УДК 519.85

С.В. Яковлев

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ФОРМАЛИЗАЦИИ

Введение

При взаимодействии материальных объектов, участвующих при синтезе сложных систем, необходимо учитывать их пространственную форму, метрические характеристики и различные ограничения на их взаимное расположение. В отечественной науке указанное направление исследований связано с теорией геометрического проектирования, основы которой заложены Ю.Г. Стояном [1–4]. Современное состояние теории базируется на фундаментальных результатах, связанных с математическим моделированием геометрических объектов и их взаимных отношений [5–8].

В общем случае синтез оптимальных конфигураций сложных систем непосредственно связан с задачами размещения пространственных объектов заданной формы. Важным классом таких задач являются оптимизационные задачи размещения, возникающие в различных прикладных областях науки и техники, прежде всего при компоновке летательных аппаратов, судов и субмарин, в логистических системах при упаковке грузов для их транспортировки или хранения, в системах распознавания образов, в робототехнике, при кодировании информации и т.д. Особый интерес задачи синтеза пространственных конфигураций приобретают при проектировании ракетно-космической техники. Актуальные проблемы упаковки, компоновки, разбиения и покрытия в современном ракетно-космическом машиностроении рассматриваются, в частности, в ежегодных монографиях серии «Springer Optimization and Its Applications» под редакцией G. Fasano и J.D. Pinter.

Исследование конфигураций как математических объектов связано с понятием конфигурационного пространства [9–11], которое можно определить как совокупность обобщенных переменных, задающих расположение в пространстве некоторой системы и ее частей как относительно одна другой, так и относительно заданной системы отсчета. Количество параметров системы зависит от входящих в нее материальных тел, а также от характера наложенных на них связей. Таким образом, конфигурационное пространство задает конфигурацию системы, т.е. совокупность значений всех ее обобщенных координат. Число степеней свободы системы характеризует размерность конфигурационного пространства.

Конфигурационные пространства первоначально нашли широкое приложение в теоретических исследованиях, связанных с динамикой твердых тел. Однако свойства таких пространств с учетом различной формы, переменных размеров, а также ограничений на взаимное расположение тел, как правило, не изучались. В то же время указанные характеристики можно рассматривать как обобщенные переменные конфигурационного пространства. При этом учет ограничений на взаимное расположение тел требует привлечения специального математического аппарата, что позволяет интегрировать указанные исследования с основными положениями теории геометрического проектирования.

В настоящей статье цитируются современные источники, в которых рассматриваются различные классы задач синтеза пространственных конфигураций. Автор преследовал цель — подтвердить интерес ученых к указанным классам, а не осуществлять обзор и анализ таких публикаций.

1. Конфигурационное пространство геометрического объекта

Взаимодействие материальных объектов, участвующих в процессе синтеза системы, требует учитывать их геометрическую форму, размеры, а также различные ограничения на их взаимное расположение. Для описания внешней структуры и вида совокупности материальных объектов или их частей в научной литературе используется термин конфигурация. С математической точки зрения под конфигурацией понимается отображение ψ некоторого исходного множества Ω элементов произвольной природы в абстрактное множество U определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений Λ [12], т.е.

$$\psi : \Omega \to U. \tag{1}$$

В случае конечных множеств Ω и U конфигурация (1) называется комбинаторной.

В [13] впервые введено конфигурационное пространство геометрических объектов, которое базируется на формализации понятия геометрической информации. В дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматриваются геометрические объекты S в пространстве R^3. Результаты естественным образом переносятся на случай $S \subset R^2$. Геометрическая информация $g = (\{s\}, \{\mu\}, \{p\})$ об объекте $S \subset R^3$ включает следующее [13]:

• пространственную форму $\{s\}$ как класс эквивалентности на совокупности точечных множеств пространства R^3; метрические параметры формы $\{\mu\} = (\mu_1, ..., \mu_k)$, которые задают размеры S;

• параметры размещения $\{p\} = (p_1, ..., p_k)$, которые определяют положение объекта S в пространстве R^3.

Для задания компонент $\{s\}$ и $\{\mu\}$ геометрической информации g об объекте $S \subset R^3$ воспользуемся уравнением его границы:

$$f(\xi, \mu) = 0, \ \ \xi \in R^3, \tag{2}$$

где переменные $\mu_1, ..., \mu_k$ имеют область допустимых значений $D \subseteq R^k$, а функция $f(\xi, \mu)$ определена и непрерывна всюду на $R^3 \times D.$

Для произвольного объекта S обозначим его топологическую внутренность, замыкание и границу соответственно $\mathrm{int}\, S,\ \mathrm{cl}\, S,\ \mathrm{fr}\, S.$ Положим, что геометрические объекты имеют одну и ту же пространственную форму, если их уравнения границы можно представить в виде (2) при некотором фиксированном $\hat{\mu} \in D,$ причем

$$f(\xi, \hat{\mu}) < 0, \text{ если } \xi \in \mathrm{int}\, S;$$

$$f(\xi, \hat{\mu}) > 0, \text{ если } \xi \in R^3 \setminus \mathrm{cl}\, S.$$

Таким образом задан класс эквивалентности на множестве геометрических объектов как точечных множеств пространства R^3. Вектор $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ назовем метрическими параметрами пространственной формы $\{s\}$.

