УДК 519.85

С.В. Яковлев, О.С. Пичугина, О.В. Яровая

ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: дискретная оптимизация, конфигурация, полиэдр, гиперсфера, выпуклое продолжение, оценка минимума.

Введение

Задачи комбинаторной и дискретной оптимизации занимают особое место в теории сложных систем, поскольку позволяют отобразить дискретный характер параметров и процессов функционирования систем. Вопросам классификации таких задач и современным методам их решения посвящены работы отечественных и зарубежных ученых [1–10]. При формализации широкого класса практических задач используется понятие комбинаторной конфигурации как отображения абстрактного множества произвольной природы в конечное множество определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений [11].

Важное место в комбинаторной оптимизации занимают подходы, в которых объекты отображаются в арифметическое евклидово пространство с последующим использованием алгебро-топологических и тополого-метрических свойств полученных конечных точечных конфигураций [12–15]. Настоящая работа посвящена выделению класса полиэдрально-сферических конфигураций как вписанных в гиперсферу конечных множеств арифметического евклидова пространства, которые также называют конечными точечными конфигурациями. С одной стороны, это позволило воспользоваться свойствами задач оптимизации на гиперсфере [16, 17]. С другой, удалось распространить и конкретизировать известные теоретические результаты [18–20] для класса оптимизационных задач на различных классах комбинаторных конфигураций и получить их специфические свойства.

1. Основные направления исследования полиэдрально-сферических конфигураций

Пусть $E \subset R^n$ — конечное множество точек арифметического евклидова пространства. Обозначим $\boldsymbol{J}_m$ множество первых m натуральных чисел, т.е. $\boldsymbol{J}_m = \{1, ..., m\}$. Множество E представим в виде

$$E = \{x^1, ..., x^m\} = \{x^j, \ j \in \boldsymbol{J}_m\}, \tag{1}$$

где $m = \operatorname{card} E$ — мощность E, $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$, $j \in \boldsymbol{J}_m$.

В дальнейшем положим $m > 1$.

Пусть $P = \operatorname{conv} E$ — выпуклая оболочка множества E, т.е. многогранник, множество вершин которого обозначим $\operatorname{vert} P$. Введем следующие определения.

Определение 1. Множество $E \subset R^n$, точки которого удовлетворяют заданным условиям Λ на их взаимное расположение, назовем точечной конфигурацией и обозначим (E, Λ).

Задавая определенным образом систему ограничений Λ, получим различные классы точечных конфигураций.

Определение 2. Конечную точечную конфигурацию $E \subset R^n$ назовем полиэдрально-сферической, если существуют такие $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n) \in R^n$ и $r > 0$, что для всех точек $x \in E$ выполняется условие

$$\|x - \tau\| = r. \tag{2}$$

Выбор термина «полиэдрально-сферическая конфигурация» определяется представлением множества E как пересечения многогранника $P = \operatorname{conv} E$ и гиперсферы $S(\tau, r)$, т.е.

$$E = P \bigcap S(\tau, r), \tag{3}$$

где $\quad S(\tau, r) = \{x \in R^n : \|x - \tau\| = r\}$.

Для полиэдрально-сферической конфигурации используем такое же обозначение, что и для конечной точечной конфигурации E, поскольку эти множества совпадают при выполнении (3).

Заметим, что множество точек полиэдрально-сферической конфигурации E совпадает со множеством вершин своей выпуклой оболочки (многогранника P). В работе [18] впервые введено понятие вершинно-расположенного множества, удовлетворяющего указанному свойству.

Определение 3. Конечное множество $E \subset R^n$ назовем вершинно-расположенным, если

$$E = \text{vert conv}E.$$

Размерностью полиэдрально-сферической конфигурации E именуем минимальную размерность линейного многообразия пространства R^n, содержащего E. Полиэдрально-сферическую конфигурацию E размерности m обозначим E^m. Базисом полиэдрально-сферической конфигурации E^m определим совокупность любых m аффинно-независимых точек этой конфигурации. Полиэдрально-сферическую конфигурацию $E^m \subset R^n$ назовем полномерной, если $m = n$.

Таким образом, полиэдрально-сферическая конфигурация $E \subset R^n$ представима в виде (1), и для всех точек $x \in E$ существуют такие $\tau \in R^n$ и $r > 0$, что выполняется равенство (2). Точку $\tau \in R^n$ назовем центром полиэдрально-сферической конфигурации E, а $r > 0$ — ее радиусом. Центр τ и радиус r назовем параметрами полиэдрально-сферической конфигурации. Чтобы подчеркнуть, какими параметрами задается конкретная конфигурация, используем обозначение $E(\tau, r)$. В общем случае одна и та же полиэдрально-сферическая конфигурация может иметь различные параметры, поскольку равенство (2) может выполняться при различных τ и r.

Выберем минимальное значение $\hat{r} > 0$ и такое $\hat{\tau} \in R^n$, что для всех точек $x \in E$ выполняется условие

$$\|x - \hat{\tau}\| = \hat{r}. \tag{4}$$

Полиэдрально-сферическую конфигурацию E, для представления которой используется минимальный радиус $\hat{r}$, обозначим $\hat{E}(\hat{\tau}, \hat{r})$. Ясно, что для полномерной полиэдрально-сферической конфигурации представление $\hat{E}(\hat{\tau}, \hat{r})$ единственно.

