

# МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

УДК 62.50

*В.Ф. Губарев, В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ В КОГНИТИВНЫХ КАРТАХ В РЕЖИМЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

### Введение

В качестве средства моделирования сложных систем разной природы используются когнитивные карты (КК). В данной работе рассматриваются КК, представляющие собой взвешенные ориентированные графы, вершины которых отражают координаты сложных систем, а ребра с весовыми коэффициентами описывают влияние одной вершины на другую. В процессе функционирования сложной системы под влиянием различных возмущений координаты вершин КК изменяются во времени. Процесс распространения возмущений по вершинам КК трактуется как импульсный процесс [1], для которого сформулировано правило изменения значений координат вершин КК в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях переменных:

$$\Delta y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\Delta y_j(k) + \Delta q_j(k)). \quad (1)$$

Здесь  $y_i(k)$  — значение координаты  $i$ -й вершины в момент времени  $t = kT_0$ ,  $\Delta y_i(k) = y_i(k) - y_i(k-1)$  — величина импульса в  $i$ -й вершине,  $i = 1, \dots, n$ ;  $q_j(k)$  — формируемое известное тестирующее воздействие на  $j$ -ю вершину для проведения идентификации.

Для всей КК импульсный процесс можно описать в векторно-матричной форме

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A(\Delta \bar{Y}(k) + \Delta \bar{Q}(k)), \quad (2)$$

где  $A$  — весовая матрица смежности КК,  $\Delta \bar{Y}(k)$  — вектор приращений координат  $y_i$  вершин КК,  $\Delta \bar{Q}(k)$  — вектор приращений тестирующих воздействий по заданной программе.

В работе [2] исследована взаимосвязь моделей динамики системы в пространстве состояний и в форме КК (2). Показано, что модель импульсного процесса КК (2) может быть эквивалентно представлена в форме модели в пространстве состояний.

© В.Ф. ГУБАРЕВ, В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ, 2018

Международный научно-технический журнал  
«Проблемы управления и информатики», 2018, № 4

Структура КК и величина коэффициентов  $a_{ij}$  весовой матрицы смежности  $A$  согласно [2, 3] определяются экспертами на основе анализа причинно-следственных связей при функционировании сложной системы. Однако адекватность модели (2) для реальной сложной системы на основе экспертных оценок всегда подвергается сомнению. К тому же в процессе эксплуатации сложной системы коэффициенты  $a_{ij}$  весовой матрицы смежности могут изменяться в широких пределах в зависимости от изменения влияния одной вершины КК на другую, от возникновения нестандартных и конфликтных ситуаций, кризисных явлений, человеческого фактора, от изменения общественных и политических отношений и др. В работах [4, 5] для оценивания установленных экспертами коэффициентов  $a_{ij}$  матрицы  $A$  использовался рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК), который дает несмещенные оценки при условии, что возмущения в (1) являются дискретным «белым шумом». Это условие при импульсном процессе КК не всегда выдерживается. При изменении структуры КК, которое выражается в появлении новых весовых коэффициентов  $a_{ij}$ , ранее не установленных экспертами, РМНК вообще эти коэффициенты не оценит, так как они будут отсутствовать в алгоритме РМНК.

### 1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается вариант, когда измеряются все координаты вершин КК  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда исходная весовая матрица смежности  $A$  в исходном состоянии при идентификации полностью заполнена априори неизвестными коэффициентами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Задача идентификации заключается в нахождении коэффициентов  $a_{ij}$  матрицы (3) в течение импульсного процесса КК, когда все координаты вершин КК находятся в переходном режиме или под воздействием внешних импульсов.