 ISSN 0572-2691

Свяжем с объектом S собственную систему координат, начало которой назовем полюсом объекта S. В качестве полюса может быть выбрана произвольная внутренняя точка S. Исходя из физических соображений, полюс для объекта, представляющего собой твердое тело, предлагается совмещать с его центром инерции. Для простоты аналитического описания центрально-симметричного объекта его полюс выбирается в центре симметрии. Если объект S симметричен относительно некоторой оси, то с ней совмещается ось его собственной системы координат и т.д.

Положение объекта S в пространстве R^3 однозначно определяется расположением его собственной системы координат относительно некоторой неподвижной системы $Oxyz$ пространства R^3. Тогда параметры размещения $\{p\}$ можно задать вектором $p=(p_1, ..., p_6)=(v, \theta)$, где $v=(v_1, v_2, v_3)$ — координаты полюса объекта S в системе координат $Oxyz$, а $\theta=(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — вектор угловых параметров, определяющий взаимное расположение осей собственной и неподвижной систем координат. В качестве угловых параметров могут быть выбраны углы Эйлера.

Если уравнение границы объекта $S \subset R^3$ задано в форме (1), то его расположение относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ задается так называемым уравнением общего положения

$$F(\xi, \mu, p)=0. \quad (3)$$

Если параметры размещения включают в себя угловые параметры, т.е. $p=(\mathrm{v}, \theta)$, то

$$F(\xi, \mu, p)=f\,[\boldsymbol{A}(\xi-v), \mu],$$

где $\xi=(x, y, z)$, а $\boldsymbol{A}$ — ортогональный оператор, выраженный через угловые параметры θ.

Выбор независимых координат вектора параметров размещения не является единственным. Как и при задании полюса объекта, его параметры размещения $p=(p_1, ..., p_6)$ определяются из уравнения общего положения (3) ввиду возможностей описания различных ограничений на взаимное расположение объектов и других факторов. В качестве параметров размещения, например, можно выбрать координаты $v^1=(v_1^1, v_2^1, v_3^1), v^2=(v_1^2, v_2^2, v_3^2)$ любых двух точек, принадлежащих объекту, т.е. $p=(p_1, ..., p_6)=(v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2)$. Одной из таких точек естественно выбирать полюс объекта. Заметим, что для задания положения объектов некоторых классов число параметров размещения может быть меньшим. Например, для сферы достаточно задать только координаты ее центра. При преобразованиях трансляции угловые параметры объекта фиксированы. В дальнейшем будем рассматривать общий случай, полагая $p=(p_1, ..., p_6)$.

Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(S)$ геометрического объекта $S \subset R^3$, выбрав в качестве обобщенных переменных метрические параметры $\{\mu\}=(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ и параметры размещения $\{p\}=(p_1, ..., p_6)$, т.е. положим $g=(\mu, p)=(\mu_1, ..., \mu_k, \mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_6)$. Тогда всякая точка конфигурационного пространства $\Xi(S)$ будет определять параметризованный геометрический объект $S(g) \subset R^3$. Размерностью конфигурационного пространства $\Xi(S)$ назовем число его независимых обобщенных координат. При фиксированных значениях обобщенных переменных $\hat{g}=(\hat{\mu}, \hat{p})$ точка $\hat{g} \in \Xi(S)$ называется изображающей точкой и однозначно определяет геометрический объект $S(\hat{g}) \subset R^3$, т.е. изображение.

2. Формирование пространственных конфигураций геометрических объектов и их классификация

Пусть $\Omega=\{S_1, ..., S_n\}$ — исходное множество геометрических объектов, а $\omega=$ $=\{\omega^1, ..., \omega^{n_0}\}$ — множество возможных пространственных форм объектов из Ω. Введем обозначение $J_n=\{1, 2, ..., n\}$. Осуществим параметризацию объектов S_i, $i\in J_n$. Положим, что объект $S_i\subset R^3$ имеет форму $\{s^i\}\in\omega$, метрические параметры $\mu^i=(\mu_1^i, ..., \mu_{k_i}^i)$ и параметры размещения $p^i=(p_1^i, ..., p_6^i)$. Тогда его уравнение границы запишем как

$$f_i(\xi, \mu^i)=0,$$

где функция $f_i(\xi, \mu^i)$ определена и непрерывна всюду на $R^3\times D_i, D_i\subseteq R^{k_i}$, причем

$$f_i(\xi, \mu^i), <0, \text{ если } \xi\in \operatorname{int} S_i;$$

$$f_i(\xi,\mu^i)>0, \text{ если } \xi\in R^3\setminus \operatorname{cl} S_i.$$

Уравнения общего положения объекта S_i в неподвижной системе координат $Oxyz$ пространства R^3 примет вид

$$\mathrm{F}_i(\xi, \mu^i, p^i)=0.$$

Рассмотрим конфигурационные пространства $\Xi(S_i)$, $i\in \boldsymbol{J}_n$, с обобщенными переменными $g^i=(\mu^i, p^i)$. Каждой точке $g^i\in\Xi(\mathrm{S}_i)$ в пространстве R^3 будет соответствовать параметризованый геометрический объект $S_i(\mathrm{g}^i)\subset R^3$. Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(\Omega)$ множества геометрических объектов как прямое произведение конфигурационных пространств $\Xi(S_i)$, $i\in J_n$, т.е.

$$\Xi(\Omega)=\Xi(S_1)\times...\times\Xi(S_n). \tag{4}$$

Обобщенными переменными этого пространства будет вектор $g=(g^1, ..., g^n)$.