Исследование полиэдрально-сферических конфигураций предполагает рассмотрение и решение следующих задач. Прежде всего, требуется идентифицировать, является ли заданная точечная конфигурация $E \subset R^n$ полиэдрально-сферической. Такую задачу назовем задачей структурной идентификации. Для полиэдрально-сферической конфигурации $E(\tau, r)$ определим ее параметры, в том числе минимальный радиус (задача параметрической идентификации).

Различные ограничения на взаимное расположение точек полиэдрально-сферических конфигураций позволяют выделять их специальные классы (задача классификации).

Представляет интерес задача аналитического описания полиэдрально-сферической конфигурации. С одной стороны, параметрическая идентификация $E(\tau, r)$ определяет и ее аналитическое описание в виде уравнения гиперсферы и системы линейных неравенств, описывающих многогранник. С другой стороны, существуют методы непрерывного представления дискретных множеств в виде иных аналитических зависимостей [15, 21, 22].

Важнейшим направлением исследований является рассмотрение задач оптимизации на полиэдрально-сферических конфигурациях. Данный класс задач относится к задачам дискретной оптимизации. Классические методы дискретного программирования, такие как методы ветвей и границ, методы отсечений, методы ветвей и отсечений, основаны, как правило, на использовании двух особенностей конечных точечных конфигураций — их разложение по параллельным плоскостям и получение оценок выпуклых функций с помощью решения полиэдральных релаксационных задач. Однако разложение по параллельным плоскостям — далеко не единственный способ декомпозиции конечных точечных конфигураций на попарно непересекающиеся подмножества. Например, любая конечная точечная конфигурация разлагается по семейству вложенных гиперсфер, что позволяет использовать как традиционную полиэдральную, так и сферическую релаксации дискретных задач [23–26].

2. Свойства полиэдрально-сферических конфигураций

Простейшим примером полиэдрально-сферической конфигурации является множество вершин симплекса. Напомним, что n-симплексом в пространстве R^n называется многогранник, являющийся выпуклой оболочкой $n+1$ точек, которые не лежат в $(n-1)$-мерной плоскости. Множество вершин симплекса является полномерной полиэдрально-сферической конфигурацией $\hat{E}(\hat{\tau}, \hat{r})$, а ее параметры $\hat{\tau}, \hat{r}$ представлены в [27].

Для описания полиэдрально-сферических конфигураций воспользуемся понятием мультимножества. Обозначим $\boldsymbol{J}$ множество натуральных чисел.

Определение 4. Мультимножеством $\hat{A}$ на множестве A назовем упорядоченную пару $\widetilde{A} = \{A, k\}$, где $k : A \to \boldsymbol{J}$. При этом множество A называют основой мультимножества $\hat{A}$, а число $k(a) \in \boldsymbol{J}$ — кратностью элемента $a \in A$.

Пусть элементами основы мультимножества $\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_1, ..., \widetilde{a}_m\}$ являются действительные числа, а $A = \{a_1, ..., a_l\}$. Обозначим $k(\widetilde{A}) = \{k(a_1), ..., k(a_l)\}$ вектор кратностей элементов мультимножества $\hat{A}$. Над мультимножествами определены операции объединения, пересечения, дополнения и др. В частности, объединением мультимножеств $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов, которые присутствуют хотя бы в одном из мультимножеств и кратность которых равна максимальной кратности соответствующих элементов в объединяемых мультимножествах.

Рассмотрим множество E вида (1). Точке $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$, $j \in \boldsymbol{J}_m$, поставим в соответствие мультимножество $G(x^j) = \{x_i^j,\ i \in \boldsymbol{J}_n\}$ ее координат. Назовем $G(x^j)$ индуцирующим мультимножеством точки $x^j \in E \subset R^n$.

Сформируем мультимножество

$$G = \bigcup_{j=1}^{m} G^j$$

как объединение мультимножеств $G^j = G(x^j)$, $j \in J_m$.

Представим мультимножество G в виде

$$G = \{g_1, ..., g_\beta\},\ \ g_k \le g_{k+1}, k \in \boldsymbol{J}_{\beta-1},$$

его основу обозначим $A = \{e_i, i \in \boldsymbol{J}_\alpha\}$, где $e_i < e_{i+1}, i \in J_{\alpha-1}$. Назовем G индуцирующим мультимножеством множества $E \subset R^n$.

Теорема 1. Если индуцирующие мультимножества $G(x^j)$ точек $x^j \in E \subset R^n$, $j \in \boldsymbol{J}_m$, совпадают, то E — полиэдрально-сферическая конфигурация, максимальная размерность которой равна $n-1$.

С учетом способа формирования мультимножества G имеет место следующее следствие данной теоремы.

Следствие 1. Если индуцирующее мультимножество G полиэдрально-сферической конфигурации содержит n элементов, то E — полиэдрально-сферическая конфигурация, максимальная размерность которой равна $n-1$.

Определение 5. Полиэдрально-сферическую конфигурацию E, удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем перестановочной.