### 2. Параметрическая идентификация матрицы смежности при отсутствии помех

Для моментов времени  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  уравнение импульсного процесса (2) можно представить в виде последовательности систем уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}(1) &= A(\Delta \bar{Y}(0) + \Delta \bar{Q}(0)), \\ \Delta \bar{Y}(2) &= A(\Delta \bar{Y}(1) + \Delta \bar{Q}(1)), \\ &\dots \\ \Delta \bar{Y}(K) &= A(\Delta \bar{Y}(K-1) + \Delta \bar{Q}(K-1)). \end{aligned} \quad (4)$$

На основе (4) в детерминированном случае можно решить задачу определения матрицы  $A$  по данным измерений выходных переменных и входных воздействий. Рассмотрим ее решение для случая, когда отсутствуют шумы, а воздействия  $\{\Delta \bar{Q}(k)\}$  известны, т.е. последовательности векторов  $\{\Delta \bar{Y}(k)\}$  заданы точно. Тогда достаточно взять любые  $n$  уравнений, например первые из их последовательности (4). Из них легко можно построить  $n$  независимых систем ли-

нейных алгебраических уравнений для определения элементов матрицы  $A$ , стоящих в первой, второй и т.д., наконец, в  $n$ -й строке. Если взять первые  $n$  уравнений, то получим

$$\begin{aligned} \Delta y_1(1) &= a_{11}(\Delta y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{12}(\Delta y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{1n}(\Delta y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta y_1(2) &= a_{11}(\Delta y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{12}(\Delta y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{1n}(\Delta y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta y_1(n) &= a_{11}(\Delta y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{12}(\Delta y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots \\ &\dots + a_{1n}(\Delta y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1)); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_2(1) &= a_{21}(\Delta y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{22}(\Delta y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{2n}(\Delta y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta y_2(2) &= a_{21}(\Delta y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{22}(\Delta y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{2n}(\Delta y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta y_2(n) &= a_{21}(\Delta y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{22}(\Delta y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots \\ &\dots + a_{2n}(\Delta y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1)); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_n(1) &= a_{n1}(\Delta y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{n2}(\Delta y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{nn}(\Delta y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta y_n(2) &= a_{n1}(\Delta y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{n2}(\Delta y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{nn}(\Delta y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta y_n(n) &= a_{n1}(\Delta y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{n2}(\Delta y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots \\ &\dots + a_{nn}(\Delta y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1)). \end{aligned} \quad (7)$$

Записанные системы уравнений (5)–(7) можно привести к унифицированной форме:

$$\Delta \bar{Y}_i = (\Delta Y + \Delta Q) \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$\Delta \bar{Y}_i^T = (\Delta y_i(1) \Delta y_i(2) \dots \Delta y_i(n)) \quad (9)$$

— вектор, представляющий динамику  $i$ -й вершины КК от 1 до  $n$ -го периода дискретизации, а  $\bar{a}_i^T = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$  — вектор, содержащий элементы  $i$ -й строки матрицы  $A$ . Матрица  $\Delta Y$  составляется из дискретных измерений координат вершин КК от нулевого до  $(n-1)$ -го периодов дискретизации следующим образом:

$$\Delta Y = \begin{pmatrix} \Delta y_1(0) & \Delta y_2(0) & \dots & \Delta y_n(0) \\ \Delta y_1(1) & \Delta y_2(1) & \dots & \Delta y_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta y_1(n-1) & \Delta y_2(n-1) & \dots & \Delta y_n(n-1) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Формирование матрицы известных тестирующих воздействий  $\Delta Q$  осуществляется по программе согласно

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_1(0) & \Delta q_2(0) & \dots & \Delta q_n(0) \\ \Delta q_1(1) & \Delta q_2(1) & \dots & \Delta q_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_1(n-1) & \Delta q_2(n-1) & \dots & \Delta q_n(n-1) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Таким образом, согласно (8) с учетом (10), (11) весовые коэффициенты матрицы смежности  $A$  определяются на основе

$$\bar{a}_i = (\Delta Y + \Delta Q)^{-1} \Delta \bar{Y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Разрешимость (12) обеспечивается, когда  $\det(\Delta Y + \Delta Q) \neq 0$ . Решение, аналогичное (12), также будем иметь при любом другом способе построения квадратных систем (8) из уравнений (4). Однако их следует выбирать так, чтобы на соответствующем интервале времени элементы матрицы  $A$  оставались неизменными.

При формировании последовательностей тестирующих воздействий  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , необходимо учитывать, что не все вершины КК можно варьировать по программе, установленной лицом, принимающим решение. В этих случаях тестирующие воздействия могут быть равны нулю.

