УДК 517.988

В.В. Семенов

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С РАСХОЖДЕНИЕМ БРЭГМАНА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ*

Введение

Множество интересных и актуальных задач исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств [1]. Особенно популярны сейчас вариационные неравенства в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр [1]. Наиболее известным аналогом метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [2]. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [3–11]. В частности, предлагались модификации алгоритма Г.М. Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [8–11]. В так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах [8–11] и алгоритме Г.М. Корпелевич первые этапы итерации совпадают, а далее для получения следующего приближения вместо проектирования на допустимое множество осуществляют проектирование на некоторое опорное для допустимого множества полупространство. Во всех упомянутых методах используются евклидовы расстояние и проекция. Иногда это не позволяет эффективно учесть структуру допустимых множеств и эффективно решать задачи. Возможный выход из ситуации состоит в более гибком подборе расстояния для осуществления проектирования на допустимое множество. Одной из первых успешных реализаций этой стратегии является работа Л.М. Брэгмана [12], где предложен метод типа циклического проектирования для нахождения общей точки выпуклых множеств. Эта работа открыла целое направление в математическом программировании и нелинейном анализе. В конце 1970-х годов советские математики А.С. Немировский и Д.Б. Юдин для решения выпуклых задач оптимизации предложили метод зеркального спуска. С тех пор метод получил широкое распространение для решения задач больших размерностей. В случае задач с ограничениями этот метод можно интерпретировать как вариант метода проекции субградиента, когда проектирование понимается в смысле расхождения Брэгмана [13]. Метод зеркального спуска позволяет эффективно учиты-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

вать структуру допустимого множества задачи оптимизации. Например, для симплекса в качестве расстояния можно взять расхождение Кульбака–Лейблера (расхождение Брэгмана, построенное по отрицательной энтропии) и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс [13]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [14]. Подобные методы подробно исследовались A. Auslender и M. Teboulle в [15]. Также интересный метод двойственной экстраполяции для решения вариационных неравенств предложил Ю.Е. Нестеров [16]. В недавних работах [17, 18] исследовался двухэтапный проксимальный зеркальный метод, являющийся модификацией двухэтапного проксимального алгоритма [7] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния.

Настоящая работа посвящена изучению нового метода экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма [8, 9] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. К предлагаемой схеме можно прийти и путем замены допустимого множества на специальные опорные для него полупространства во втором этапе проксимального зеркального метода А.С. Немировского [14]. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены неасимптотические оценки эффективности метода.

1. Постановка задачи и описание алгоритма

Всюду далее речь идет о конечномерном действительном линейном пространстве, обозначаемом E. Это пространство снабдим нормой $\|\cdot\|$ (не обязательно евклидовой). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ значение линейной функции a в точке b обозначим (a, b). Двойственную норму $\|\cdot\|_*$ на E^* определяем стандартным способом: $\|a\|_* = \max\{(a, b): \|b\| = 1\}$, обеспечивающим выполнение неравенства Шварца: $(a, b) \le \|a\|_* \|b\|$ для всех $a \in E^*$, $b \in E$. Наиболее важным является случай $E = E^* = \mathrm{R}^m$ с $(a, b) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$, a, $b \in \mathrm{R}^m$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \ge 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;
- множество S не пусто.

Замечание 1. Напомним, что псевдомонотонность оператора A на множестве C заключается в том, что для всех x, $y \in C$ из $(Ax, y - x) \ge 0$ следует $(Ay, y - x) \ge 0$.

 ISSN 0572-2691

Рассмотрим дуальное вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ay, x - y) \le 0 \ \ \forall y \in C. \tag{2}$$

Множество решений (2) обозначим S^d. Заметим, что множество S^d выпуклое и замкнутое. Неравенство (2) иногда называют слабой или дуальной постановкой (1), а решения (2) — слабыми решениями (1) [1]. Действительно, при псевдомонотонности оператора A имеем $S \subseteq S^d$. В наших же условиях — $S^d = S$ [1].

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi : E \to \overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям [19]:

- $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ — непустое выпуклое множество;
- φ — непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;
- если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_* \to +\infty$;
- φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) + \frac{\sigma}{2}\|a - b\|^2 \ \ \forall a \in \operatorname{dom}\varphi, \ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 2. Такие функции принято называть функциями, порождающими расстояние (distance generating functions).