Индуцирующее мультимножество перестановочной конфигурации имеет вид

$$G = \{g_i, i \in \boldsymbol{J}_n, g_1 \le ... \le g_n\}. \tag{5}$$

Заметим, что перестановочная конфигурация, порожденная заданным мультимножеством G, определена не единственным образом. Например, все не одноточечные подмножества множества E могут быть перестановочными конфигурациями, порожденными этим же мультимножеством. Могут также существовать и надмножества множества E, обладающие этим же свойством. Выделим из семейства перестановочных конфигураций, порожденных мультимножеством G, ту, что является подмножеством каждой из них. Назовем такую конфигурацию базовой перестановочной конфигурацией, порожденной мультимножеством G, и обозначим ее E_G. Имеет место следующее представление:

$$E_G = \{x \in R^n : \{x_1, ..., x_n\} = G\}.$$

Представление E_G как полиэдрально-сферической конфигурации $\hat{E}_G(\hat{\tau}, \hat{r})$ минимального радиуса имеет параметры

$$\hat{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i - \hat{\tau}_0)^2\right)^{1/2},\ \ \hat{\tau} = (\hat{\tau}_0, ..., \hat{\tau}_0) \in R^n,\ \ \hat{\tau}_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right) / n.$$

В дальнейшем основное внимание уделим исследованию базовой перестановочной конфигурации E_G. Для произвольной перестановочной конфигурации $E \subset E_G$ предлагаемые ниже результаты требуют соответствующих уточнений и обобщений.

Выпуклой оболочкой перестановочной конфигурации E_G является описываемый системой [28] так называемый общий перестановочный многогранник $P(E_G) = \operatorname{conv} E_G$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i, \quad \sum_{i \in \Omega} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_i, \tag{6}$$

где $|\Omega| = \operatorname{card} \Omega$, а суммирование проводится по всевозможным подмножествам $\Omega \subset J_n$.

Теорема 2. Если основа индуцирующего мультимножества равна $A = \{g_1, g_2\}$, $g_1 < g_2$, то $E = E(\tau, r)$ — полиэдрально-сферическая конфигурация с параметрами

$$r = \frac{g_2 - g_1}{2}\sqrt{n}, \quad \tau = (\tau_0, \ldots, \tau_0) \in \mathrm{R}^n, \quad \tau_0 = \frac{g_1 + g_2}{2}. \tag{7}$$

Если E — полномерная конфигурация, удовлетворяющая условиям теоремы 2, то выражения (7) задают $\hat{E}_G(\hat{\tau}, \hat{r})$. Частным случаем такой полиэдрально-сферической конфигурации является булево множество $B_n = \{0, 1\}^n$.

Параметры такой конфигурации при минимальном радиусе имеют значения

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad \hat{\tau} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \in R^n,$$

а ее выпуклой оболочкой является единичный гиперкуб

$$P(B_n) = \operatorname{conv} B_n = \{0 \leq x_i \leq 1, i \in \boldsymbol{J}_n\}.$$

Пусть $E \subset R^n$ — полиэдрально-сферическая конфигурация. Очевидно, что любое подмножество $E' \subset E$ также является полиэдрально-сферической конфигурацией. Рассмотрим семейство $\{L_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$ многообразий пространства R^n, таких что

$$E = \bigcup_{i \in J_k} E_i, \quad E_i = E \cap L_i \neq \varnothing, \quad E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall i, j \in \boldsymbol{J}_m, \quad i \neq j.$$

Такое представление задает разложение полиэдрально-сферической конфигурации по семейству $\{E_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$ полиэдрально-сферических конфигураций меньшей мощности.

Наиболее распространенным является разложение $E \subset R^n$ по линейным многообразиям. Прежде всего, это связано с достаточно простым способом определения параметров (τ^i, r_i) полиэдрально-сферических конфигураций $\{E_i(\tau^i, r_i), i \in \boldsymbol{J}_k\}$. Действительно, рассмотрим разложение конфигурации $E_i(\tau^i, r_i) \subset R^n$ по семейству гиперплоскостей $\{T_i, i \in \boldsymbol{J}_k\}$ вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0.$$

Тогда $E_i(\tau^i, r_i) \subset R^n$ будет иметь параметры

$$r_i = \sqrt{r_0^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tau_j^i - b_i}, \quad \tau^i = (\tau_1^i, ..., \tau_n^i),$$

$$\tau_j^i = \tau_j^0 - \sum_{t=1}^{n} (a_{it})^2 \tau_t^0 - b_i \sum_{t=1}^{n} a_{it},$$

$$i \in \boldsymbol{J}_k,\ j \in \boldsymbol{J}_n.$$

Если для E использовано представление $\hat{E}(\tau^0, r_0)$ минимального радиуса, то данные формулы задают представления $E_i = \hat{E}_i(\tau^i, r_i)$, $i \in J_k$, минимальных радиусов полиэдрально-сферических конфигураций, полученных в результате разложения E по гиперплоскостям, в том случае если их размерности на единицу меньше размерности E .