### 3. Идентификация при наличии шумов в данных

В этом случае вместо точных значений матрицы  $\Delta Y$  и вектора  $\Delta \bar{Y}_i$  имеется информация о приближенных значениях матрицы  $\Delta \tilde{Y}$  и вектора  $\Delta \tilde{Y}_i$ , поэтому при решении (12) получим приближенную оценку  $\hat{a}_i$ . При проведении идентификации очень важно знать, насколько приближенная оценка отличается от точных значений. Необходимо отметить, что она существенно зависит от числа обусловленности суммарной матрицы  $\Delta Y + \Delta Q$ . Если эта матрица будет плохо обусловленной или близкой к вырожденной, то даже малые возмущения или неточности измерений координат вершин могут привести к тому, что задача станет некорректно поставленной. Плохая обусловленность зависит от двух факторов: начального состояния  $\Delta \bar{Y}(0)$ , а именно уровня сигнала каждой из мод системы, и параметров системы, генерирующей данные. Нетрудно убедиться, что число обусловленности даже при одинаковом возбуждении всех мод КК быстро растет с увеличением размерности КК. Поэтому для больших  $n$  следует обязательно оценивать отклонение получаемого приближенного решения от точного.

**3.1. Решение комбинаторным методом.** Рассмотрим процедуру покомпонентной оценки интервалов принадлежности точных значений  $\bar{a}_i$  заданным ограничениям на величину погрешности измерения координат вершин КК. Для этого нам потребуются общепринятые понятия матричной нормы, матричного неравенства и абсолютной величины матрицы (включая как частный — векторный случай). Для матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  имеем:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

$$B \leq A \Rightarrow b_{ij} \leq a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$B = |A| \Rightarrow b_{ij} = |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Зададим погрешность измерения в виде

$$\Delta \tilde{Y}_i = \Delta \bar{Y}_i + \bar{\xi}_i \quad \text{и} \quad |\bar{\xi}_i| \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где  $\Delta \bar{Y}_i$  — точное приращение вектора координат (9),  $\bar{\xi}_i$  — вектор погрешностей измерения  $i$ -й координаты в дискретные моменты времени на интервале наблюдения, а  $\varepsilon$  — достаточно малая величина.

Рассмотрим систему линейных квадратных уравнений

$$\Delta \tilde{Y}_i = \Delta \tilde{Y}_1 \hat{a}_i, \quad (15)$$

где  $\Delta \tilde{Y}_1 = \Delta \tilde{Y} + \Delta Q$ . В системе (15) матрица  $\Delta \tilde{Y}$  и вектор  $\Delta \tilde{Y}_i$  заданы с погрешностью, а

$$\Delta \tilde{Y}_i - \bar{\xi}_i = (\Delta Y_1 + \Xi) \bar{a}_i \quad (16)$$

соответствует точному уравнению, в котором  $\Xi$  — аддитивная матрица с элементами, являющимися погрешностями измерений координат вершин КК, взятыми со знаком минус. Тогда для получения покомпонентной оценки интервалов принадлежности точных значений можно применить следующую теорему [6].

**Теорема.** Пусть задана приближенная невырожденная система (15) и точная система (16) такие, что в обозначениях (13)

$$\|\Xi\|_\infty \leq \delta \|\Delta \tilde{Y}_1\|_\infty, \quad \|\bar{\xi}_i\|_\infty \leq \delta \|\Delta \tilde{Y}_i\|_\infty. \quad (17)$$

Если при этом число обусловленности  $\rho_\infty(\Delta \tilde{Y}_1)$  удовлетворяет условию

$$\delta \rho_\infty(\Delta \tilde{Y}_1) = r < 1, \quad (18)$$

то  $\Delta Y_1 + \Xi$  также невырождена и

$$\|\hat{a}_i - \bar{a}_i\|_\infty \leq \frac{2\delta}{1-r} \|\Delta \tilde{Y}_1^{-1}\|_\infty \|\Delta \tilde{Y}_1\|_\infty \|\hat{a}_i\|_\infty. \quad (19)$$

Величина  $\rho_\infty(\Delta \tilde{Y}_1) = \|\Delta \tilde{Y}_1\|_\infty \|\Delta \tilde{Y}_1^{-1}\|_\infty$  в (18) — число обусловленности матрицы  $\Delta \tilde{Y}_1$  по норме « $\infty$ », а  $\|\Delta \tilde{Y}_1^{-1}\|_\infty \|\Delta \tilde{Y}_1\|_\infty$  в (19) еще называют числом обусловленности по Шкеелю.