Определение 1. Отображение $\phi:\Omega\to\Xi(\Omega)$ множества геометрических объектов $\Omega=\{S_1, ..., S_n\}$ в конфигурационное пространство $\Xi(\Omega)$, удовлетворяющее заданному набору ограничений Λ, задает пространственную конфигурацию геометрических объектов $S_i, i\in J_n$.

В соответствии с этим определением пространственная конфигурация геометрических объектов $S_i, i\in J_n$ должна удовлетворять системе ограничений Λ, учет которых позволяет выделить соответствующий класс пространственных конфигураций. Указанные ограничения накладываются на обобщенные переменные $g^1, ..., g^n$ конфигурационного пространства $\Xi(\Omega)$. Отметим, что в качестве обобщенных переменных могут выступать как метрические параметры, так и параметры размещения геометрических объектов. При этом указанные параметры (или часть из них) могут быть фиксированы. В большинстве практических задач метрические параметры формы геометрических объектов известны. В свою очередь, при фиксированных параметрах размещения имеем класс задач назначения, который является предметом исследования в области дискретной оптимизации [14, 15]. С другой стороны, как показано в работах [16, 17], синтез пространственных конфигураций предполагает выделение комбинаторной структуры задач. Это дает воз-

ISSN 0572-2691

можность рассматривать геометрические объекты как комбинаторные [18] и привлечь для их исследования результаты теории евклидовых комбинаторных конфигураций [19–22]. Особый интерес при этом имеет класс полиэдрально-сферических конфигураций [23–25].

Формализацию ограничений Λ осуществим путем введения на множестве геометрических объектов из Ω различных отношений, в том числе бинарных и многоместных. Определим на множестве Ω бинарные отношения непересечения $\{*\}$ и включения $\{\circ\}$. Положим $S_1 * S_2$, если $\operatorname{int} S_1 \cap \operatorname{int} S_2 = \varnothing$ и $S_1 \circ S_2$, если $\operatorname{int} S_2 \subset S_1$.

Определение 2. Отображение $\phi : \Omega \to \Xi(\Omega)$ задает конфигурацию упаковки (packing configuration), если $S_i(g^i) * S_j(g^j)$ $\forall i, j \in J_n, i < j$.

Задачи упаковки являются в настоящее время наиболее исследованными [26–29]. Рассмотрим объект S_0, который назовем контейнером, и обозначим его конфигурационное пространство $\Xi(S_0)$ с обобщенными переменными $g^0 = (\mu^0, p^0)$. Пусть $\Omega_0 = \{S_0, S_1, ..., S_n\}$ и сформируем конфигурационное пространство

$$\Xi(\Omega_0) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times ... \times \Xi(S_n).$$

Определение 3. Отображение $\phi : \Omega_0 \to \Xi(\Omega_0)$ задает конфигурацию компоновки (layout configuration), если $S_0(g^0) \circ S_j(g^j)$, $S_i(g^i) * S_j(g^j)$ $\forall i, j \in J_n, i < j$.

Как правило, параметры размещения контейнера полагают равными нулю, т.е. $p^0 = (p_1^0, ..., p_6^0) = (0, ..., 0)$. Заметим, что отношение $S_0(g^0) \circ S_j(g^j)$ эквивалентно $cS_i(g^0) * S_j(g^j)$ $\forall j \in J_n$. Поэтому конфигурация компоновки является конфигурацией упаковки, один из объектов которой рассматривается как дополнение к контейнеру. Подходы к классификации задач упаковки и компоновки геометрических объектов рассмотрены в [30–32]. Однако это касается случая, когда метрические параметры геометрических объектов, кроме контейнера, фиксированы. При этом обобщенными переменными объектов являются только их параметры размещения и метрические параметры контейнера.

При исследовании конфигураций компоновки, как правило, вводятся ограничения на минимально и максимально допустимые расстояния между объектами. Именно эта особенность положена в основу различия классов конфигураций упаковки и компоновки в работах [33–36]. Если геометрические объекты $S_i, i \in J_n$, представляют собой твердые тела заданной массы, в качестве дополнительных ограничений на их взаимное расположение могут накладываться условия, связанные с небалансом системы [37–39]. Такую конфигурацию назовем конфигурацией равновесной упаковки (balanced layout configuration).

Рассмотрим множество геометрических объектов

$$\tilde{\Omega} = \{S_{01}, ..., S_{0n}, S_{11}, ..., S_{1k_1}, ..., S_{n1}, ..., S_{nk_n}\}$$

и сформируем конфигурационное пространство

$$\Xi(\tilde{\Omega}) = \Xi(S_{01}) \times ... \times \Xi(S_{0n}) \times \Xi(S_{11}) \times ... \times \Xi(S_{1k_1}) \times ... \times \Xi(S_{n1}) \times ... \times \Xi(S_{nk_n})$$

с обобщенными переменными $g^{01}, ..., g^{0n}, g^{11}, ..., g^{1k_1}, ..., g^{n1}, ..., g^{nk_n}$.