Соответствующие функции φ расхождения Брэгмана задается формулой [19]

$$V(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) \ \ \forall a \in \operatorname{dom}\varphi, \ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 3. Иногда расхождение Брэгмана называют расстоянием [13, 14, 20], но это профессиональный жаргон: из аксиом метрики для V в общем случае выполняется только $V(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$.

Рассмотрим два основных примера. При $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, имеем $V(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2$. Для неотрицательного ортанта $\mathrm{R}_+^m = \{x \in \mathrm{R}^m : \ x_i \ge 0\}$ и функции отрицательной энтропии $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} (x_i \ln x_i - x_i)$ (она сильно выпукла с константой 1 относительно ℓ_1-нормы на симплексе $S_m = \{x \in \mathrm{R}^m : \ x_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$) получаем расхождение (расстояние) Кульбака–Лейблера:

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^{m} (x_i \ln(x_i / y_i) - x_i + y_i), \ \ x \in \mathrm{R}_+^m, \ \ y \in \mathrm{R}_{++}^m = \operatorname{int}(\mathrm{R}_+^m).$$

Имеет место полезное трехточечное тождество [13, 19]:

$$V(a, c) = V(a, b) + V(b, c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), \ a - b). \tag{3}$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a, b) \ge \frac{\sigma}{2}\|a - b\|^2 \ \ \forall a \in \operatorname{dom}\varphi, \ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{4}$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom}\varphi$ — непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ne \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \operatorname{argmin}_{y \in K}\{-(a, y - x) + V(y, x)\} \ \ \forall a \in E^*, \ x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{5}$$

Известно [14, 19], что задача (5) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, причем

$$-(a, y-z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y-z) \ge 0 \quad \forall y \in K . \tag{6}$$

Точка $P_x^K(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией

$$P_K(x+a) = \operatorname{argmin}_{y \in K} \| y - (x+a) \|_2 .$$

Для симплекса $S_m = \{x \in \mathrm{R}^m : \ x_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ и расхождения Кульбака–Лейблера имеем [13, 19]

$$P_x^{S_m}(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ldots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \ a \in \mathrm{R}^m, \ x \in \operatorname{ri}(S_m) .$$

Для необходимого нам в дальнейшем случая полупространства $H_{\le}(b, \beta) = \{y : (b, y) \le \beta\}$, где $b \in E^* \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathrm{R}$, имеем [20]

$$P_x^{H_{\le}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a) ,$$

если $(\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a) \in H_{\le}(b, \beta)$, иначе $P_x^{H_{\le}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a - \tau \cdot b)$, где $\tau = \operatorname{argmin}_{t>0} \varphi^*(\nabla\varphi(x) + a - t \cdot b) + t\beta$, φ^* — сопряженная к φ функция, т.е.

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \operatorname{dom} \varphi}((y, x) - \varphi(x)) .$$

Опишем предлагаемый алгоритм для решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1

Выбираем элемент $x_1 \in E$ и последовательность положительных чисел (λ_n). Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$.

Шаг 2. Если $y_n = x_n$, то СТОП, иначе вычислить $x_{n+1} = P_{x_n}^{T_n}(-\lambda_n A y_n)$, где

$$T_n = \{z \in E : \ (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A x_n - \nabla\varphi(y_n), \ z - y_n) \le 0\} .$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 4. Имеем $C \subseteq T_n$. Действительно, если предположить существование точки $w \in C \setminus T_n$, то неравенство $(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A x_n - \nabla\varphi(y_n), \ w - y_n) > 0$ противоречит равенству $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$.

Замечание 5. Если $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид субградиентного экстраградиентного метода [8, 9]:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, \ z - y_n) \le 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n). \end{cases}$$

Замечание 6. Положительные множители λ_n можно выбрать стационарными в заданных пределах или использовать на каждой итерации процедуры типа линейного поиска [3, 10, 11]. Последний вариант в данной статье не рассматривается.

Лемма 1. Если для некоторого $n \in \mathrm{N}$ в алгоритме 1 имеем $y_n = x_n$, то $x_n \in S$.

Доказательство. Действительно, равенство $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$ означает

$$(Ax_n,\, y - y_n) + \frac{(\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n),\, y - y_n)}{\lambda_n} \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

а из равенства $y_n = x_n$ следует

$$(Ax_n,\, y - x_n) \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

т.е. $x_n \in S$. ■

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathrm{N}$ условие $y_n = x_n$ не имеет места и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

2. Основное неравенство

Вначале докажем важную оценку, связывающую расхождения Брэгмана между порожденной алгоритмом 1 точкой x_n и произвольным элементом множества S.