3. Экстремальные свойства функций на полиэдрально-сферических конфигурациях

Сформулируем задачу оптимизации функции $\phi : R^n \to R^1$ на множестве точек полиэдрально-сферической конфигурации $E \subset R^n$ в следующей постановке:

$$\phi(x) \to \min, \quad x \in D, \tag{8}$$

где множество допустимых решений D задается системой ограничений

$$x \in E, \tag{9}$$

$$\psi_i(x) \le 0, i \in \boldsymbol{J}_k, \tag{10}$$

$$\psi_i(x) = 0, i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k, \tag{11}$$

а функции $\phi(x), \psi_i(x), i \in \boldsymbol{J}_m,$ определены на $E.$

Решение задачи (8)–(11) сводится к определению такой точки $x^* \in D,$ что $\phi(x^*) = \min_{x \in D} \phi(x),$

Задача (8)–(11) является задачей математического программирования. При этом ограничения (9) называют прямыми, а (10), (11) — функциональными.

Свойства задачи (8)–(11) определяются выбором прямых ограничений (9) и аналитическим видом функций $\phi(x), \psi_i(x), i \in \boldsymbol{J}_m,$ в описании области допустимых решений $D.$

Заметим, что множество $D,$ как подмножество $E,$ является полиэдрально-сферической конфигурацией. Формирование прямых и функциональных ограничений в задаче (8)–(11) является условным. Действительно, полиэдрально-сферическая конфигурация $E(G, \Lambda)$ задается системой ограничений Λ , определяющих способ формирования точек этой конфигурации. Поэтому, включая некоторые из ограничений (10), (11) в систему Λ , можно изменять структуру множества $E,$ а значит, и прямые ограничения задачи.

Отметим некоторые важные свойства задач оптимизации на полиэдрально-сферических конфигурациях. Пусть функция $\phi(x)$ задана на $E = E(\tau, r).$

Определение 6. Выпуклую функцию $\tilde{\phi}(x)$, определенную на выпуклом множестве $X \supset E$, назовем выпуклым продолжением функции $\phi(x)$ на X, если $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ для любых $x \in E$. Если функция $\tilde{\phi}(x)$ сильно выпукла на $X \supset E$ с параметром $\rho > 0$, то такое продолжение назовем сильно выпуклым.

Для функций $\phi(x)$ и $\tilde{\phi}(x)$, совпадающих на множестве $E \subset X$, используем обозначение

$$\tilde{\phi}(x) \underset{E}{=} \phi(x).$$

На полиэдрально-сферическую конфигурацию распространяются свойства выпуклых продолжений для функций, заданных на вершинно-расположенных множествах. Поэтому утверждение следующей теоремы является следствием соответствующих результатов теории выпуклых продолжений [18, 19].

Теорема 3. Для любой функции $\phi : E \to R^1$ существует дифференцируемое выпуклое продолжение $\tilde{\phi}(x)$ на $P = \operatorname{conv} E$.

Теорема 4. Для любой функции $\phi : E \to R^1$ и для любого $\rho > 0$ существует дифференцируемое сильно выпуклое продолжение $\tilde{\phi}(x)$ на P.

Теорема 5. Для любой выпуклой функции $\phi(x) \in C^2(R^n)$ и для любого $\rho > 0$ существует сильно выпуклое продолжение с параметром $\rho > 0$ на выпуклый компакт $X \supset E(\tau, r)$, которое имеет вид

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \rho(\|x - \tau\|^2 - r^2). \tag{12}$$

Подходы к построению выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере, рассмотрены в [29].

Сформулируем следующие теоремы, утверждения которых позволяют получить достаточные условия и оценки минимума функций, заданных на полиэдрально-сферических конфигурациях. Доказательства теорем следуют из свойств выпуклых функций, заданных на вершинно-расположенных множествах [20].

Теорема 6. Пусть функция $\tilde{\phi} : X \to R^1$ является выпуклым дифференцируемым продолжением функции $\phi : E \to R^1$ на выпуклое множество $X \supseteq P$. Тогда для любого $\tilde{x} \in X$

$$\min_{x \in E} \phi(x) \geq \tilde{\phi}(\tilde{x}) - (\tilde{\phi}'(\tilde{x}), \tilde{x}) + \min_{x \in P} (\tilde{\phi}'(\tilde{x}), x),$$

где $\phi'(x)$ — градиент функции $\phi(x)$ в точке x.

Точку $\tilde{x} \in X$ можно выбрать как решение задачи выпуклого программирования

$$\tilde{x} = \arg\min_{x \in P} \tilde{\phi}(x). \tag{13}$$

С другой стороны, поскольку в условиях теоремы 4 множество X является произвольным выпуклым надмножеством множества P, то в случае, если $S(\tau, r) \subset X$, в качестве точки $\tilde{x} \in X$ можно рассматривать решение задачи оптимизации на гиперсфере

$$\tilde{x} = \arg \min_{x \in S(\tau, r)} \tilde{\phi}(x). \tag{14}$$

Рассмотрим класс сильно выпуклых функций с параметром $\rho > 0$.