Определение 4. Отображение $\phi: \tilde{\Omega} \to \Xi(\tilde{\Omega})$ задает конфигурацию мультиконтейнерной компоновки (multiply container configuration), если $S_{0i}(g^{0i}) \circ S_{ij}(g^{ij})$ и $S_{j\alpha}(g^{j\alpha}) * S_{j\beta}(g^{j\beta})$ $\forall\, \alpha, \beta \in J_{k_i}$, $\alpha < \beta$, $j \in J_{k_i}, i \in J_n$.

В качестве контейнеров выступают $S_{01}, ..., S_{0n}$. К указанному классу конфигураций относится компоновка в многосвязную область [40, 41].

Рассмотрим еще один контейнер S_{00} с обобщенными переменными g^{00} и положим $\tilde{\Omega}_0 = S_{00} \cup \tilde{\Omega}$, $\Xi(\tilde{\Omega}_0) = \Xi(S_{00}) \times \Xi(\tilde{\Omega})$.

Определение 5. Отображение $\phi: \tilde{\Omega}_0 \to \Xi(\tilde{\Omega}_0)$ задает конфигурацию вложенной компоновки (nesting configuration), если $S_{00}(g^{00}) \circ S_{0i}(\mathrm{g}^{0i})$, $S_{0i}(\mathrm{g}^{0i}) \circ S_{ij}(\mathrm{g}^{ij})$ и $S_{j\alpha}(g^{j\alpha}) * S_{j\beta}(g^{j\beta})$ $\forall\, \alpha, \beta \in J_{k_i}$, $\alpha < \beta$, $j \in J_{k_i}, i \in J_n$.

Некоторые классы вложенных компоновок рассмотрены в [42, 43]

Как следует из определения 5, конфигурация вложения является конфигурацией упаковки объектов $S_{0i}, i \in J_n$ в контейнер S_{00}, причем каждый из объектов S_{0i} является контейнером в конфигурации упаковки объектов S_{ij}, $j \in J_{k_i}$, $i \in J_n$. Аналогичным образом можно формализовать вложения в контейнеры более высокого порядка.

С использованием теоретико-множественных операций сформируем геометрический объект

$$S_B = B(S_1, ..., S_n), \tag{5}$$

который назовем сложным, а объекты $S_i, i \in J_n$ — базовыми. Будем говорить, что оператор B задает структуру сложного объекта S_B. Таким образом, сложному объекту S_B в конфигурационном пространстве $\Xi(\Omega)$ соответствует параметризованный геометрический объект заданной структуры:

$$S_B(g^1, ..., g^n) = B(S_1(g^1), ..., S_n(g^n)). \tag{6}$$

Способы формирования конфигурационного пространства сложного объекта описаны в [17].

При фиксированных значениях обобщенных координат $g^i = \hat{g}^i, i \in J_n$, точка $\hat{g} = (\hat{g}^1, ..., \hat{g}^n) \in \Xi(\Omega)$ является изображающей точкой конфигурационного пространства $\Xi(\Omega)$, которой соответствует изображение

$$S_B(\hat{g}^1, ..., \hat{g}^n) = B(S_1(\hat{g}^1), ..., S_n(\hat{g}^n)).$$

Пусть $\Omega_B = \{S_{B_1}, ..., S_{B_m}\}$ — множество сложных объектов $S_{B_j} = B_j(S_1, ..., S_n)$, $j \in J_m$ заданной структуры, а $\Xi(S_{B_j})$ — соответствующие им конфигурационные пространства с обобщенными переменными $g^j_{B_j}, j \in J_m$. Объекты S_{B_j}, $j \in J_m$, назовем объектами первого порядка, а базовые объекты $S_i, i \in J_n$, — объектами нулевого порядка. С одной стороны, сложный объект заданной структуры представляет собой пространственную конфигурацию. С другой стороны, на множестве сложных объектов можно задать пространственную конфигурацию более высокого порядка $\phi: \Omega_B \to \Xi(S_{B_1}) \times \ldots \times \Xi(S_{B_m})$, удовлетворяющую определенному набору ограничений. В соответствии с определениями 2–5 пространственные конфигурации сложных объектов можно классифицировать как конфигурации упаковки, компоновки и т.д.

Зададим структуру сложного объекта в виде

$$S_B = B(S_1, ..., S_n) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i. \tag{7}$$

Объект S_B, конфигурационная структура которого задается выражением (7), назовем составным.

Обозначим $S_B(g^1,...,g^n)$ параметризованный объект структуры (7) в конфигурационном пространстве $\Xi(\Omega)$.

Определение 6. Отображение $\phi: \Omega_0 \to \Xi(\Omega_0)$ задает конфигурацию покрытия (covering configuration), если $S_B(g^1, ..., g^n) \circ S_0(g^0)$. При этом геометрический объект S_0 называют областью покрытия, а геометрические объекты $S_i, i \in J_n$, — покрывающими объектами.

Различные постановки задач покрытия приведены, например, в работах [44–47].