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(y_n, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(x_{n+1}, y_n), \tag{7}$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Запишем трехточечное тождество (3):

$$V(z, x_{n+1}) = V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n),\; x_{n+1} - z). \tag{8}$$

Из определения точек x_{n+1} и (6) следует

$$\lambda_n (Ay_n,\, z - x_{n+1}) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n),\; z - x_{n+1}) \ge 0. \tag{9}$$

Используя неравенство (9) для оценки скалярного произведения в (8), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n (Ay_n,\, z - x_{n+1}). \tag{10}$$

Третье слагаемое в (10) представим в виде

$$V(x_{n+1}, x_n) = V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n) + (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n),\; x_{n+1} - y_n).$$

Получаем

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+ (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_n - \nabla\varphi(y_n),\, x_{n+1} - y_n) + \lambda_n (Ay_n,\, z - y_n).$$

Из псевдомонотонности оператора A следует $(Ay_n,\, z - y_n) \le 0$. Таким образом,

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+ (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_n - \nabla\varphi(y_n),\, x_{n+1} - y_n). \tag{11}$$

Поскольку $x_{n+1} \in T_n$, то

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_n - \nabla\varphi(y_n),\ x_{n+1} - y_n) = (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A x_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) +$$

$$+\lambda_n (A x_n - A y_n,\ x_{n+1} - y_n) \le \lambda_n (A x_n - A y_n,\ x_{n+1} - y_n). \tag{12}$$

Учитывая (12) в (11), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \lambda_n (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n). \tag{13}$$

Теперь оценим слагаемое $\lambda_n (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n)$. Имеем

$$\lambda_n (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n) \le \lambda_n \|A x_n - A y_n\|_* \|x_{n+1} - y_n\| \le \lambda_n L \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \le$$

$$\le \frac{\lambda_n L}{2} \|x_n - y_n\|^2 + \frac{\lambda_n L}{2} \|x_{n+1} - y_n\|^2. \tag{14}$$

Оценив нормы в (14) с помощью неравенства (4), получим

$$\lambda_n (A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n) \le \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n). \tag{15}$$

Применив (15) в (13), будем иметь

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n) =$$

$$= V(z, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(y_n, x_n),$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству сходимости алгоритма 1.

3. Сходимость алгоритма 1

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуется элементарная лемма.

Лемма 3. Пусть (a_n), (b_n) — последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \le a_n - b_n$ для всех $n \in \mathrm{N}$. Тогда существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое, оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$, $S \ne \varnothing$ и $\lambda_n \in [a, b]$, где a, $b \in \left(0, \frac{\sigma}{L}\right)$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке $\bar{z} \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Положим

$$a_n = V(z, x_n),$$

$$b_n = \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) + \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(y_n, x_n).$$

Неравенство (7) принимает вид $a_{n+1} \le a_n - b_n$. Тогда из леммы 3 можем сделать вывод, что существует предел $\lim_{n\to\infty} V(z, x_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n L \sigma^{-1})(V(x_{n+1}, y_n) + +V(y_n, x_n)) < +\infty$.

ISSN 0572-2691

Откуда, в частности, получаем

$$\lim_{n\to\infty} V(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} V(y_n, x_n) = 0 . \tag{16}$$

Из (16) следует

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0 . \tag{17}$$

Из неравенства $V(z, x_n) \geq \frac{\sigma}{2}\| z - x_n \|^2$ и (17) следует ограниченность последовательностей $(x_n), (y_n)$.

Рассмотрим подпоследовательность (y_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $\bar{z} \in C$. Тогда из (17) следует, что $x_{n_k} \to \bar{z}$. Покажем, что $\bar{z} \in S$. Имеем

$$(Ax_{n_k}, y - y_{n_k}) + \frac{(\nabla\varphi(y_{n_k}) - \nabla\varphi(x_{n_k}), y - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} \geq 0 \quad \forall y \in C . \tag{18}$$

Совершив в (18) предельный переход с учетом (17), получим

$$(A\bar{z}, y - \bar{z}) \geq 0 \quad \forall y \in C ,$$

т.е., $\bar{z} \in S$.

Покажем, что $x_n \to \bar{z}$ (тогда из $\| x_n - y_n \| \to 0$ следует, что и $y_n \to \bar{z}$). Известно, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla\varphi(x_n), \bar{z} - x_n)) .$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, то и $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = 0$. Откуда $\| x_n - \bar{z} \| \to 0$. ■

Замечание 7. Как видно из доказательства теоремы 1, последовательность (x_n) является фейеровской в расхождении Брэгмана относительно множества S.