Теорема 7. Пусть функция $\tilde{\phi}(x)$ является сильно выпуклым продолжением функции $\phi(x)$ на P. Тогда

$$\min_{x\in E}\phi(x)\ge\tilde{\phi}(y^*)+\rho\min_{x\in E}\| x-y^*\|^2,$$

где

$$y^*=\arg\min_{y\in P}\tilde{\phi}(y).$$

Теорема 8. Пусть функция $\tilde{\phi}(x)$ является сильно выпуклым с параметром ρ дифференцируемым продолжением функции $\phi(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X\supset E$. Тогда для любого $y\in X$

$$\min_{x\in E}\phi(x)\ge\tilde{\phi}'(y)-\frac{1}{4\rho}\|\tilde{\phi}'(y)\|^2+\rho\min_{x\in E}\| x-y+\frac{1}{2\rho}\tilde{\phi}'(y)\|^2.$$

Применим приведенные выше результаты для исследования класса задач дискретной оптимизации на полиэдрально-сферических конфигурациях $E=E(\tau, r)$.

Осуществим эквивалентные преобразования задачи (8)–(11). Для этого представим ограничения–равенства в виде

$$\begin{gathered}\psi_i(x)\le 0,\\ -\psi_i(x)\le 0, i\in J_m\setminus J_k.\end{gathered}\tag{15}$$

Для функций $\phi(x),\psi_i(x), i\in\boldsymbol{J}_m$, и $-\psi_i(x), i\in J_m\setminus J_k$, стоящих в левых частях ограничений–неравенств (15), построим выпуклые продолжения на выпуклое множество $X\supseteq\operatorname{conv}E$.

Соответственно,

$$\tilde{\phi}(x)\underset{E}{=}\phi(x),$$

$$\tilde{\psi}_i(x)\underset{E}{=}\psi_i(x), i\in J_m,$$

$$\tilde{\psi}_i(x)\underset{E}{=}-\psi_{i-m+k}(x), i\in J_{2m-k}\setminus J_m.$$

С учетом приведенных выше результатов о существовании выпуклых продолжений для функций, заданных на полиэдрально-сферических конфигурациях, сформулируем следующую теорему, устанавливающую связь общей задачи оптимизации на полиэдрально-сферических конфигурациях с задачей оптимизации выпуклой функции на соответствующей конфигурации, подчиненной выпуклым функциональным ограничениям.

Теорема 9. Пусть E — полиэдрально-сферическая конфигурация. Тогда

$$\arg\min_{x\in G}\phi(x)=\arg\min_{x\in\tilde{G}}\tilde{\phi}(x),$$

где

$$G=\{x\in E:\psi_i(x)\le 0, i\in J_k, \psi_i(x)=0, i\in J_m\setminus J_k\},$$

$$\tilde{G}=\{x\in E:\tilde{\psi}_i(x)\le 0, i\in J_{2m-k}\}.$$

Аналогичные эквивалентные постановки можно сформулировать для дифференцируемых и сильно выпуклых продолжений функций $\phi(x),\psi_i(x), i\in\boldsymbol{J}_m$.

 ISSN 0572-2691

С теоретической точки зрения теоремы 3–5 обосновывают существование выпуклых, сильно выпуклых и дифференцируемых продолжений для произвольных функций, заданных на полиэдрально-сферических конфигурациях. Особый интерес представляет теорема 9, поскольку позволяет привлечь аппарат теории выпуклого программирования для решения вспомогательных задач, возникающих в различных алгоритмах дискретной оптимизации. При этом возникает задача построения искомых продолжений $\tilde{\phi}(x)$, решение которой зависит от вида исходной функции $\phi(x)$ и класса рассматриваемых полиэдрально-сферических конфигураций.

4. Построение выпуклых продолжений для некоторых функций на полиэдрально-сферических конфигурациях

Приведенные ниже результаты расширяют полученные в работах [24–26, 29] свойства сферически расположенных множеств на класс полиэдрально-сферических конфигураций.

Пусть на полиэдрально-сферической конфигурации $E(\tau, r)$ задана квадратичная функция

$$\phi(x) = (Cx, x) + (b, x), \tag{16}$$

где $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ — невырожденная симметричная $n\times n$-матрица, а b — n-мерный вектор.

Рассмотрим задачу минимизации функции $\phi(x)$ на $E(\tau, r)$ в виде

$$x^* = \arg \min_{x\in E(\tau,r)} \phi(x). \tag{17}$$

Для квадратичной функции $\phi(x)$ можно усилить утверждения теоремы 3 и конкретизировать вид выпуклого продолжения $\tilde{\phi}(x)$ на все пространство R^n.

Теорема 10. Пусть на полиэдрально-сферической конфигурации $E(\tau, r)$ задана квадратичная функция $\phi(x)$ вида (16). Тогда существует выпуклое продолжение

$$\tilde{\phi}(x) = (\tilde{C}x, x) + (\tilde{b}, x) + \tilde{d}$$

функции $\phi(x)$ на R^n, где $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]_{n\times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, $\tilde{b}$ — n-мерный вектор, $\tilde{d}$ — константа.

