УДК 517.9

В.Г. Бондаренко

МЕТОД КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Эволюция объектов с сосредоточенными параметрами в ряде случаев описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) $\frac{dr}{dt} = f(r)$, где решение — векторная функция $r(t) = (r_1(t), ..., r_N(t))$ является характеристикой объекта. Примерами таких объектов выступают технические, биологические и другие системы. Пусть $r(t, a)$ — решение задачи Коши:

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \;\; r(0, a) = a, \;\; r(t,a) = G_t a, \tag{1}$$

G_t — фазовый поток.

Характеристикой объекта с распределенными параметрами является векторная функция $u(t, x) = (u_1(t, x), ..., u_N(t, x))$, где x — пространственная переменная, $x \in R^d$.

Постулируется (строгое обоснование, как правило, отсутствует), что переход от сосредоточенных к распределенным параметрам приводит к математической модели в виде системы полулинейных параболических уравнений (система реакция–диффузия):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u), \;\; u = (u_1, ..., u_N), \;\; u(0, x) = \varphi(x), \;\; x \in R^d, \tag{2}$$

где L_i — эллиптический оператор второго порядка:

$$L_i = \sum_{j.k} a_{i,jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_{i,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

с гладкими коэффициентами, а матрицы $A_i(x) = \left\| a_{i,jk}(x) \right\|$ удовлетворяют неравенствам $A_i(x) \ge \lambda I$, $\lambda > 0$, $i = 1, ..., N$. Приведенные условия гарантируют существование фундаментального решения $p(t, x, y) = (p_1(t, x, y), ..., p_N(t, x, y))$ соответствующей линейной системы:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = L_i q_i,$$

$$q_i(t,x) = (e^{tL_i} q_i(0,\cdot))(x) \equiv \int q_i(0,y) p_i(t,x,y)\, dy. \qquad (3)$$

Иначе введение пространственной переменной в системе (2) учитывается диффузионным слагаемым $Lu.$ Классический пример применения модели (2) — плотность популяций биологических особей с учетом их движения в ареале [1, 2]. Численное решение задачи Коши (2) выполнено для некоторых вариантов функции f: результат — некоторые свойства решений соответствующей системы (1) сохраняются (например, наличие предельных циклов).

Объектом исследования данной работы являются свойства функции $u(t,x)$ решения — задачи Коши (2). Слагаемое $f(u)$ назовем возмущением линейной системы (3). Некоторые свойства систем (2) рассмотрены в работах [3–5].

Введем обозначения для композиции решений задач (1), (3):

$$v(t,x) = r(t, q(t,x)) = G_t q(t,x), \quad w(t,x) = \int r(t, \varphi(y))\, p(t,x,y)\, dy.$$

Функция f предполагается гладкой и ограниченной (точные условия приведены ниже). Отсюда следует существование, единственность и ограниченность классического решения задачи Коши (2), т.е. для $t \in (0; T_0]$ функции $u_j(t,x)$ обладают непрерывными производными $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k}$, $q(t,x) \in D$, $u(t,x) \in D$, $r(t) \in D$, где $D \in R^N$, $\operatorname{diam}(D) < K$.

Цель работы — установить зависимость между $u(t,x)$, $v(t,x)$, $w(t,x)$. Мотивацию поставленной задачи можно объяснить следующим. В работах [6, 7] исследована пространственно-временная динамика водного сообщества в терминах двухвидовой системы «хищник–жертва» (зоопланктон–фитопланктон). Пусть $u_1(t,x,y)$, $u_2(t,x,y)$ — плотность фитопланктона и зоопланктона соответственно. Предполагается, что система описывается математической моделью:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \Delta u_1 + u_1(1-u_1) - \frac{u_1}{u_1+h} u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \Delta u_2 + k \frac{u_1}{u_1+h} u_2 - m u_2,$$

полученной из соответствующей системы ОДУ Лотки–Вольтерра. В результате численного эксперимента установлено, что решение $\{u_1, u_2\}$ образует некоторую пространственную структуру. Но такому же свойству удовлетворяет композиция v, также претендующая на роль модели.

В частности, рассмотрена следующая задача теории возмущений.

