

КОСМИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

УДК 550:531; 681.51

Н.В. Ефименко, Н.В. Луценко

УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ВЕКТОРНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Ключевые слова: космический аппарат, управление ориентацией, кватернион.

Введение

В настоящее время наиболее эффективным способом получения данных о поверхности Земли является спутниковая съемка. Для получения высококачественных изображений земной поверхности система управления спутника дистанционного зондирования Земли должна обеспечивать во время съемки высокие точностные и динамические характеристики. Требуемая точность наведения составляет 2–5 угловых минут, а погрешность стабилизации осей по угловой скорости, в зависимости от пространственного разрешения, должна быть не хуже 10–3–10–4 градуса за секунду. Законы управления, обеспечивающие такие высокие метрологические характеристики системы управления, основываются на предположении, что известны все параметры углового движения КА.

Приведем условные обозначения и системы координат:

ω_A^{AB} — вектор угловой скорости вращения базиса A относительно базиса B , заданный проекциями на оси базиса A ;

$\Lambda_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_{AB}^0 \\ \lambda_{AB} \end{pmatrix}$ — векторное представление кватерниона со скалярной час-

тью λ_{AB}^0 и векторной частью $\lambda_{AB} \in R^3$ перехода от базиса A к базису B ;

I — геоцентрическая инерциальная система координат;

B — жестко связанная с корпусом космического аппарата (КА) правая ортогональная система координат, начало находится в центре масс спутника, оси совпадают с главными центральными осями инерции;

J — тензор инерции КА;

$M_u \in R^3$ — управляющий момент, создаваемый исполнительными органами системы управления КА;

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$ — линейный кососимметрический оператор век-

торного произведения, определяемый равенством $\Phi(x) \cdot y = x \times y$;

I_n — единичная матрица $n \times n$.

© Н.В. ЕФИМЕНКО, Н.В. ЛУЦЕНКО, 2019

При этом чаще всего в качестве параметров углового движения берут кватернион ориентации и вектор абсолютной угловой скорости. Его можно измерить с помощью измерителя угловой скорости, но кватернион непосредственно измерить невозможно. Практически во всех системах ориентации первичные данные о кватернионе ориентации представлены в виде векторов. Типичные примеры векторных измерений — это вектор направления на Солнце или на звезду, а также вектор магнитной индукции Земли. Векторные измерения представляют собой косвенные измерения и в явном виде не содержат параметров ориентации. Для определения параметров ориентации векторные измерения подвергаются математической обработке по специальным алгоритмам [1–6]. Основным недостатком всех известных алгоритмов определения кватерниона ориентации по векторным измерениям — необходимость применения численных методов, что затрудняет их применение на борту КА. В связи с этим представляет интерес задача построения заданной ориентации КА непосредственно по векторным измерениям без определения кватерниона ориентации.

Задача одноосной ориентации КА

Пусть вращательное движение объекта задано системой уравнений

$$J\dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times (J\omega_B^{BI}) = M_u,$$

$$2\dot{\Lambda}_{IB} = \begin{bmatrix} 0 & (-\omega_B^{BI})^T \\ \omega_B^{BI} & -\Phi(\omega_B^{BI}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{IB}.$$

Обозначим ξ_I и e_B неподвижные орты в базисах I и B соответственно. Будем полагать, что на борту КА имеется информация о проекциях вектора ξ на оси базиса B в виде вектора ξ_B , а координаты вектора e_B заданы. Необходимо по информации о векторе ξ_B и угловой скорости ω_B^{BI} найти управляющий момент M_u , обеспечивающий режиму одноосной ориентации $\xi_B = e_B$ асимптотическую устойчивость.