Рассмотрим конфигурацию покрытия области $S_0(g^0)$ объектами $S_i(g^i), i \in J_n$, при условии, что $S_i(g^i) * S_j(g^j)$ для любых $i, j \in J_n, i < j$. Тогда совокупность обобщенных переменных $(g^0, g^1, ..., g^n) \in \Xi(\Omega_0)$ при выполнении указанных выше условий будет определять конфигурацию разбиения (partitioning configuration). Различные модели и методы решения задач разбиения множеств описаны в работах [48, 49].

Заметим, что на множестве объектов нулевого и первого порядков можно строить объекты второго порядка как пространственные конфигурации геометрических объектов из $\Omega \bigcup \Omega_B$ и так далее. Вместе с тем все объекты высших порядков и соответствующие пространственные конфигурации являются суперпозицией отображений над множеством базовых объектов Ω. Таким образом, любая пространственная конфигурация представляется как отображение $\phi: \Omega \to \Xi^{m_1}(S_1) \times ... \times \Xi^{m_n}(S_n)$, где $m_1, ..., m_n$ — кратности вхождения базовых объектов в конфигурацию.

3. Формализация отношений в конфигурационных пространствах геометрических объектов

В настоящее время основное внимание уделяется задачам синтеза пространственных конфигураций при фиксированных форме и метрических параметрах базовых объектов. Переменными являются лишь размеры контейнера либо области покрытия. Использование конфигурационных пространств геометрических объектов позволяет значительно расширить класс задач. При этом синтез конфигураций упаковки, компоновки, покрытия, разбиения предполагает выбор обобщенных переменных $g^0, g^1, ..., g^n$ соответствующего конфигурационного пространства и описание множества их допустимых значений в виде системы функциональных ограничений.

Для формализации условий взаимного непересечения и включения геометрических объектов Ю.Г. Стоян ввел понятие Φ-функции, свойства которых наиболее полно освещены в работах [3–8]. При этом предполагается, что над объектами осуществляются только собственные конгруэнтные преобразования, т.е. форма и метрические параметры объектов фиксированы. Параметризованный геометрический объект S с параметрами размещения p обозначим $S(p)$. Заметим, что при выделении соответствующего класса Φ-функций важную роль играет размерность вектора параметров размещения. Например, при преобразованиях трансляции объектов их угловые параметры фиксированы. В общем случае положим, что $p=(p_1, ..., p_\alpha)$.

Определение 7. Непрерывная, определенная всюду на $R^{2\alpha}$ функция $\Phi^{S_1S_2}(p^1, p^2)$ называется Ф-функцией геометрических объектов $S_1(p^1)$ и $S_2(p^2)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\Phi^{S_1S_2}(p^1, p^2)>0, \text{ если } \operatorname{cl} S_1(g^1)\bigcap \operatorname{cl} S_2(g^2)=\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(p^1, p^2)=0, \text{ если } \operatorname{int} S_1(p^1)\bigcap \operatorname{int} S_2(p^2)=\varnothing,$$

$$\operatorname{fr} S_1(p^1)\bigcap \operatorname{fr} S_2(p^2)\neq\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(p^1, p^2)<0, \text{ если } \operatorname{int} S_1(p^1)\bigcap \operatorname{int} S_2(p^2)\neq\varnothing.$$

Определение 8. Ф-функция называется нормализованной, если ее значения равны евклидовым расстояниям между объектами $S_1(p^1)$ и $S_2(p^2)$ при условии, что $(p^1, p^2)\in G,$ где $G=\{(p^1, p^2)\,|\operatorname{int} S_1(p^1)\cap \operatorname{int} S_2(p^2)=\varnothing\}$.

Для построения Ф-функций сложных геометрических объектов выделены классы базовых и составных 2D- и 3D- объектов. Базовыми объектами пространства R^2 являются круги, прямоугольники, правильные и выпуклые многоугольники, а также их замкнутые дополнения ко всему пространству R^2. Базовыми трехмерными объектами являются шары, прямые параллелепипеды, прямые круговые цилиндры, круговые конусы, выпуклые многогранники и замыкания дополнений этих объектов к пространству R^3. Подходы к конструктивному построению Ф-функций базовых 2D- и 3D-объектов освещены в [5–8]. При этом математическое моделирование отношений сложных геометрических объектов основывается на основе Ф-функций базовых объектов.

Исследование конфигураций пространственных объектов в общем случае требует обобщения понятия Ф-функции с учетом обобщенных переменных геометрических объектов. Рассмотрим геометрические объекты S_1, S_2, которые имеют обобщенные переменные $g^1=(\mu^1, p^1)$, $g^2=(\mu^2, p^2)$, где $\mu^1=(\mu_1^1, ..., \mu_{l_1}^1)$, $\mu^2=(\mu_1^2, ..., \mu_{l_2}^2)$, $p^1=(p_1^1, ..., p_\alpha^1)$, $p^2=(p_1^2, ..., p_\alpha^2)$. Сформируем конфигурационное пространство $\Xi(S_1)\times\Xi(S_2)$. Положим, что области определения метрических параметров μ^1 и μ^2 соответственно $D_1\subseteq R^{l_1}$ и $D_2\subseteq R^{l_2}$.