Пусть A, B, $A+B$ — генераторы сжимающих C_0-полугрупп e^{tA}, e^{tB}, $e^{t(A+B)}$ в некотором банаховом пространстве. В работах [8, 9] (при различных условиях и разными методами) доказана формула, устанавливающая связь между введенными полугруппами. В [10] эта формула представлена в следующем виде:

$$e^{T(A+B)} = s - \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{T}{n}A} e^{\frac{T}{n}B} \right)^n, \qquad (4)$$

где $\left(\dfrac{T}{n}, \dots \dfrac{kT}{n}, \dots T\right)$ — разбиение отрезка $[0; T]$, $T > 0$. В дальнейшем (4) будем называть формулой Троттера–Далецкого.

 ISSN 0572-2691

Задача — обобщить этот результат для нелинейного возмущения f оператора $L=(L_1,...,L_N)$, т.е. для полулинейного уравнения (2). Обозначим $H(t)$ нелинейную полугруппу, порожденную генератором $L+f$,

$$(H(t)\varphi)(x)=u(t,x).$$

При некоторых условиях для функции f доказывается аналог формулы Троттера–Далецкого:

$$H(T)=s-\lim_n\left(G_{\frac{T}{n}}e^{\frac{T}{n}L}\right)^n,$$

где сходимость имеет место в норме пространства $C(R^d)$.

Замечание 1. В [11, с. 307–315] нелинейная формула Троттера–Далецкого для $A_i(x)=A=\mathrm{const}$ доказана в следующей версии. Для последовательности $\psi_n(T,\cdot)=\left(e^{\frac{T}{n}L}G_{\frac{T}{n}}\right)^n\varphi$ получена оценка $\|\psi_n(T,\cdot)-u(T,\cdot)\|_V\le C\|\varphi\|_V n^{-\delta}$, где V — некоторое банахово пространство; приведен ряд примеров, $V\ne C(R^d)$, и сходимость $\psi_n(T,\cdot)$ требует дополнительных условий на начальную функцию.

В настоящей работе задача (1) рассмотрена для скалярного уравнения и для системы. В скалярном случае при условии выпуклости функции f доказывается, что $v(t,x)$ и $w(t,x)$ являются суб- и суперрешениями.

2. Скалярное уравнение

Для одномерной задачи Коши $(N=1)$ запишем уравнение в бескоординатной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{tr}\,A(x)\nabla^2u+(b(x),\nabla u)+f(u),$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad t>0, \tag{5}$$

$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1};...\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, коэффициенты $A(x)$, $b(x)$ — ограниченные и гладкие функции.

Изучим свойства решения задачи Коши (5), предполагая, что функция f сохраняет постоянный знак на области значений $u(t,x)$, ограничена на этой области и удовлетворяет некоторым условиям гладкости.

Полагая $\Phi(z)=\int_\delta^z f(s)\,ds$, где выбор числа δ гарантирует сходимость интеграла, получаем явное представление:

$$r(t,a)=\Phi^{-1}(t+\Phi(a)). \tag{6}$$

Доказанные ниже соотношения базируются на следующей теореме сравнения [12]. Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ — решения задачи Коши:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=Lu_1+f(u_1)+m(t,x),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = Lu_2 + f(u_2), \quad t > 0, \quad x \in R^d,$$

$$u_1(0, x) \ge u_2(0, x), \quad m(t, x) \ge 0, \quad u_k(t, x) \in D.$$

Если

$$\left| f'(z) \right| \le M, \quad z \in D, \tag{7}$$

то имеют место неравенства:

• оценка снизу:

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) \ge e^{-Mt} \int (u_1(0, y) - u_2(0, y))\, p(t, x, y)\, dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int e^{-M(t-\tau)} m(\tau, y)\, p(t-\tau, x, y)\, dy;$$

• оценка сверху:

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) \le e^{Mt} \int (u_1(0, y) - u_2(0, y))\, p(t, x, y)\, dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int e^{M(t-\tau)} m(\tau, y)\, p(t-\tau, x, y)\, dy. \tag{8}$$

Определим невязки для функций $v(t, x)$, $w(t, x)$:

$$m = \frac{\partial v}{\partial t} - Lv - f(v), \quad \mu = \frac{\partial w}{\partial t} - Lw - f(w).$$

Лемма 1. Невязки $m(t, x)$, $\mu(t, x)$ задаются равенствами

$$m = \frac{f(v)}{f^2(q)} (A(x)\nabla q, \nabla q)(f'(q) - f'(v)),$$

$$\mu = \int f(r(t, \varphi(y)))\, p(t, x, y)\, dy - f(w(t, x)).$$

Если выполнено условие (7) и $\left| f''(z) \right| \le M_1$, $z \in D$, то невязка m удовлетворяет оценке

$$\left| m(t, x) \right| \le cM_1 t e^{2Mt} \left| \nabla q(t, x) \right|^2, \quad c = \sup \left\| A(x) \right\|.$$

Доказательство основано на представлении (6).