Перейдем к решению поставленной задачи. Движение орта ξ в связанной системе координат подчиняется кинематическому уравнению Пуассона [7]

$$\dot{\xi}_B = -\omega_B^{BI} \times \xi_B. \quad (1)$$

Продифференцировав (1), имеем

$$\ddot{\xi}_B = \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B) - [J^{-1}(-\omega_B^{BI} \times (J\omega_B^{BI}) + M_u)] \times \xi_B. \quad (2)$$

Представим M_u следующим образом:

$$M_u = \omega_B^{BI} \times (J\omega_B^{BI}) - J \cdot (\xi_B \times (U - \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B))), \quad (3)$$

где $U \in R^3$ — новый вектор управления. С учетом выражения (3) уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{\xi}_B = -\xi_B \times (\xi_B \times (U - \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B))) + \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B). \quad (4)$$

Разложим вектор $\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B)$ на две составляющие: составляющую, перпендикулярную вектору ξ , и составляющую, параллельную вектору ξ :

$$\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B) = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B) + \xi_B \cdot \xi_B^T \cdot \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B). \quad (5)$$

Из уравнения (1) имеем

$$\|\dot{\xi}_B\|^2 = \|\omega_B^{BI} \times \xi_B\|^2 = -\xi_B^T F(\omega_B^{BI})^2 \xi_B = -\xi_B^T \cdot \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B).$$

Тогда

$$\xi_B^T \cdot \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B) = -\|\dot{\xi}_B\|^2. \quad (6)$$

Подставив (6) в выражение (5), получим

$$\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B) = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot (\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B)) - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B. \quad (7)$$

Используя соответствующие формулы векторного умножения уравнение (4) с учетом (7), представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_B &= (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot (U - \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B)) + \\ &+ (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot (\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B)) - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B. \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательно имеем

$$\ddot{\xi}_B = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot U - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B, \quad (9)$$

что совпадает с уравнением движения точки по единичной сфере.

В работе [8] показано, что для этого уравнения справедливо утверждение: пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) \cdot f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$.

Введем обозначение $\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$. Тогда векторы Θ и f связаны соотношением $f = \Theta + \alpha(t) \cdot X_0$, где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная функция времени. Согласно приведенному утверждению уравнение (9) можно представить в виде

$$\ddot{\xi}_B = U - \alpha(t) \xi_B. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует уравнение для переменной $\alpha(t)$: $\alpha(t) = \xi_B^T U + \|\dot{\xi}_B\|^2$, которое необходимо рассматривать, как уравнение для определения вектора U по заданному значению переменной $\alpha(t)$. Решив это уравнение относительно U , получим $U = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot U_r - (\|\dot{\xi}_B\|^2 - \alpha) \xi_B$, где $U_r \in R^3$ — произвольный вектор. После подстановки найденного выражение для вектора U в уравнение (9) последнее можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_B &= (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot U - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) [(I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot U_r - (\|\dot{\xi}_B\|^2 - \alpha) \xi_B] - \\ &- \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B = (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot U_r - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B, \end{aligned}$$

отсюда следует, что $U = U_r + \alpha(t) \xi_B$.

Введем в рассмотрение ошибку управления $e = \xi_B - e_B$. С учетом уравнения (10) для ошибки управления e справедливо уравнение $\ddot{e} = U - \alpha(t) \xi_B$. Так как для вектора U справедливо выражение $U = U_r + \alpha(t) \xi_B$, то в этом случае уравнение для ошибки примет вид $\ddot{e} = U_r$. Очевидно, что закон управления

$$\begin{aligned} U_r &= -K_1 e - K_2 \dot{e}, \\ e &= \xi_B - e_B, \quad \dot{e} = \dot{\xi}_B, \end{aligned}$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{i1}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{i2}), \quad i = 1, 2, 3,$$

при $k_{i1} > 0$, $k_{i2} > 0$ обеспечивает асимптотическую устойчивость режиму одноосной ориентации $\xi_B = e_B$. Подставив управление $U = U_r + \alpha(t)\xi_B$ в уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_B &= (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot (-K_1 e - K_2 \dot{e} + \alpha(t)\xi_B) - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B = \\ &= (I_3 - \xi_B \cdot \xi_B^T) \cdot (-K_1 e - K_2 \dot{e}) - \|\dot{\xi}_B\|^2 \xi_B. \end{aligned}$$