Замечание 8. Асимптотики (16) и (17) можно уточнить до следующих:

$$\varliminf_{n\to\infty} n \cdot V(x_{n+1}, y_n) = \varliminf_{n\to\infty} n \cdot V(y_n, x_n) = 0 , \tag{19}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt{n}\| x_{n+1} - y_n \| = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt{n}\| y_n - x_n \| = 0 . \tag{20}$$

Действительно, если (19) не выполняется, то $V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n) \geq \mu n^{-1}$ для некоторого $\mu > 0$ и всех достаточно больших номеров n. Следовательно, ряд $\sum_n (V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n))$ расходится. Получили противоречие, а (20) непосредственно следует из (19).

4. Оценки эффективности алгоритма 1

Рассмотрим вариационное неравенство (1) с монотонным липшицевым оператором A и выпуклым компактным множеством C. Получим для этого случая неасимптотические оценки эффективности алгоритма 1.

Напомним одно важное понятие. Функцией разрыва (gap function) называют функцию вида

$$G(x) = \max_{y\in C}(Ay, x - y) , \quad x \in C .$$

Функция разрыва выпукла, неотрицательна и принимает нулевое значение в точке $x \in C$, если и только если эта точка принадлежит множеству S [1]. Функция разрыва применяется для оценки качества приближенного решения вариационого неравенства (1) [14, 16].

Справедлива следуюшая теорема.

Теорема 2. Пусть $\lambda_n \in \left(0, \frac{\sigma}{L}\right]$. Тогда имеет место неравенство

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \le \frac{R_C(x_1)}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n},$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}$ — усредненный по Чезаро результат работы алгоритма 1,

$$R_C(x_1) = \max_{y \in C} V(y, x_1).$$

Доказательство. Для произвольного элемента $y \in C$ имеет место неравенство

$$V(y, x_{n+1}) \le V(y, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$

$$+(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_n - \nabla\varphi(y_n),\ x_{n+1} - y_n) + \lambda_n (Ay_n, y - y_n).$$

Из монотонности оператора A следует $(Ay_n, y - y_n) \le (Ay, y - y_n)$. Таким образом,

$$V(y, x_{n+1}) \le V(y, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$

$$+(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) + \lambda_n (Ay, y - y_n). \tag{21}$$

Далее, как и при доказательстве леммы 2, из (21) получаем неравенство

$$V(y, x_{n+1}) \le V(y, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) -$$

$$-\left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(y_n, x_n) + \lambda_n (Ay, y - y_n). \tag{22}$$

Перепишем (22) в следующем виде:

$$\lambda_n (Ay, y_n - y) \le V(y, x_n) - V(y, x_{n+1}) -$$

$$-\left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) V(y_n, x_n). \tag{23}$$

Суммируя (23) по n от 1 до N, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n (Ay, y_n - y) \le V(y, x_1) - V(y, x_{N+1}) -$$

$$-\sum_{n=1}^{N} (1 - \lambda_n L \sigma^{-1})(V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n)).$$

Откуда следует

$$(Ay, z_N - y) \le \frac{V(y, x_1)}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}, \tag{24}$$

ISSN 0572-2691

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}$. Перейдя в (24) к максимуму по $y \in C$, получаем

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \le \frac{R_C(x_1)}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n},$$

где $R_C(x_1) = \max_{y \in C} V(y, x_1)$. ■

Рассмотрим подробнее вариант стационарной последовательности множителей λ_n.

Следствие 1. Пусть $\lambda_n = \lambda = \frac{\sigma}{\alpha L}$, где $\alpha \ge 1$. Тогда имеет место неравенство

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \le \alpha \cdot L \cdot R_C(x_1) \cdot \sigma^{-1} \cdot \frac{1}{N},$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$.

Из данного следствия вытекает следующее.

Следствие 2. Пусть необходимо решить задачу (1) с помощью алгоритма 1 в условиях следствия 1 и $\varepsilon > 0$. Тогда после

$$N = \left\lceil \frac{R_C(x_1)}{\lambda \varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \frac{\alpha L R_C(x_1)}{\sigma \varepsilon} \right\rceil$$

итераций имеет место оценка $G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \le \varepsilon$, где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$ — усредненный результат работы алгоритма 1 за N итераций.