Следствие 1. Пусть в задаче (5) начальное условие $\varphi(x) \ge 0$, функция f удовлетворяет условию (7) и выпукла вниз на D. Тогда справедливо неравенство

$$v(t, x) \le u(t, x) \le w(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^d.$$

Для функции f, выпуклой вверх, имеет место противоположное неравенство:

$$w(t, x) \le u(t, x) \le v(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^d.$$

Доказательство. Пусть f выпукла вверх. Для $f(u) > 0$ справедливо неравенство $v(t, x) \ge q(t, x)$, и в силу убывания производной f' невязка $m \ge 0$; неположительность невязки μ следует из неравенства Йенсена. Аналогично рассматриваются варианты $f(u) < 0$, а также выпуклость f вниз. ■

Пример. Для задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \sqrt{u}$, $u(0, x) = \varphi(x) \ge 0$, справедливо неравенство

$$\int \left(\frac{t}{2} + \sqrt{\varphi(y)}\right)^2 p(t, x, y)\, dy \le u(t, x) \le \left(\frac{t}{2} + \sqrt{q(t, x)}\right)^2.$$

Замечание 2. Приведенные неравенства доказаны в работе [13] при других условиях. ■

Следствие 2. Если производная $\nabla q(t, x)$ ограничена, то $|m(t, x)| \le Cte^{2Mt}$. ■

При обобщении формулы Троттера–Далецкого для нелинейного скалярного возмущения f оператора L, т.е. для полулинейного уравнения (5) преобразуем выражение $\left(G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L}\right)^n$. Построим последовательности функций $\left(0 \le t \le \frac{T}{n}\right)$:

$$q_0(t, x) = \int \varphi(y) p(t, x, y)\, dy, \;\; v_1(t, x) = r(t, q_0(t, x));$$

$$q_1(t, x) = \int v_1\left(\frac{T}{n}, y\right) p(t, x, y)\, dy, \;\; v_2\left(t + \frac{T}{n}, x\right) = r(t, q_1(t, x));$$

$$q_k(t, x) = \int v_k\left(k\frac{T}{n}, y\right) p(t, x, y)\, dy, \;\; v_{k+1}\left(t + k\frac{T}{n}, x\right) = r(t, q_k(t, x)), \;\; 0 \le k \le n-1.$$

В терминах эволюционных операторов построенную последовательность можно записать в виде

$$v_{k+1}\left(t + \frac{kT}{n}\right) = G_t e^{tL} v_k\left(\frac{kT}{n}\right).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Если производные $|\nabla q_k(t, x)| < c_1$, то последовательность $v_n(T, x) \to u(T, x)$, $n \to \infty$, равномерно по $x \in R^d$.

Доказательство. Обозначим

$$s = t + k\frac{T}{n}; \;\; \Delta_k = \left[k\frac{T}{n}; (k+1)\frac{T}{n}\right].$$

Для разности $h_{k+1}(t, x) = v_{k+1}(s, x) - u(s, x)$, $s \in \Delta_k$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial h_{k+1}^2}{\partial t} < L h_{k+1}^2 + (2M+1) h_{k+1}^2 + m_k^2(t, x)$$

и оценка (8) принимает вид:

$$h_{k+1}^2(t, x) < e^{(2M+1)t} \int h_{k+1}^2(0, y)\, p(t, x, y)\, dy + \int_0^t d\tau \int e^{(2M+1)(t-\tau)} m_k^2(t, y) p(t-\tau, x, y)\, dy.$$

По лемме 1 и условию теоремы 1 $m_k^2(t, x) \le c M_1^2 t^2 e^{4Mt} |\nabla q_k(t, x)|^4 \le C t^2 e^{4Mt}$, отсюда $h_{k+1}^2(t, x) \le e^{(2M+1)t} \int h_{k+1}^2(0, y) p(t, x, y)\, dy + C_1 t^3 e^{4Mt}$.