Из полученного выражения следует, что составляющая $\alpha(t)\xi_B$ вектора U не влияет на характер движения вектора ξ_B и ее можно положить равной нулю. Тогда $U = U_r = -K_1 e - K_2 \dot{e}$. Таким образом, для режима одноосной ориентации справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть вращательное движение космического аппарата задано системой уравнений

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times (J\omega_B^{BI}) &= M_u, \\ 2\dot{\Lambda}_{IB} &= \begin{bmatrix} 0 & (-\omega_B^{BI})^T \\ \omega_B^{BI} & -\Phi(\omega_B^{BI}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{IB}. \end{aligned}$$

Обозначим ξ_I и e_B неподвижные орты в инерциальной системе координат I и связанной системе координат B соответственно. Будем полагать, что на борту КА имеется информация о векторе абсолютной угловой скорости ω_B^{BI} и проекциях вектора ξ на оси базиса B в виде вектора ξ_B , а координаты вектора e_B заданы. Тогда закон управления

$$M_u = \omega_B^{BI} \times (J\omega_B^{BI}) - J \cdot (\xi_B \times (U - \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times \xi_B))),$$

где

$$\begin{aligned} U &= -K_1 e - K_2 \dot{\xi}_B, \\ e &= \xi_B - e_B, \end{aligned}$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{i1}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{i2}), \quad i = 1, 2, 3 \quad k_{i1} > 0, \quad k_{i2} > 0,$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость режиму одноосной ориентации $\xi_B = e_B$.

Пример 1. Для анализа качественных особенностей процесса одноосной ориентации космического аппарата проведено моделирование управляемого движения спутника. В качестве неподвижного вектора в инерциальном пространстве, вдоль которого нужно ориентировать продольную ось спутника, $e_B = (1 \ 0 \ 0)^T$, принимался вектор

$$\xi_I = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Взаимное положение продольной оси КА и направления ξ оценивалось по формуле $\psi = \arccos(\xi_B^T \cdot e_B)$.

Начальные условия при построении ориентации были следующие:

$$\Lambda_{IB} = (0,5073 \quad -0,6724 \quad 0,2714 \quad -0,4655),$$

$$\omega_B^{BI} = (0 \quad 0 \quad 0).$$

Это соответствовало углу между вектором ξ_B и e_B , равным 124° . На рис. 1 приведен график изменения функции $\psi = \psi(t)$, на рис. 2 — графики изменения угловых скоростей. Результаты моделирования свидетельствуют о работоспособности предложенного алгоритма одноосной ориентации КА.

