомими початковими умовами, фіксованою вологістю на нижній границі та заданою цільовою вологістю. У такій постановці ця задача досліджується та розв'язується вперше. Для розв'язання линеаризованої безрозмірної задачі оптимального керування нестационарним переносом вологи у ненасиченому пористому середовищі, отриманої за допомогою перетворення Кірхгофа, використовується варіаційний алгоритм ідентифікації оптимальної потужності точкових джерел, який дозволяє моделювати процес за реалистичних припущень. Доведено коректність линеаризованої безрозмірної задачі нестационарного вологоперенесення, зокрема доведено теореми щодо існування та єдиності узагальненого розв'язку, а також існування та єдиності оптимального керування потужністю занурених точкових джерел. Проведено моделювання переносу вологи із зануреного точкового джерела у сухому ґрунті. Наведено результати обчислювальних експериментів, які продемонстрували високу точність методу. Запропонований метод дозволяє розв'язати актуальну задачу оптимального вибору параметрів системи крапельного зрошення та збільшити її ефективність.

Ключові слова: оптимізація, рівняння Річардса–Клюта, керування, метод скінченних різниць, пористе середовище.

S.I. Lyashko, D.A. Klyushin, A.A. Timoshenko, N.S. Lyashko, O.S. Bondar

OPTIMAL CONTROL OF INTENSITY OF WATER POINT SOURCES IN NONSATURATED POROUS MEDIUM

Moisture transport through unsaturated porous medium with inserted point sources, described by Richards-Klute equation is a very complicated for calculations and un-

stable process. It can be explained by the fact that the physical process, described by this equation, is characterized by a large amount of diverse parameters. To reduce the difficulty an approach, based on Kirchhoff transformation, is offered, allowing to reduce the quasilinear parabolic initial-boundary problem to a linear and dimensionless problem. In this paper a two-dimensional quasilinear problem of optimal control using point sources for a rectangular unsaturated porous medium with known initial conditions, fixed humidity at the bottom bound and the given target humidity, is being considered. In this setting this problem is studied and solved for the first time. To solve the linear dimensionless optimal control problem on non-stationary moisture transport in an unsaturated porous medium, received using Kirchhoff transformation, a variation algorithm identifying the optimal source power is used, which allows modelling the process with realistic assumptions. In the paper, correctness of linearized dimensionless problem on moisture transport is proved. In particular, theorems on existence and uniqueness of the generalized solution are proven as well as existence and uniqueness of optimal control of the source power. In the paper, modelling of moisture transport from an inserted source in a dry ground area is made. Results for numerical experiments demonstrating high accuracy of the method are given. The proposed method allows to solve actual problem of optimal parameter choice for a drip irrigation system, and to improve its effectiveness.

Keywords: optimization, Richards–Klute equation, control, finite difference method, porous medium.

1. Communar G., Friedman S. Unsteady infiltration from point and line sources in laterally confined domains. *Soil Science Society of America Journal*. 2013. **77**, N 5. P. 1529–1541.
2. Communar G., Friedman S. Generalized coupled Source–Sink model for evaluating transient water uptake in trickle irrigation: I. Model Formulation for Soils with Vertical Heterogeneity. *Soil Science Society of America Journal*. 2012. **76**(3). P. 779–790.
3. Friedman S.P., Gamliel A. Wetting patterns and relative water-uptake rates from a Ring-Shaped water source. *Soil Science Society of America Journal*. 2019. **83**(1). P. 48–57.
4. Hayek M. An analytical model for steady vertical flux through unsaturated soils with special hydraulic properties. *Journal of Hydrology*. 2015. **527**. P. 1153–1160.
5. Hayek M. An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions. *Journal of Hydrology*. 2016. **535**. P. 662–670.
6. Farthing M.W., Ogden F. L. Numerical solution of richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal*. 2017. **81**(6). P. 1257–1269.
7. Vereecken, H. et al. Modeling soil processes: review, key challenges, and new perspectives. *Vadose Zone Journal*. 2016. **15**(5). P. 1–57.
8. Paniconi C., Putti M. Physically based modeling in catchment hydrology at 50: Survey and outlook. *Water Resources Research*. 2015. **51**(9). P. 7090–7129.
9. Zha Y. et al. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil. *Journal of Hydrology*. 2017. **551**. P. 56–69.
10. Casulli V. A coupled surface-subsurface model for hydrostatic flows under saturated and variably saturated conditions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2017. **85**(8). P. 449–464.
11. Lipnikov K., Moulton D, and Svyatskiy D. New preconditioning strategy for Jacobian-free solvers for variably saturated flows with Richards' equation. *Advances in Water Resources*. 2016. **94**. P. 11–22.
12. List F., Radu F. A study on iterative methods for solving Richards' equation. *Computational Geoscience*. 2015. **20**(2). P. 341–353.
13. Zha Y. et al. Comparison of noniterative algorithms based on different forms of Richards' equation. *Environmental Modelling & Assessment*. 2016. **21**(3). P. 357–370.
14. Zeng J., Zha Y., Yang J. Switching the Richards' equation for modeling soil water movement under unfavorable conditions. *Journal of Hydrology*. 2018. **563**. P. 942–949
15. Ключин Д.А., Оноцький В.В. Чисельне моделювання тривимірного вологоперенесення при мікрозрошенні. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2016. № 1. С. 54–64.
16. Scudeler C., Putti M., Paniconi C. Mass-conservative reconstruction of Galerkin velocity fields for transport simulations. *Advances in Water Resources*. 2016. **94**. P. 470–485.
17. Mostaghimi P. et al. Anisotropic mesh adaptivity and control volume finite element methods for numerical simulation of multiphase flow in porous media. *Math Geosci*. 2015. **47**(4). P. 417–440.
18. Lai W., Ogden F.L. A mass-conservative finite volume predictor – corrector solution of the 1D Richards' equation. *Journal of Hydrology*. 2015. **523**. P. 119–127.