Построение выпуклого продолжения в R^n для класса квадратичных функций $\phi(x)$, заданных на $E(\tau, r)$, основывается на следующих эквивалентных преобразованиях:

$$\pm x_i x_j \underset{E(\tau,r)}{=} \frac{1}{2}\left((x_i \pm x_j)^2 + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \tau_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 - r^2 \right),\ 1 \le i < j \le n;$$

$$-x_i^2 \underset{E(\tau,r)}{=} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \tau_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 - r^2.$$

Осуществляя в соответствии с приведенными выражениями такие преобразования для функции (16), имеем

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \left(\sum_{i:\, c_{ii} < 0} |c_{ii}| + \sum_{i<j} |c_{ij}| \right) (\|x - \tau\|^2 - r^2).$$

Обозначим

$$\beta = \sum_{i:\, c_{ii} < 0} |c_{ii}| + \sum_{i<j} |c_{ij}|.$$

Тогда для функции $\tilde{\phi}(x) = (\tilde{C}x, x) + (\tilde{b}, x) + \tilde{d}$ имеем

$$\tilde{C} = C + \beta I, \ \tilde{b} = b - 2\beta\tau, \ \ \tilde{d} = \beta(\|\tau\|^2 - r^2), \tag{18}$$

где I — единичная матрица.

При этом в соответствии с теоремой 5 для любого $\rho > 0$ квадратичная функция $\tilde{\phi}(x) + \rho\|x - \tau\|^2$ будет сильно выпуклой с параметром не меньше ρ.

Выделение класса полиэдрально-сферических конфигураций позволяет конкретизировать утверждения теорем 6–8. Рассмотрим перестановочную конфигурацию E_G и соответствующий перестановочный многогранник $P(E_G) = \operatorname{conv} E_G$, описываемый системой линейных уравнений и неравенств (6). Тогда имеют место следующие утверждения, вытекающие из теорем 6–8 с учетом свойств перестановочных конфигураций.

Теорема 11. Пусть $\tilde{\phi}(x)$ — сильно выпуклое продолжение с параметром $\rho > 0$ функции $\phi(x)$ на $P(E_G)$ и

$$x^* = \arg \min_{x \in P(E_G)} \tilde{\phi}(x).$$

Тогда

$$\min_{x \in E_G} \phi(x) \geq \tilde{\phi}(x^*) + \rho \sum_{i=1}^{n} (x^*_{\pi_i} - g_i)^2,$$

где последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n, \ \ \pi_i \neq \pi_j \ \forall i, j \in J_n, i \neq j,$ такова, что $x^*_{\pi_1} \leq ... \leq x^*_{\pi_n}$.

Теорема 12. Пусть $\tilde{\phi}(x)$ — дифференцируемое сильно выпуклое продолжение с параметром $\rho > 0$ функции $\phi(x)$ на $P(E_G)$. Тогда для любой точки $\tilde{x} \in P(E_G)$ имеет место оценка

$$\min_{x \in E_G} \phi(x) \geq \tilde{\phi}(\tilde{x}) - (\tilde{\phi}'(\tilde{x}), \tilde{x}) + \rho \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{\pi_i} - g_i)^2 + \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x_{\pi_i}} g_i,$$

где последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n, \ \ \pi_i \neq \pi_j \ \forall i, j \in J_n, i \neq j,$ такова, что

$$\frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x_{\pi_1}} - 2\rho\tilde{x}_{\pi_1} \geq ... \geq \frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x_{\pi_n}} - 2\rho\tilde{x}_{\pi_n}.$$

Теорема 13. Для того чтобы $x^* = (x^*_1, ..., x^*_n)$ была точкой минимума функции $\phi(x)$ на E_G, достаточно, чтобы существовали такое дифференцируемое выпуклое продолжение $\tilde{\phi}(x)$ на $P(E_G)$ и такая последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n$, $\pi_i \neq \pi_j \ \ \forall i, j \in J_n, i \neq j,$ что

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(x^*)}{\partial x_{\pi_1}} \geq ... \geq \frac{\partial \tilde{\phi}(x^*)}{\partial x_{\pi_n}}, \ \ x^*_{\pi_1} \leq ... \leq x^*_{\pi_n}.$$

 ISSN 0572-2691

Осуществим конкретизацию теорем 11–13 для задачи оптимизации (17) квадратичной функции $\phi(x)$ на перестановочной конфигурации E_G.

Теорема 14. Для того чтобы $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ была точкой минимума функции $\phi(x)$ вида (16) на перестановочной конфигурации $\hat{E}_G(\hat{\tau}, \hat{r})$, порожденной индуцирующим мультимножеством G вида (5), достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n, \ \pi_i \neq \pi_j \ \ \forall i, j \in J_n, i \neq j,$ что

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\pi_i}(\tilde{c}_{i\pi_j} - \tilde{c}_{i\pi_{j+1}}) \geq \rho(g_j - g_{j+1}) - \tilde{b}_{\pi_j} + \tilde{b}_{\pi_{j+1}}, \ \ j \in J_{n-1}, \ \ x_{\pi_1}^* \leq ... \leq x_{\pi_n}^*, \qquad (19)$$

где матрица $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]_{n \times n}$ и вектор $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_n)$ определяются выражениями (18), а

$$\hat{\tau}_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \right) / n, \ \ \hat{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i - \hat{\tau}_0)^2 \right)^{1/2}.$$

Следствие 2. Пусть последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n, \ \pi_i \neq \pi_j \ \ \forall i, j \in J_n,$ $i \neq j,$ такова, что $\tilde{b}_{\pi_1} \ \geq ... \geq \tilde{b}_{\pi_n}$ и система неравенств (19) совместна. Тогда решение задачи (17) для перестановочной конфигурации $E_G(\tau, r)$ с параметрами

$$\tau = (\tau_0, ..., \tau_0) \in R^n, \ \ \tau_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \right) / n, \ \ r = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i - \tau_0)^2 \right)^{1/2}$$

имеет вид $x^* = (a_{\pi_1}, ..., a_{\pi_n})$.