Определение 9. Непрерывную, определенную всюду на $R^{2\alpha}\times D_1\times D_2$ функцию $\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)$ назовем обобщенной Ф-функцией геометрических объектов S_1 и S_2 с обобщенными переменными $g^1=(\mu^1, p^1)$, $g^2=(\mu^2, p^2)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)>0, \text{ если } \operatorname{cl} S_1(\mathrm{g}^1)\bigcap \operatorname{cl} S_2(g^2)=\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)=0, \text{ если } \operatorname{int} S_1(g^1)\bigcap \operatorname{int} S_2(g^2)=\varnothing,$$

$$\operatorname{fr} S_1(g^1)\bigcap \operatorname{fr} S_2(g^2)\neq\varnothing,$$

$$\Phi^{S_1S_2}(g^1, g^2)<0, \text{ если } \operatorname{int} S_1(g^1)\bigcap \operatorname{int} S_2(g^2)\neq\varnothing.$$

Заметим, что в данном случае термин обобщенная функция не связан с ее классическим определением, а лишь подчеркивает обобщение введенного ранее понятия Φ-функции.

Определение 10. Обобщенную Φ-функцию назовем нормализованной, если ее значение при любых фиксированных метрических параметрах $\hat{\mu}^1 \in D_1$ и $\hat{\mu}^2 \in D_2$ равно евклидовому расстоянию между объектами $S_1(g^1)$ и $S_2(g^2)$ при условии, что $(g^1, g^2) \in \tilde{G}$, где $\tilde{G} = \{(g^1, g^2) | \mathrm{int}\, S_1(g^1) \cap \mathrm{int}\, S_2(g^2) = \varnothing\}$, $g^1 = (\hat{\mu}^1, p^1)$, $g^2 = (\hat{\mu}^2, p^2)$.

Анализ существующих методов построения Φ-функции базовых 2D- и 3D-объектов при фиксированных метрических параметрах позволяет сделать вывод о возможности естественного обобщения этих результатов на случай переменных метрических параметров.

Теория Φ-функций прежде всего эффективна для формализации ограничений при бинарных отношениях между геометрическими объектами. Действительно, условие непересечения геометрических объектов S_1 и S_2 с обобщенными переменными g^1 и g^2 задается неравенством

$$\Phi^{S_1 S_2}(g^1, g^2) > 0.$$

При ограничениях на минимально и максимально допустимые расстояния между объектами (соответственно $d_{12}^{\min}$ и $d_{12}^{\max}$) имеем $d_{12}^{\min} \le \Phi^{S_1 S_2}(g^1, g^2) \le d_{12}^{\max}$, где $\Phi^{S_1 S_2}$ — нормализованная обобщенная Φ-функция.

Однако применение Φ-функций для многоместных отношений сопряжено с большими вычислительными сложностями. В частности, речь идет о задачах покрытия. В этом случае предложим подход, основанный на вычислении меры (площади, объема) параметризованного сложного объекта заданной структуры. Такой подход изложен в [3] и использован при формализации условий размещения и покрытия для объектов заданной формы и фиксированных метрических характеристик.

Рассмотрим параметризованный сложный объект $S_B(g^1, ..., g^n)$ вида (6), структура которого задается выражением (5). Такой объект в конфигурационном пространстве $\Xi(\Omega)$ вида (4) имеет обобщенные переменные $g^1, ..., g^n$.

Определим функцию $\omega_B(g^1, ..., g^n)$, значения которой при всяком фиксированном наборе обобщенных переменных $(\hat{g}^1, ..., \hat{g}^n) \in \Xi(\Omega)$ равно объему (площади) сложного геометрического объекта $S_B(\hat{g}^1, ..., \hat{g}^n) = B(S_1(\hat{g}^1), ..., S_n(\hat{g}^n))$. Таким образом, установлена зависимость

$$\omega_B(g^1, ..., g^n) = \mu(S_B(g^1, ..., g^n)). \tag{8}$$

Определение 11. Функцию, определяемую выражением (8), назовем ω-функцией параметризованного объекта $S_B(g^1, ..., g^n)$.

Данный класс функций особенно удобен при формализации многоместных отношений геометрических объектов. Действительно, рассмотрим сложный параметризованный геометрический объект $S_{\hat{B}}$, структура которого задается выражением

$$S_{\hat{B}} = \hat{B}(S_0, S_1, ..., S_n) = S_0 \bigcap \left(\boldsymbol{c} \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right).$$

Тогда условие покрытия геометрического объекта S_0 совокупностью объектов $S_i, i \in J_n,$ можно задать равенством

$$\omega_{\hat{B}}(g^0, g^1, ..., g^n) = \mu(S_{\hat{B}}(g^0, g^1, ..., g^n)) = 0,$$

где $g^0, g^1, ..., g^n$ — обобщенные переменные конфигурационного пространства $\Xi(\Omega_0) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times ... \times \Xi(S_n),$ а параметризованный объект $S_{\hat{B}}(g^0, g^1, ..., g^n)$ имеет вид

$$S_{\hat{B}}(g^0, g^1, ..., g^n) = S_0(g^0) \bigcap \left(\boldsymbol{c} \bigcup_{i=1}^{n} S_i(g^i) \right).$$