19. Zhang Z.-Y. et al. Finite analytic method for solving the unsaturated flow equation. *Vadose Zone Journal*. 2015. **14**. P. 1–10.
20. Zhang Z.-Y. et al. Finite analytic method based on mixed-form Richards' equation for simulating water flow in vadose zone. *Journal of Hydrology*. 2016. **537**. P. 146–156.
21. Berninger H., Loisel S., Sander O. The 2-Lagrange multiplier method applied to nonlinear transmission problems for the Richards equation in heterogeneous soil with cross points. *SIAM Journal of Scientific Computing*. 2014. **36**(5). A2166–A2198.
22. Berninger H., Kornhuber R., and Sander O. Multidomain discretization of the Richards equation in layered soil. *Computational Geosciences*. 2015. **19**(1). P. 213–232.
23. Pop I.S., Schweizer B. Regularization schemes for degenerate Richards equations and outflow conditions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2011. **21**(8). P. 1685–1712.
24. Cockett R., Heagy L. J., Haber E. Efficient 3D inversions using the Richards equation. *Computers & Geosciences*. 2018. **116**. P. 91–102.
25. Murea C.M., Crolet J.M. Optimal control approach for a flow in unsaturated porous media. *Computational Methods for Flow and Transport in Porous Media*. 2000. **17**. P. 107–114.
26. Farag M. H. Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation. *Surveys in Mathematics and its Applications*. 2009. **4**. P. 139–153.
27. Вабищевич П.Н. Численное решение задачи идентификации правой части параболического уравнения. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2003. № 1. С. 29–37.
28. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Семенов В.В., Шевченко К.В. Лагранжово-ейлеровий підхід до розв'язання оберненої задачі конвективної дифузії. *Доповіді НАН України*. 2007. № 10. С. 38–43.
29. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. **754**. P. 194–203.
30. Nikolaevskaya E.A., Khimich A.N., Chistyakova T.V. Solution of linear algebraic equations by gauss method. *Studies in Computational Intelligence*. 399. 2012. P. 31–44.
31. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Onotskyi V.V., Lyashko N.I. Optimal control of drug delivery from microneedle systems. *Cybernetics and System Analysis*. 2018. **54**(3). P. 1–9.
32. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age — structured contamination sources in ground water. *Optimal control of age — structured populations in economy, demography, and the environment*. London; New York : Routledge. 2013. P. 277–292.
33. Lyashko S.I. Klyushin D.A., Palienco L.I. Simulation and generalized optimization in pseudohyperbolic systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2000. **32**(5). P. 108–117.
34. Lyashko S.I. Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernetics and System Analysis*. 1995. **31**(5). P.718–722.
35. Lyashko S.I. Approximate solution of equations of pseudoparabolic type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1991. **31**(12). P. 107–111.
36. Шульгин Д. Ф., Новосельский С. Н. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутри почвенном орошении. *В сб. науч. тр.: Математика и проблемы водного хозяйства*. Киев : Наук. думка, 1986. С. 73–89.

Получено 20.05.2019