Для $s = t \in \Delta_0$, $h_1(0, x) = 0$, $h_1^2(t, x) \le C_1 t^3 e^{4Mt}$, т.е. начальное условие для интервала Δ_1 удовлетворяет оценке $h_2^2(0, x) \le C_1 \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{4M\frac{T}{n}}$.

Итерируя это неравенство, приходим к оценке $h_{k+1}^2\left(\frac{T}{n}, x\right) < (k+1)C_1 \times \times \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{(2kM+4M+k)\frac{T}{n}}$, т.е.

$$h_n^2\left(\frac{T}{n}, x\right) = (v_n(T,x) - u(T,x))^2 < \frac{n+1}{n^3} C_2 T^3 \to 0, \ \ n \to \infty. \ \blacksquare$$

Если в операторе $L = \mathrm{tr}(A\nabla^2)$ A не зависит от x, то достаточное условие неравенства $|\nabla q_k(t,x)| < c_1$ можно сформулировать в терминах начальной функции $\varphi(x)$.

Утверждение. Производные функций $q_k(t,x)$ удовлетворяют неравенству

$$|\nabla q_k(t,x)| < e^{MT} \sqrt{\int |\nabla \varphi(y)|^2 p(t,x,y)\,dy}, \ \ t \le T.$$

Доказательство. Функция $q(t,x) = \int q(0,y) p(t,x,y)\,dy$ является решением задачи Коши для уравнения $\frac{\partial q}{\partial t} = Lq$. Заметим, что функция $z(t,x) = (\nabla q(t,x) h)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial}{\partial t}(z^2) = \mathrm{tr}(A\nabla^2 z^2) - 2(A\nabla z, \nabla z)$, откуда следует неравенство $\frac{\partial}{\partial t}|\nabla q(t,x)|^2 < \mathrm{tr}(A\nabla^2 |\nabla q(t,x)|^2)$, т.е. $|\nabla q(t,x)|^2 < \int |\nabla q(0,y)|^2 p(t,x,y)\,dy$.

Для введенной последовательности функций

$$q_k(t,x) = \int r\left(\frac{T}{n}, q_{k-1}\left(\frac{T}{n}, y\right)\right) p(t,x,y)\,dy, \ \ q_k(0,x) = r\left(\frac{T}{n}, q_{k-1}\left(\frac{T}{n}, x\right)\right)$$

по лемме 1 имеет место оценка

$$|\nabla q_k(0,x)| = \left|\frac{\partial r}{\partial a}\left(\frac{T}{n}, q_{k-1}\left(\frac{T}{n}, x\right)\right) \nabla q_{k-1}\left(\frac{T}{n}, x\right)\right| \le e^{M\frac{T}{n}} \left|\nabla q_{k-1}\left(\frac{T}{n}, x\right)\right|. \qquad (9)$$

Поскольку $q_0(0,x) = \varphi(x)$, то

$$\left|\nabla q_0\left(\frac{T}{n}, x\right)\right| < \sqrt{\int |\nabla \varphi(y)|^2 p(t,x,y)\,dy} = \varphi_0.$$

Итерируя неравенство (9), приходим к оценке $|\nabla q_k(0,x)| < e^{M\frac{kT}{n}} \varphi_0 < e^{MT} \varphi_0$, откуда

$$|\nabla q_k(t,x)| < \sqrt{\int |\nabla q_k(0,x)|^2 p(t,x,y)\,dy} < e^{MT} \varphi_0 = c_1. \ \blacksquare$$

Следствие (уточнение области определения операторов в теореме 1). Если начальная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству $\int |\nabla \varphi(y)|^2 p(t,x,y)\,dy < C_\varphi$, $t \le T$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L} \right) \varphi - H(T)\varphi \right\| = 0, \ \ \|\bullet\| \text{ — норма в } C(R^d).$$

 ISSN 0572-2691

3. Система уравнений

Рассмотрим частный случай системы (1):

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \Delta u_j + f_j(u), \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in R^d, \tag{10}$$

и обозначим $u(t, x) = (u_1(t, x), ..., u_N(t, x))$ классическое решение задачи Коши этой системы. Фундаментальная матрица решений невозмущенной линейной системы имеет вид

$$p(t, x, y) = p(t, x, y)I, \quad p(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}.$$

Условия на функцию $f : f \in C^2$ и ее производные удовлетворяют оценкам

$$\sigma_2(f'(\xi)) < M, \quad \left|f''(\xi)bc\right| = \left|\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(\xi) b_j c_k\right| \le M_1 |b| \cdot |c|, \tag{11}$$

где σ_2 — операторная норма Гильберта–Шмидта.