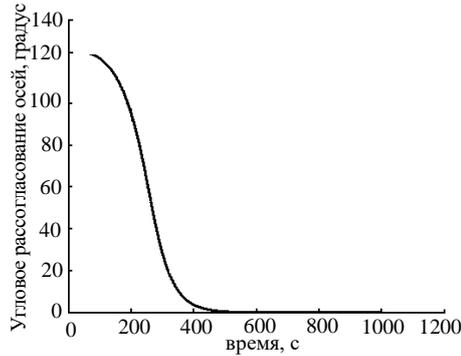


Рис. 1

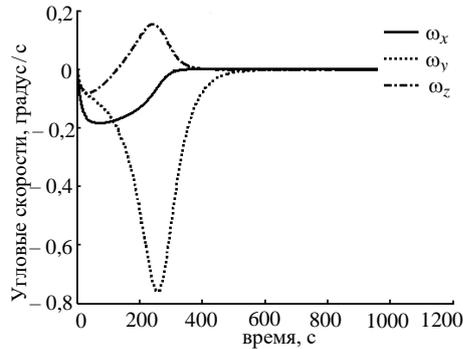


Рис. 2

Задача трехосной ориентации КА по векторным измерениям

Введем в рассмотрение опорную систему координат R , относительно которой необходимо ориентировать КА. Будем полагать, что начало ее находится в центре масс КА, положение осей относительно инерциальной системы координат I известно и она движется с абсолютной угловой скоростью $\omega_R^{RI}(t)$, заданной проекциями на оси базиса R . Пусть имеется совокупность нормированных векторов $r_i(t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, неподвижных относительно инерциальной системы координат. Будем полагать, что на борту КА имеется информация о проекциях векторов $r_i(t_k)$ на оси базиса R в виде векторов $r_{Ri}(t_k)$ и на оси базиса B в виде векторов $r_{Bi}(t_k)$, а также информация об угловой скорости в виде вектора $\omega_B^{BI}(t_k)$. Рассмотрим следующую задачу: для системы уравнений [9, 10]

$$J \dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times (J \omega_B^{BI}) = M_u,$$

$$\dot{\Lambda}_{RB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_B^{BI} - \omega_R^{RI})^T \\ \omega_B^{BI} - \omega_R^{RI} & -\Phi(\omega_B^{BI} + \omega_R^{RI}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

найти управляющий момент M_u , обеспечивающий асимптотическую устойчивость режиму трехосной ориентации $\Lambda_{RB}(t) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$.

Перейдем к решению поставленной задачи. Согласно выражению (9) движение векторов r_i в связанной системе координат подчиняется уравнению

$$\ddot{r}_{Bi} = (I_3 - r_{Bi} \cdot r_{Bi}^T) \cdot U_i - \|\dot{r}_{Bi}\|^2 r_{Bi}. \quad (11)$$

Это движение обусловлено действием на КА управляющего момента M_u , создаваемого исполнительными органами системы управления. Для того чтобы вос-

пользоваться уравнениями (11) для решения различных задач управления ориентацией КА по векторным измерениям, необходимо знать, как связаны векторы управления U_i с реально действующим моментом управления M_u . Для этого рассмотрим уравнение

$$M_u = \omega_B^{BI} \times (J \omega_B^{BI}) - J \cdot (r_{Bi} \times (U_i - \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times r_{Bi}))).$$

Введем обозначения

$$x = J^{-1}(M_u - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI}) - r_{Bi} \times (\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times r_{Bi})). \quad (12)$$

С учетом принятого обозначения уравнение для момента управления M_u можно преобразовать к виду

$$-r_{Bi} \times U_i = x. \quad (13)$$

Умножив векторно левую и правую части уравнения (13) на вектор r_i , последнее можно представить следующим образом:

$$-r_{Bi} \times (r_{Bi} \times U_i) = r_{Bi} \times x. \quad (14)$$

Раскрыв в уравнении (14) двойное векторное произведение и проделав необходимые преобразования, получим

$$U_i = r_{Bi} \times x + (r_{Bi}^T U_i) r_{Bi} = r_{Bi} \times x + \gamma_i r_{Bi}, \quad (15)$$

где

$$\gamma_i = r_{Bi}^T U_i. \quad (16)$$

Согласно уравнению (9) изменить характер движения векторов r_{Bi} можно лишь за счет составляющей $U_{\perp} = (I_3 - r_{Bi} \cdot r_{Bi}^T) \cdot U_i$, ортогональной вектору r_{Bi} , а составляющая $U_{\parallel} = \gamma_i r_{Bi}$, параллельная вектору r_{Bi} , не влияет на характер движения и ее можно положить равной нулю ($\gamma_i \equiv 0$). Тогда выражение для U_i принимает вид

$$U_i = r_{Bi} \times x = r_{Bi} \times (J^{-1}(M_u - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI}) + \omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times r_{Bi})). \quad (17)$$