С помощью ω-функций легко формализовать условия непересечения и включения для двух геометрических объектов: S_1 и S_2. Действительно, зададим структуру сложного объекта в виде $S_{B'} = B'(S_1, S_2) = S_1 \bigcap S_2$ и выберем обобщенные переменные g^1, g^2 конфигурационного пространства $\Xi(S_1) \times \Xi(S_2).$ Тогда условие непересечения внутренностей объектов S_1, S_2 задается равенством $\omega_{B'}(g^1, g^2) = 0.$ Если структуру сложного объекта записать

$$S_{B''} = B''(S_1, S_2) = S_1 \bigcap \boldsymbol{c} S_2,$$

то условие включения $S_1(g^1) \subset S_2(g^2)$ примет вид $\omega_{B''}(g^1, g^2) = 0.$

Интересная особенность вычисления ω-функций — возможность привлечения современных методов компьютерной математики, связанных с обработкой изображений. Действительно, всякой конфигурации при фиксированных значениях обобщенных переменных соответствует некоторое изображение. В свою очередь, попикселная обработка такого изображения при заданной структуре сложного объекта позволяет вычислять его основные характеристики, в частности площадь.

Заключение

Введение обобщенных переменных, порождающих соответствующие конфигурационные пространства, позволило значительно расширить область приложения существующих методов синтеза пространственных конфигураций геометрических объектов. Результаты статьи представляют интерес с точки зрения классификации таких конфигураций. В настоящее время существуют общепризнанные подходы к классификации задач упаковки и компоновки [30–32]. Предложенные подходы естественным образом интегрируются с помощью дополнительного учета обобщенных переменных и структуры пространственных конфигураций.

Обобщение понятия Ф-функций и новый класс ω-функций позволяют описывать ограничения, характерные для различных классов конфигураций, в частности упаковки, компоновки и покрытия. В ближайшей перспективе будут формализованы соответствующие аналитические зависимости для различных пространственных форм с учетом обобщенных переменных геометрических объектов.

Важнейшим направлением дальнейших исследований является оптимизация пространственных конфигураций в соответствии с заданными критериями качества. Это позволит предложить новые математические модели и оптимизационные методы синтеза пространственных конфигураций. Естественно, такие подходы должны базироваться как на выделении специальных классов геометрических объектов, так и на выборе их обобщенных переменных. При этом возникает необходимость формирования нормализованных обобщенных Ф-функций базовых 2D- и 3D-объектов. Рассмотрение метрических параметров объектов в качестве независимых переменных резко расширяет возможности приложения методов локальной и глобальной оптимизации применительно к решению задач синтеза пространственных конфигураций.

С.В. Яковлев

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ПРОСТОРОВИХ КОНФІГУРАЦІЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ЇХ ФОРМАЛІЗАЦІЮ

Розглянуто задачу синтезу просторових конфігурацій геометричних об'єктів. Введено конфігураційний простір, узагальненими змінними якого є метричні параметри і параметри розміщення об'єктів. Здійснено класифікацію просторових конфігурацій з урахуванням відношень на множині геометричних об'єктів і їх узагальнених змінних. Запропоновано способи формалізації обмежень в задачах упаковки, компоновки та покриття.

S.V. Yakovlev

ON SOME CLASSES OF SPATIAL CONFIGURATIONS OF GEOMETRIC OBJECTS AND THEIR FORMALIZATION

The problem of synthesis of spatial configurations of geometric objects is considered. A configuration space is introduced, the generalized variables of which are metric and placement parameters of objects. Typology of spatial configurations taking into account relations on the set of geometric objects and their generalized variables is proposed. Methods for formalizing constraints in packing, layout and covering problems are described.

1. *Стоян Ю.Г.* Размещения геометрических объектов. — Киев : Наук. думка, 1975. — 239 с.
2. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. — Киев : Наук. думка, 1976. — 247 с.
3. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев : Наук. думка, 1986. — 268 с.
4. *Stoyan Y.G.* Mathematical methods for geometric design // Advances in CAD/CAM. Proceedings of PROLAMAT82, Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2003.
5. *Stoyan Yu., Scheithauer G., Romanova T.* Mathematical modeling of interaction of primary geometric 3D objects // Cybernetics and Systems Analysis. — 2005. — **41**, N 3. — P. 332–342.
6. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2010. — **43**, N 5. — P. 535–553.
7. *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y. G., Romanova T.* Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Annals of Operations Research. — 2010. — **179**, N 1. — P. 343–368.
8. *Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical models of placement optimization: Two- and Three-dimensional problems and applications // Modeling and Optimization in Space Engineering. — 2013. — **73**. — P. 363–388.
9. *Fadell E., Neuwirth L.* Configuration space // Math. Scand. — 1962. — **10.** — P. 111–118.
10. *Edward R., Sufian F.,Husseini Y.* Geometry and topology of configuration spaces // Springer Monographs in Mathematics. — 2001. — 313 p.
11. *Westerland C.* Configuration spaces in geometry and topology // Australian Mathematical Society Gazette. — 2011. — **38**, N 5. — P. 279–283.
12. *Berge C.* Principes de combinatoire. — Paris : Dunod, 1968. — 146 p.
13. *Stoyan Y.G., Yakovlev S.V.* Configuration space of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. — 2018. — **54**. N 5. — P. 716–726.
14. *Korte B., Vygen J.* Combinatorial optimization: Theory and algorithms. — Heidelberg; New York : Springer, 2002. — 660 p.

15. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — Киев : Наук. думка, 2003. — 261 с.
16. *Яковлев С.В.* О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов // Доклады НАН Украины. — 2017. — № 9. — С. 63–68.
17. *Yakovlev S.V.* The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — **53**, N 5. — P. 725–731.
18. *Hulianytskyi L., Riasna I.* Formalization and classification of combinatorial optimization problems // Optimization Methods and Applications. — New York : Springer, 2017. — P. 239–250.
19. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С.* Евклидовы комбинаторные конфигурации. — Харьков : Константа, 2017. — 404 с.
20. *Yakovlev S.* Convex extensions in combinatorial optimization and their applications // Optimization Methods and Applications. — New York : Springer, 2017. — P. 567–584.
21. *Yakovlev S.V.* Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets // Cybernetics. — 1989. — **25**, N 3. — P. 385–391.
22. *Pichugina O.S., Yakovlev S.V.* Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — **52**, N 6. — P. 921–930.
23. *Yakovlev S.V., Pichugina O.S.* Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets // Ibid. — 2018. — **54**, N 1. — P. 99–109.
24. *Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V.* Quadratic optimization on combinatorial sets // Cybernetics and Systems Analysis. — 1991. — **27**, N 4. — P. 561–567.
25. *Pichugina O., Yakovlev S.* Optimization on polyhedral-spherical sets: theory and applications // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering(UKRCON). — 2017. — P. 1167–1175.
26. *Fasano G.* A modeling-based approach for non-standard packing problems // Optimized Packings with Applications. — New York : Springer, 2015. — **105**. — P. 67–85.
27. *Fasano, G.A.* Global optimization point of view for nonstandard packing problems // Journal of Global Optimization. — 2013. — **155**, N 2. — P. 279–299.
28. *Sriramya P., Parvatha B.V.* A state-of-the-art review of bin packing techniques // European Journal of Scientific Research. — 2012. — **86**, N 3. — P. 360–364.
29. *Hifi M., M'Hallah R.* A literature review on circle and sphere packing problems: Model and methodologies // Advances in Optimization Research. — 2009. — 22 p.
30. *Dyckhoff H.* A typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. — 1990. — **44**. — P. 145–159.
31. *Wascher G., Hausner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Ibid. — 2007. — 183. — P. 1109–1130.
32. *Bortfeldt* A., *Wascher G*. Constraints in container loading — A state-of-the-art review // Ibid. — 2013. — **229**, N 1. — P. 1–20.
33. *Drira A., Pierreval H., Hajri-Gabouj S.* Facility layout problems: a survey // Annual Reviews in Control. — 2007. — **31**, N 2. — P. 255–267.
34. *Fadel G.M., Wiecek M.M.* Packing optimization of free-form objects in engineering design. Optimized Packings with Applications. — New York : Springer, 2015. — **105**. — P. 37–66.
35. *Coggan J., Shimada K., Yin S.* A survey of computational approaches to three-dimensional layout problems // CAD Computer Aided Design. — 2002. — **34**, N 8. — P. 597–611.
36. *Sun, Z.-G. Teng, H.-F.* Optimal layout design of a satellite module // Engineering Optimization. — 2003. — **35**, N 5. — P. 513–529.
37. *Yi-Chun Xu, Ren-Bin Xiao, Amos M.* A novel genetic algorithm for the layout optimization problem // In 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2007). — 2007. — P. 3938–3942.
38. *Kovalenko A.A., Romanova T.E., Stetsyuk P.I.* Balance layout problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — **51**, N 4. — P. 556–565.
39. *Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V.* Method of balancing rotating discretely distributed masses // Energomashinostroenie. — 1982. — № 2. — P. 4–5.
40. *Tian T., Zhu W., Lim A., Wei L.* The multiple container loading problem with preference // European Journal of Operational Research. — 2016. — **248**, N 1. — P. 84–94.
41. *Stoyan Yu.G., Semkin V.V., Chugay A.M.* Optimization of 3D `bjects layout into a multiply connected domain with account for shortest distances // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — **150**, N 3. — P. 374–385.
42. *Bennell J.A., Oliveira J.F.* The geometry of nesting problems: a tutorial // European Journal of Operational Research. — 2008. — **184**, N 2. — P. 397–415.
43. *Litvinchev I., Infante L., Ozuna L.* Approximate packing: integer programming models, valid inequalities and nesting // Optimized Packings with Applications. — New York : Springer, 2015. — **105**. — P. 187–205.
44. *Stoyan Y.G., Patsuk V.M.* Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres // International Journal of Computer Mathematics. — 2014. — **91**, N 9. — P. 2010–2020.
45. *Yakovlev S.V.* On a class of problems on covering of a bounded set // Acta Mathematica Hungarica. — 1989. — **53**, N 3. — P. 253–262.
46. *Gerasin S.N., Shlyakhov V.V., Yakovlev S.V.* Set coverings and tolerance relations // Cybernetics and Systems Analysis. — 2008. — **43**, N 3. — P. 333–340.

47. *Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V.* Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems // Автоматика и телемеханика. — 1989. — N 5. — P. 160–168.
48. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С.* Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные и динамические задачи. — Киев : Наук. думка, 2013. — 604 с.
49. *Kiseleva E.M., Koriashkina, L.S.* Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — **51**, N 4. — P. 489–499.

Получено 02.05.2018