Пусть $q(t, x) = (q_1(t, x), ..., q_N(t, x))$ удовлетворяет системе $\frac{\partial q_j}{\partial t} = \Delta q_j$ с начальными условиями $q(0, x)$. Тогда функция $v(t, x) = r(t, q(t, x))$ является решением задачи Коши для системы

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \Delta v_j + f_j(v) + m_j(t, x), \quad v(0, x) = q(0, x),$$

где координаты $m_j(t, x)$ невязки

$$m_j(t, x) = \frac{\partial v_j}{\partial t} - \Delta v_j - f_j(v) =$$

$$= -\sum_{i,s,l} \frac{\partial q_s}{\partial x_i} \frac{\partial^2 r_j}{\partial a_l \partial a_s} \frac{\partial q_l}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{d} r_j''(t, q)(\nabla_i q)(\nabla_i q), \quad q = q(t, x).$$

Из этого представления при выполнении условия (11) следует оценка $|m(t, x)|^2 = \sum_{j=1}^{N} (m_j(t, x))^2 < dM_1^2 t^2 e^{4Mt} \sum_{i=1}^{d} |\nabla_i q(t, x)|^4$. Положим $h(t, x) = v(t, x) - u(t + t_0, x)$, $\alpha = |h|^2$. Как и в утверждении 1, функцию α можно оценить через начальное условие.

Лемма 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) производные начальной функции $q(0, x)$ удовлетворяют оценке

$$\int |\nabla_i q(0, y)|^2 p(t, x, y)\, dy < c_3, \quad t \le t_1;$$

2) $\alpha(0, x) = |q(0, x) - u(t_0, x)|^2 \le \bar{\alpha}$.

Тогда для $t \le t_1$ справедливо неравенство

$$\alpha(t, x) \le \bar{\alpha} e^{c_2 t} + \frac{1}{3}(dc_3 M_1)^2 t^3 e^{c_2 t}, \text{ где } c_2 = 2MN + 1.$$

Доказательство. Из представления

$$f_j(v) - f_j(u) = \sum_{s=1}^{N} \int_{u_s}^{v_s} \frac{\partial}{\partial \xi_s} f_j(u_1, ..., \xi_s, v_{s+1}, ..., v_k)\, d\xi_s$$

следует, что разность $h(t, x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \Delta h_j + \sum_{s=1}^{k} \phi_{js} h_s + m_j(t, x), \quad \left|\phi_{js}\right| < M,$$

отсюда следует неравенство для функции α:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha < \Delta\alpha + c_2\alpha + \left|m(t, x)\right|^2.$$

По теореме сравнения для $\alpha(t, x)$ справедлива оценка

$$\alpha(t, x) < \bar{\alpha} e^{c_2 t} + \int_0^t d\tau \int e^{c_2(t-\tau)} \left|m(\tau, y\right|^2 p(t-\tau, x, y)\, dy. \tag{12}$$

Как и в скалярном случае, доказывается оценка для невязки $\left|m(t, x)\right|^2 \leq$ $\leq (dc_3 M_1)^2 t^2 e^{4Mt}$ и из (12) следует неравенство

$$\alpha(t, x) < \bar{\alpha} e^{c_2(s-t_0)} + (dc_3 M_1)^2 \times \int_0^t \tau^2 \exp\{c_2(t-\tau) + 4M\tau\}\, d\tau <$$

$$< \bar{\alpha} e^{c_2 t} + \frac{1}{3}(dc_3 M_1)^2 t^3 e^{c_2 t}. \blacksquare$$

Аналогично скалярному случаю построим последовательность функций $v_k(t, x)$, определенных для $t \in \left[0; \frac{T}{n}\right]$:

$$q_0(t, x) = \int \varphi(y) p(t, x, y)\, dy, \quad v_1(t, x) = r(t, q_0(t, x));$$

$$q_k(t, x) = \int v_k\left(k\frac{T}{n}, y\right) p(t, x, y)\, dy, \quad v_{k+1}(t, x) = r(t, q_k(t, x)),$$

$$k = 0, \ldots, n-1; \quad v_k\left(\frac{T}{n}, x\right) = v_{k+1}(0, x) = q_k(0, x);$$

$$h(s, x) = v_{k+1}\left(s - k\frac{T}{n}, x\right) - u(s, x), \quad s \in \Delta_k = \left[k\frac{T}{n}; (k+1)\frac{T}{n}\right];$$