При этом вектор U_i не является решением вырожденной системы (13). Уравнение (17) позволяет по управляющему моменту M_u найти векторы U_i , входящие в правые части динамических уравнений, описывающих движение векторов в связанной системе координат. В то же время, если известны векторы U_i , то уравнения (17) можно рассматривать как переопределенную систему для нахождения управляющего момента M_u , обеспечивающего заданное движение векторов r_{Bi} относительно связанной системы координат (ССК). С учетом принятых обозначений в развернутом виде эту систему можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{B1} \times x &= U_1 \\ r_{B2} \times x &= U_2 \\ &\vdots \\ r_{Bn} \times x &= U_n, \end{aligned} \quad (18)$$

или в матричном виде

$$Ax = Y, \quad (19)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \Phi(r_{B1}) \\ \Phi(r_{B2}) \\ \vdots \\ \Phi(r_{Bn}) \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Система (19) представляет собой линейную переопределенную систему $3n$ уравнений относительно трех координат вектора x . Очевидно, если ранг матрицы A равен трем, то переопределенная система имеет единственное псевдорешение, определяемое выражением

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T Y. \quad (20)$$

Найдем условие, при котором ранг матрицы A равен трем. Для этого рассмотрим однородную систему

$$A\lambda = 0. \quad (21)$$

Ранг матрицы будет A равен трем, если переопределенная однородная система уравнений (21) имеет единственное решение $\lambda = 0$. Представим систему (21) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} r_{B1} \times \lambda &= 0 \\ r_{B2} \times \lambda &= 0 \\ &\vdots \\ r_{Bn} \times \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (22) следует, что ненулевое решение ($\|\lambda\| \neq 0$) существует, если вектор λ параллелен всем векторам r_i . Это возможно только тогда, когда векторы r_i параллельны друг другу, а вектор λ определяется выражением $\lambda = \tau$, где τ — произвольный вектор, коллинеарный векторам r_i . Если среди совокупности векторов r_i имеется пара непараллельных векторов, т.е. существуют значения i и j , для которых выполняется условие $r_i^T r_j \neq \pm 1$, то очевидны соотношения

$$\frac{r_{Bi} - r_{Bj}}{\|r_{Bi} - r_{Bj}\|} \times \lambda = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (23)$$

которые справедливы при значениях $\lambda = 0$ и $\lambda = \frac{r_{Bi} - r_{Bj}}{\|r_{Bi} - r_{Bj}\|}$. Значение $\lambda = 0$ удовле-

творяет системе уравнений (22), а значение $\lambda = \frac{r_{Bi} - r_{Bj}}{\|r_{Bi} - r_{Bj}\|}$ не удовлетворяет, так как

$$r_{Bi} \times (r_{Bi} - r_{Bj}) = r_{Bj} \times (r_{Bi} - r_{Bj}) = -r_{Bi} \times r_{Bj} \neq 0.$$

Таким образом, чтобы переопределенная система (19) имела единственное решение $\lambda = 0$, необходимо и достаточно, чтобы среди векторов r_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имелось не меньше двух непараллельных векторов. При этом из выражения (12) имеем

$$\dot{I}_u = J\hat{x} + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} + r_{Bi} \times (\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times r_{Bi})).$$

Полученный результат совпадает с известным условием, что для определения кватерниона ориентации необходимо не меньше двух несовпадающих векторов. При выполнении этого условия можно рассчитать кватернион ориентации и найти

управляющий момент M_u . Предложенный алгоритм позволяет рассчитать управление M_u непосредственно по векторным измерениям без определения кватерниона ориентации.

Как показано в разделе «Задача одноосной ориентации КА», динамические уравнения движения для векторов r_{Bi} можно представить следующим образом: $\ddot{r}_{Bi} = U_i - \alpha(t)r_{Bi}$, где $U_i = U_{ri} + \alpha(t)r_{Bi}$. Движение ортов r_i в опорной системе координат подчиняется уравнению $\ddot{r}_{Ri} = \omega_R^{RI} \times (\omega_R^{RI} \times r_{Ri}) - \dot{\omega}_R^{RI} \times r_{Ri} = U_i^*$.