Заключение

В настоящей работе предложен новый метод экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма [8, 9] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. Как и другие схемы, использующие расхождение Брэгмана [12–18, 20], предложенный метод иногда позволяет эффективно учесть структуру допустимого множества задачи. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены $O(\frac{1}{N})$ неасимптотические оценки эффективности метода.

Интерес представляет построение адаптивного аналога изученного метода, позволяющего получать аппроксимирующие последовательности без знания точного значения константы Липшица оператора. В ближайшей работе планируется для алгоритма [17, 18] изучить аналог с брэгмановскими проекциями на специально подобранные опорные к допустимому множеству полупространства. А именно, вместо итераций вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{C}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}(-\lambda A y_n), \end{cases}$$

предлагается рассмотреть процесс

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{H_n}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}(-\lambda A y_n), \end{cases}$$

где $H_n = \{z \in E : (\nabla\varphi(x_n) - \lambda A y_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), z - y_n) \le 0\}$.

В.В. Семенов

МОДИФІКОВАНИЙ ЕКСТРАГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД З РОЗБІЖНІСТЮ БРЕГМАНА ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Запропоновано новий метод екстраградієнтного типу для наближеного розв’язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченномірному лінійному нормованому просторі. Даний метод є модифікацією субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з використанням розбіжності Брегмана замість евклідової відстані. Як і інші схеми, що використовують розбіжність Брегмана, запропонований метод іноді дозволяє ефективно враховувати структуру допустимої множини задачі. Доведено теорему збіжності методу та для випадку монотонного оператора отримано неасимптотичні оцінки ефективності методу.

V.V. Semenov

MODIFIED EXTRAGRADIENT METHOD WITH BREGMAN DIVERGENCE FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

A new method of extragradient type for the approximate solution of variational inequalities with pseudomonotone and Lipschitz-continuous operators acting in a finite-dimensional linear normed space is proposed. This method is a modification of the subgradient extragradient algorithm using the Bregman divergence instead of the Euclidean distance. Like other schemes using Bregman divergence, the proposed method can sometimes effectively take into account the structure of the feasible set of the problem. A theorem on the convergence of the method is proved and, in the case of a monotone operator, nonasymptotic estimates of the effectiveness of the method are obtained.

1. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. — 2001. — 181 p.
2. *Корпелевич Г.М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — **12,** № 4. — С. 747–756.
3. *Хоботов Е.Н.* О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физ. — 1987. — № 10. — С. 1462–1473.
4. *Tseng P.* A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2000. — **38.** — P. 431–446.
5. *Семенов В.В.* Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 5. — С. 104–112.

6. *Семенов В.В.* Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 3. — С. 22–32.
7. *Lyashko S.I., Semenov V.V.* A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and its Applications, Springer, Cham, — 2016. — **115.** — P. 315–325.
8. *Censor Y., Gibali A., Reich S.* The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — **148.** — P. 318–335.
9. *Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А.* Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 146–154.
10. *Верлань Д.А., Семенов В.В., Чабак Л.М.* Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 4. — С. 37–50.
11. *Денисов С.В., Семенов В.В., Чабак Л.М.* Сходимость модифицированного экстраградиентного метода для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 5. — С. 102–110.
12. *Брэгман Л.М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физ. — 1967. — № 3. — С. 620–631.
13. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization. // Operations Research Letters. — 2003. — **31**. — N 3. — P. 167–175.
14. *Nemirovski A.* Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems // SIAM Journal on Optimization. — 2004. — **15.** — P. 229–251.
15. *Auslender A., Teboulle M.* Interior projection-like methods for monotone variational inequalities // Mathematical Programming. — 2005. — **104,** N 1. — P. 39–68.
16. *Nesterov Yu.* Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. Ibid. — 2007. — **109,** N 2–3. — P. 319–344.
17. *Семенов В.В.* Вариант метода зеркального спуска для вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — № 2. — С. 83–93.
18. *Semenov V.V.* A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. In: Polyakova, L.N. (ed.) Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 2017. doi: 10.1109/CNSA.2017.7974011.
19. *Вьюгин В.В.* Математические основы машинного обучения и прогнозорования — М.: МЦНМО, 2018. — 384 с.
20. *Lorenz D.A., Schöpfer F., Wenger S.* The linearized Bregman method via split feasibility problems: Analysis and Generalizations // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2014. — **7,** N 2. — P. 1237–1262.

Получено 27.03.2018

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАНУ С.И. Ляшко