$\alpha(s, x) = \left|h(s, x)\right|^2$, где $u(s, x)$ — решение задачи Коши (10), $t = s - k\frac{T}{n}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (11) и $\int (\nabla_i \varphi(y))^2 p(t, x, y)\, dy < c_4$. Тогда справедливо неравенство $\alpha(T, x) < C\frac{T^3}{n^2}$, т.е. $\sup_x \left|v_n(T, x) - u(T, x)\right| \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 1. На каждом интервале Δ_k по лемме 2 функция $\alpha(s, x)$ удовлетворяет неравенству (12) для $t_0 = \frac{kT}{n}$:

$$\alpha(s, x) \leq \bar{\alpha}_k e^{c_2\left(s - \frac{kT}{n}\right)} + \frac{1}{3}(dc_{3k} M_1)^2 \left(s - \frac{kT}{n}\right)^3 e^{c_2\left(s - \frac{kT}{n}\right)},$$

 ISSN 0572-2691

где

$$\int \left|\nabla_i q_k(0, y)\right|^2 p(t, x, y)\, dy < c_{3k}, \;\; t \le \frac{T}{n}, \;\; \left| q_k(0, x) - u\left(\frac{kT}{n}, x\right)\right|^2 \le \bar{\alpha}_k .$$

Отсюда следует оценка

$$\alpha\left(\frac{k+1}{n}T, x\right) \le \frac{2}{3}(k+1)(dc_4 e^{MT} M_1)^2 \left(\frac{T}{n}\right)^3 e^{(k+1)c_2 \frac{T}{n}}$$

и для $k = n-1$ получаем утверждение теоремы: $\alpha(T, x) \le C\dfrac{T^3}{n^2}$. ■

В.Г. Бондаренко

МЕТОД КОМПОЗИЦІЇ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Обгрунтовано метод розв’язування задачі Коші для систем рівнянь типу реакція–дифузія, що являє собою нелінійну версію формули Троттера–Далецького. Запропонований метод композиції сприяє вибору адекватної математичної моделі для об’єкта із розподіленими параметрами.

V.G. Bondarenko

METHOD OF COMPOSITION FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

The method for a solution of reaction-diffusion equations, which is representing a nonlinear version of formula Trotter–Daletski, has been justified. The proposed method of composition contributes to the selection of an adequate mathematical model for an object with distributed parameters.

1. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М. : Наука, 1987. — 368 с.
2. *Murray J.D.* Mathematical Biology. — New York: Springer-Verlag, 2002. — **1**. — 551 p.; — **2**. — 811 p.
3. *Conway E., Smoller J.* A comparison technique for systems of reaction–diffusion equations // Communications in Partial Differential Equations. — 1977. — **2**(7). — P. 679–697.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М. : Мир, 1985. — 376 с.
5. *Amann H.* Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems // Differential Integral Equations. — 1990. — **3**, N 1. — P. 13–75.
6. *Формирование* пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы / А.Б. Медвинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова, Д.А. Тихонов и др. // Успехи физических наук. — 2002. — **172**, № 1. — С. 31–66.
7. *Spatiotemporal* complexity of plankton and fish dynamics / A.B. Medvinsky, S.V. Petrovskii, I.A. Tikhonova, H. Malchow // SIAM Review. — 2002. — **44**, N 3. — P. 311–370.
8. *Trotter T.F.* Of the Product of Semi-Groups of Operators // Pros. Am. Math. Soc. — 1959. — **10**. — P. 545–551.
9. *Далецкий Ю.Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи математических наук. — 1962. — **17**, № 5. — С. 3–115.
10. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев : Вища шк., 1989. — 347с.
11. *Taylor M.E.* Partial Differential Equations III. — New York : Springer–Verlag, 1997. — 610 p.
12. *Aronson D.G., Weinberger H.F.* Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population // Advances Mathematics. — 1978. — **30**.— P. 33–76.
13. *Бондаренко В.Г., Прокопенко Ю.Ю.* Барьерные функции для одного класса полулинейных параболических уравнений // Укр. мат. журнал. — 2008. — **60**, № 11. — С. 1449–1456.

Получено 09.02.2018