Введем в рассмотрение ошибки управления $e_i = r_{Bi} - r_{Ri}$. Для них справедливы уравнения

$$\ddot{e}_i = \ddot{r}_{Bi} - \ddot{r}_{Ri} = U_i - U_i^* - \alpha_i r_{Bi} = U_{ri} + \alpha_i r_{Bi} - U_i^* - \alpha_i r_{Bi} = U_{ri} - U_i^* = \Delta U_i. \quad (24)$$

При этом законы управления

$$\Delta U_i = -K_{1i}e_i - K_{2i}\dot{e}_i \quad (25)$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость решений уравнений (24). Из соотношений (24) окончательно имеем $U_i = -K_{1i}e_i - K_{2i}\dot{e}_i + U_i^*$, где $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$, $K_2 = \text{diag}(k_{2i})$, $k_{1i} > 0$, $k_{2i} > 0$.

Покажем, что при этом обеспечивается асимптотическая устойчивость режима трехосной ориентации $\Lambda_{RB}(t) = (1\ 0\ 0\ 0)^T$. Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова: $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_i^T K_{1i} K_{2i} e_i + \dot{e}_i^T K_{2i} \dot{e}_i)$. Производная от этой функции равна $\dot{V} = -\sum_{i=1}^n \dot{e}_i^T K_{2i} \dot{e}_i$ и является отрицательно-определенной. Векторы r_{Bi} и r_{Ri} связаны операцией вращения. В этом случае переменные e_i и \dot{e}_i — функции координат вектора Λ_{RB} и $\dot{\Lambda}_{RB}$. Следовательно, и переменная V является функцией вектора Λ_{RB} и $\dot{\Lambda}_{RB}$. Она, как функция переменных Λ_{RB} и $\dot{\Lambda}_{RB}$, знакоположительная и обращается в ноль только в режиме трехосной ориентации, а ее производная — отрицательная определенная функция, также обращающаяся в ноль, только в режиме трехосной ориентации. Следовательно, режим трехосной ориентации $\Lambda_{RB}(t) = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ асимптотически устойчив. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть имеется совокупность не подвижных относительно инерциальной системы координат нормированных векторов $r_i(t_k)$, координаты которых в опорной и связанной системах координат полагаются известными. Тогда для системы уравнений

$$J \dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times (J \omega_B^{BI}) = M_u,$$

$$\dot{\Lambda}_{RB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_B^{BI} - \omega_R^{RI})^T \\ \omega_B^{BI} - \omega_R^{RI} & -\Phi(\omega_B^{BI} + \omega_R^{RI}) \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{RB}$$

закон управления

$$M_u = Jx + \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} + r_{Bi} \times (\omega_B^{BI} \times (\omega_B^{BI} \times r_{Bi})),$$

где

$$U_i = -K_{1i}e_i - K_{2i}\dot{e}_i + U_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$U_i^* = \ddot{r}_{Ri} = \omega_R^{RI} \times (\omega_R^{RI} \times r_{Ri}) - \dot{\omega}_R^{RI} \times r_{Ri},$$

$$e = r_{Bi} - r_{Ri},$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1i}), K_2 = \text{diag}(k_{2i}), k_{1i} > 0, k_{2i} > 0,$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T Y,$$

$$A = \begin{pmatrix} \Phi(r_{B1}) \\ \Phi(r_{B2}) \\ \vdots \\ \Phi(r_{Bn}) \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix},$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость режиму трехосной ориентации $\Lambda_{RB}(t) = (1000)^T$.

Пример 2. Для КА, находящегося на круговой орбите, моделировался процесс построения орбитальной ориентации. Предполагалось, что на борту спутника имеется измеритель угловой скорости и звездный датчик, которые выдают информацию о векторе угловой скорости ω_B^{BI} и проекциях r_{Bi} единичных векторов направления на звезды на оси ССК, а также автономная спутниковая навигационная система, по информации которой рассчитывался кватернион Λ_{IO} . Векторы r_{Oi} находились по формуле $r_{Oi} = \Lambda_{IO}^{-1} \circ r_{Ii} \circ \Lambda_{IO}$. Приведем начальные условия при построении ориентации: угол тангажа — плюс 90° , угол крена — плюс 120° , угол рыскания — минус 90° . На рис. 3, 4 изображены зависимости от времени углов ориентации и угловых скоростей. Как видно из приведенных графиков, параметры углового движения в конце переходного процесса соответствуют требуемому положению КА в орбитальной системе координат. Это подтверждает работоспособность разработанных алгоритмов.