Следствие 3. Пусть $\phi(x) = (Cx, x)$ и последовательность $\{\pi_1, ..., \pi_n\}, \pi_i \in J_n,$ $\pi_i \neq \pi_j \ \ \forall i, j \in J_n, \ \ i \neq j,$ такова, что $\tilde{c}_{j\pi_i} \geq ... \geq \tilde{c}_{j\pi_{i+1}}, i \in J_{n-1}, j \in J_n, i < j.$ Тогда решение задачи (17) для перестановочной конфигурации $E_G(\tau, r)$ представимо в виде $x^* = (a_{\pi_1}, ..., a_{\pi_n})$.

Другие свойства полиэдрально-сферических конфигураций, в частности пути трансформации произвольных конечных точечных конфигураций в полиэдрально-сферические, исследованы в работах [30, 31]. Такой подход позволяет применять полученные в данной статье свойства полиэдрально-сферических конфигураций к решению комбинаторных задач общего вида.

Заключение

Описанные в настоящей работе результаты являются теоретической основой для разработки новых подходов к решению задач дискретной оптимизации, основанных на исследовании структуры конечных точечных конфигураций и свойств функций, заданных на таких конфигурациях. Структура полиэдрально-сферических конфигураций, кроме основного требования принадлежности гиперсфере, определяется характерными ограничениями для различных специальных классов дискретных множеств. В качестве примеров укажем множества перестановок с повторениями и без них, перестановок со знаком, четных и нечетных перестановок, булево множество, множества булевых матриц, специальные множества размещений и др. Распространение приведенных результатов на указанные классы позволяет получить новые свойства соответствующих задач дискретной оптимизации. При этом представляет интерес рассмотрение дополнительных линейных и нелинейных ограничений [32].

Смежным направлением исследований является решение оптимизационных задач геометрического проектирования [12], связанных с отображением и преобразованием геометрической информации при синтезе сложных систем. В работах [33, 34] введено конфигурационное пространство геометрических объектов. Это позволило выделить комбинаторную структуру задач размещения, упаковки, компоновки и покрытия как отображения конечного множества геометрических объектов на соответствующее конфигурационное пространство [35, 36] и предложить эквивалентные математические модели задач геометрического проектирования как задач комбинаторной оптимизации [37–40].

Другие практические приложения основаны на возможности формулировки исходной задачи в форме (8)–(11), что непосредственно связано с отображением дискретных объектов на пространство их параметров. Этот процесс на сегодняшний день недостаточно формализован и требует разработки специальных подходов. В частности, такой подход реализован при решении задач балансировки масс вращающихся частей [41], проектировании чипов в радиоэлектронике [42], кластерном анализе [43, 44].

Представляет также интерес применение свойств полиэдрально-сферических конфигураций в генетических алгоритмах комбинаторной оптимизации при решении вспомогательных задач [45, 46].

С.В. Яковлев, О.С. Пічугіна, О.В. Ярова

ПОЛІЕДРАЛЬНО-СФЕРИЧНІ КОНФІГУРАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Виділено клас поліедрально-сферичних конфігурацій як вписаних в гіперсферу скінченних точкових конфігурацій. Запропоновано підходи до визначення параметрів конфігурацій. Розглянуто властивості задач оптимізації на поліедрально-сферичних конфігураціях, сформульовано теореми про існування опуклих продовжень для функцій і оцінку їх мінімумів. Результати конкретизовані для класу квадратичних функцій, заданих на переставних конфігураціях.

Ключові слова: дискретна оптимізація, конфігурація, поліедр, гіперсфера, опукле продовження, оцінка мінімуму.

S.V. Yakovlev, O.S. Pichugina, O.V. Yarovaya

POLYHEDRAL SPHERICAL CONFIGURATIONS IN DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

A class of polyhedral-spherical configurations as finite point configurations inscribed into a hypersphere is defined. Approaches to the determination of configuration parameters are proposed. The properties of optimization problems on polyhedral-spherical configurations are considered, theorems on the existence of convex extensions of functions and estimates of their lower bounds are formulated. The results are extended to the class of quadratic functions defined on permutation configurations.

Keywords: discrete optimization, configuration, polyhedron, hypersphere, convex extension, bound of a minimum.

1. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Heidelberg; New York : Springer, 2018. 698 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56039-6.
2. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola : Dover Publications, 2013. 528 p.

3. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. (Eds.) *Handbook of combinatorial optimization.* New York : Springer, 2013. 3409 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1.
4. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. Springer Science and Business Media, 2002. 2024 p.
5. Burkard R.E. Quadratic assignment problems. *Handbook of combinatorial optimization*. 2013. Vol. 5, N 1. P. 2741–2814. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1_22.
6. Sergienko I.V., Shilo V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 1. P. 15–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i1.30.
7. Sergienko I.V., Hulianytskyi L.F., Sirenko S.I. Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 5. P. 732–741. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9134-0.
8. Згуровский М.З., Павлов А.А. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. К. : Наук. думка, 2016. 115 с.
9. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of polypermutations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2008. Vol. 40, N 6. P. 27–42. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v40.i12.30.
10. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Springer Optimization Methods and its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 239–250. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_11.
11. Berge C. Principes de combinatoire. Paris : Dunod, 1968. 146 p.
12. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К. : Наук. думка, 1986. 268 с.
13. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. 188 с.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков : Константа, 2017. 404 с.
15. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации. Харьков : Золотая миля, 2018. 312 с.
16. Ferreira O.P., Iusem A.N., Németh S.Z. Concepts and techniques of optimization on the sphere. *TOP*. 2014. Vol. 22, N 3. P. 1148–1170. https://doi.org/10.1007/s11750-014-0322-3.
17. Gräf M., Hielscher R. Fast global optimization on the torus, the sphere, and the rotation group. *SIAM J. Optim*. 2015. Vol. 25, N 1. P. 540–563. http://doi.org/10.1137/130950070.
18. Yakovlev S.V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1994. Vol. 34, N 7. P. 959–965. https://dl.acm.org/citation.cfm?id=196926.
19. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Springer Optimization Methods and its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 567–584. http://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_27.
20. Yakovlev S.V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics.* 1989. Vol. 25, N 3. P. 385–391. http://dx.doi.org/10.1007/BF01069996.
21. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930. http://doi.org/10.1007/s10559-016-9894-2.
22. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Functional and analytic representations of the general permutations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 1, N 4. P. 27–38. http://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.58550.
23. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. Vol. 29, N 5. P. 727–734. https://doi.org/10.1007/BF01125802.
24. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N 4. P. 562–567. http://dx.doi.org/10.1007/BF01130367.
25. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 1. P. 385–391. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0011-6.
26. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: theory and applications. *In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*. Proceedings, 2017. P. 1167–1175. https://doi.org/10.1109/UKRCON.2017.8100436.

27. Schneider P., Eberly D.H. Geometric tools for computer graphics. Amsterdam : Morgan Kaufmann, 2002. 1056 p.
28. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). М. : Наука, 1981. 344 с.
29. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Emets O.A., Valuiskaya O.A. Construction of convex continuations for functions defined on hypersphere. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1998. Vol. 34, N 2. P. 176–184. https://doi.org/10.1007/BF02742066.
30. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On polyhedral-spherical configurations: modelling and optimization. *In 2018 International Conference on Innovations in Engineering, Technology and Sciences (ICIETS)*. Proceedings, Karnataka, India, 2018. P. 100–105.
31. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. On optimization problems on the polyhedral-spherical configurations with their properties. *In 2018 IEEE First International Conference on System Analysis and Intelligent Computing (SAIC 2018)*. Proceedings, Kyiv, 2018. P. 94–100. http://dx.doi.org/10.1109/SAIC.2018.8516801.
32. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2001. Vol. 53, N 9. P. 1535–1545. https://doi.org/10.1023/A:1014374926840.
33. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0073-5.
34. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 5. P. 73–84. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.30.
35. Yakovlev S.V. The method of artificial space dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9974-y.
36. Yakovlev S., Kartashov O. System analysis and classification of spatial configurations. *In 2018 IEEE First International Conference on System Analysis and Intelligent Computing (SAIC 2018)* Proceedings, Kyiv, 2018. P. 90–93. https://doi.org/10.1109/SAIC.2018.8516760.
37. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. I.V. Grebennik, A.A. Kovalenko, T.E. Romanova, I.A. Urniaieva, S.B. Shekhovtsov. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0023-2.
38. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications*. 2010. Vol. 43, N 5. P. 535–553. https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2009.12.003.
39. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, N 3. P. 253–262. https://doi.org/10.1007/BF01953365.
40. Shekhotsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Avtomatica I Telemekhanika*. 1989. N 5. P. 160–168.
41. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie*. 1982. N 2. P. 4–5. https://www.osti.gov/etdeweb/biblio/6490782.
42. Pichugina O. Placement problems in chip design: modeling and optimization. *In 2017 IEEE 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology*. Proceedings, Kharkiv, 2017. P. 465–473. https://doi.org/10.1109/INFOCOMMST.2017.8246440.
43. Farzad B., Pichugina O., Koliechkina L. Multi-layer community detection. *In 2018 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics and Optimization (ICCAIRO)* — Proceedings, Prague, 2018. P. 101–108.
44. Gerasin S.N., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V. Set coverings and tolerance relations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 43, N 3. P. 333–340. https://doi.org/10.1007/s10559-008-9007-y.
45. Yakovlev S., Kartashov O., Yarovaya O. On class of genetic algorithms in optimization problems on combinatorial configuration. *In 2018 IEEE XIII International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT 2018)*. Proceedings, Lviv, 2018. P. 374–377. https://doi.org/10.1109/STC-CSIT.2018.8526.
46. Yakovlev S., Kartashov O., Pichugina O., Koliechkina L. The Genetic Algorithms in Optimization Problem on Combinatorial Configurations. *In 2018 International Conference on Innovations in Engineering, Technology and Sciences (ICIETS)*. Proceedings, Karnataka, India, 2018. P. 106–111.

Получено 15.05.2018