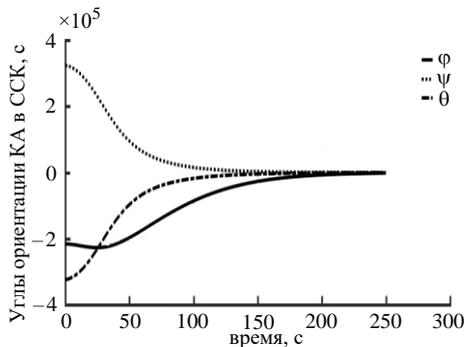


Рис. 3

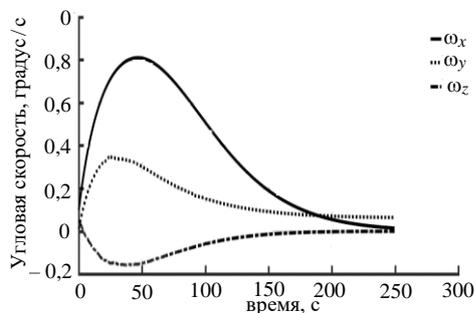


Рис. 4

Заключение

На основе динамической модели движения точки по единичной сфере в трехмерном пространстве получена динамическая модель движения вектора относительно связанной системы координат. Для этой модели предложено преобразование правой части динамического уравнения Эйлера в новый вектор управления $U \in R^3$, позволяющий компактно записать правую часть динамического уравнения для вектора как функцию вектора состояния КА. Найденное преобразование обратимо, что позволяет вернуться к исходной форме правой части динамического уравнения Эйлера и найти физически реализуемый исполнительными органами СУ управляющий момент $M_u \in R^3$.

На основе полученной динамической модели предложены алгоритмы построения заданной ориентации КА непосредственно по векторным измерениям без определения кватерниона ориентации. При этом, в отличие от известных работ [11, 12], в которых для решения задачи одноосной ориентации использовался прямой метод Ляпунова, впервые удалось свести задачу нахождения управления M_u к тривиальной задаче нахождения управления U , обеспечивающего асимптотическую устойчивость решению системы $\ddot{e} = U$. Уравнение для вектора e является линейным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет очень простой вид, что позволяет при синтезе управления U применить хорошо развитые методы теории линейных систем с постоянными коэффициентами. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность предложенных алгоритмов.

М.В. Єфименко, Н.В. Луценко

КЕРУВАННЯ КУТОВИМ РУХОМ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА ВЕКТОРНИМИ ВИМІРАМИ

Задачі переорієнтації КА є задачами керування кутовим рухом корпусу КА навколо центра мас, актуальними у зв'язку зі зростаючими вимогами до динамічних характеристик просторових маневрів КА. Успіх у вирішенні задач керування кутовим рухом КА значною мірою залежить від обраної моделі кутового руху КА. Серед різних моделей кутового руху найпоширеніша модель, в якій динаміка описується рівняннями Ейлера, а кінематика — кінематичним рівнянням в параметрах Родріга–Гамільтона. Перевага цієї моделі — відсутність обчислювальних особливостей і мінімальна надмірність вектора стану, а недолік — нелінійність моделі, що істотно ускладнює синтез законів керування. Крім такої моделі для побудови керування можна використовувати і модель руху, що має вигляд системи диференціальних рівнянь другого порядку щодо параметрів Родріга–Гамільтона. В основі цієї моделі лежить динамічне рівняння руху точки по сфері. З використанням цього підходу в роботі отримано динамічну модель руху вектора в зв'язаній системі координат і розв'язано дві задачі побудови заданої орієнтації КА безпосередньо за векторними вимірами без визначення кватерніона орієнтації: задача одноосної орієнтації; задача тривісної орієнтації безпосередньо за векторними вимірами. При цьому, на відміну від відомих робіт, в яких для розв'язання задачі одноосної орієнтації використовувався прямий метод Ляпунова, вперше вдалося звести задачу знаходження необхідного керування до тривісної задачі знаходження керування для лінійної системи з постійними коефіцієнтами. Наведено результати чисельного моделювання, що підтверджують працездатність запропонованих алгоритмів.

Ключові слова: космічний апарат, керування орієнтацією, кватерніон.

N.V. Yefymenko, N.V. Lutsenko

SPACECRAFT ANGULAR MOTION CONTROL BASED ON VECTOR MEASUREMENTS

The tasks of spacecraft (SC) reorientation are the tasks of controlling the angular motion of the spacecraft body around its own mass center. Today these tasks are very topical ones because of the continually growing requirements to the dynamic characteristics of the SC spatial maneuvers. The success of solving the tasks of SC angular motion control significantly depends on the chosen model of CS angular mo-

tion. The most widespread model among the diverse models of angular motion is the one, where the dynamics is described with the Euler's equation, and the kinematics is described with a kinematical equation in Rodrigo–Hamilton parameters. The advantage of this model is the absence of computational peculiarities and the minimal redundancy of the state vector. The drawback is that the model is non-linear, which hampers the synthesis of control laws. In addition to this model, to build a control can be used a motion model in the form of a second-order differential equations system for the Rodrigo–Hamilton parameters [13]. The basis of this model is formed with a dynamic equation of point movement along the sphere. Using this approach, the dynamic model of vector motion in coordinate system rigidly attached to main SC body has been obtained. The two tasks of constructing the assigned SC orientation directly on the vector measurements without defining the orientation quaternion have been resolved: — the task of single-axis orientation; — the task of three-axis orientation directly on the vector measurements. Wherein, in contrast to the well-known works [11, 12], where, to solve the task of single-axis orientation, the straight Lyapunov's method had been applied, the task of finding the required control was managed to be reduced to the trivial task of finding the control for the linear system with constant coefficients. The results of computer simulation for proving the soundness of proposed algorithms were provided. The work can be useful for the developers of CS control systems.

Keywords: spacecraft, orientation control, quaternion

1. Keat J. Analysis of least-squares attitude determination routine DOAOP. *Computer Sciences Corporation Report CSC/TM-77/6034*. February 1977. 60 p.
2. Lerner, Gerald M. Three-axis attitude determination in spacecraft. *Attitude Determination and Control*. 1978. P. 420–429.
3. Markley, Landis F. Parameterizations of the attitude. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. 1978. P. 329–341.
4. Shuster, Malcolm D. A survey of attitude representations. *Journal of the Astronautically Sciences*. 1993. **41**, N 4. P. 439–517. P. 439–517.
5. Shuster, Malcolm D. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. *AIAA Paper 78-1249. AIAA Guidance and Control Conference*. Palo Alto, CA, August 7–9, 1978.
6. Shuster, Malcolm D., Oh S.D. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*. 1981. **4**, N 1. P. 70–77.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М. : Изд. МГУ. 2000. 719 с.
8. Ефименко Н.В. Синтез алгоритмов управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2015. № 3. С. 102–115.
9. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 3. С. 3–15.
10. Волосов В.В., Куценко И.А., Попадинец В.И. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задача управления их ориентацией. Ч. 1. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 1. С. 101–116.
11. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М. : Наука, 1975. 496 с.
12. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. Киев : Наук. думка, 1999. 202 с.
13. Ефименко Н.В. Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона и ее свойства. *Электронное моделирование*. 2018. **40**, № 6. С. 21–36.

Получено 10.10.2018
После доработки 10.01.2019