В этой теореме конкретные реализации  $\Xi$  и  $\bar{\xi}_i$  неизвестны, и, следовательно, определить  $\delta$  и  $r$  из (17), (18) не представляется возможным. Однако если ориентироваться на самую неблагоприятную, хотя и маловероятную реализацию, то на основе (17) можно получить гарантированный интервал принадлежности точного значения при любых реализациях, удовлетворяющих (14). При такой реализации имеем

$$\Xi = \varepsilon \Xi_1, \quad \bar{\xi}_i = \varepsilon \bar{e}, \quad (20)$$

где  $\Xi_1$  — матрица, у которой все элементы равны единице, а  $\bar{e}$  — вектор со всеми единичными компонентами. Из (20) следует, что

$$\|\Xi\|_\infty = n\varepsilon, \quad \|\bar{\xi}_i\|_\infty = \varepsilon. \quad (21)$$

Полученный результат (17)–(21) позволяет применить комбинаторный метод решения задачи идентификации по приближенным данным. Он реализуем, когда выполняется условие (18) теоремы. Поэтому сначала необходимо проверить его выполнимость. Для этого находим наименьшее значение  $\delta$ , при котором выполняются нестрогие неравенства

$$\varepsilon \leq \delta \frac{\|\Delta \tilde{Y}\|_\infty}{n}, \quad \varepsilon \leq \delta \|\Delta \tilde{Y}_i\|_\infty. \quad (22)$$

После этого проверяется выполнимость строго неравенства (18). Следует ожидать, что при плохой обусловленности матрицы  $\Delta\tilde{Y}$  величина  $r$  при наименьшем  $\delta$  не будет меньше единицы. Это фактически может означать большой разброс получаемых решений на основе квадратных уравнений, формируемых из (4), т.е. метод решения на основе гарантированного результата не может быть реализован. В том случае, когда (18) выполняется для множества квадратных систем, формируемых из (4), комбинаторный метод будет эффективным.

Описание его дано в [7]. Достоинство метода состоит в удачном сочетании свойств статистик с гарантированным интервальным оцениванием. Это позволяет по множественным оценкам при определенных свойствах статистик существенно уменьшать гарантированные интервалы принадлежности точных значений компонент вектора  $\bar{a}_i$ . Алгоритм решения комбинаторным методом состоит в следующем. Из переопределенной системы (4) сформируем множество квадратных, отбрасывая произвольным образом лишние уравнения. Всего таких комбинаций будет  $C_K^n$ . Оставляем только те системы, для которых выполняется (18), т.е. невырожденные и подходящим образом обусловленные. Пусть таких систем осталось  $S$ . Решаем оставшиеся квадратные системы и находим приближенные оценки  $\hat{a}_{ij}$  параметров  $\bar{a}_{ij}$ . Каждая  $s$ -я квадратная система,  $s = 1, \dots, S$ , согласно (19) характеризуется гарантированной покомпонентной погрешностью

$$\varepsilon_{is} = \frac{2\delta}{1-r} \left\| \Delta\tilde{Y}_1^{-1} \left\| \Delta\tilde{Y}_1 \right\|_{\infty} \right\| \hat{a}_i \left\|_{\infty}.$$

Неравенство (19) в таком случае позволяет записать поэлементную оценку для  $\bar{a}_{ij}$  в виде  $|\hat{a}_{ij}^s - \bar{a}_{ij}^s| \leq \varepsilon_{is}$  или

$$\hat{a}_{ij}^s - \varepsilon_{is} \leq \bar{a}_{ij} \leq \hat{a}_{ij}^s + \varepsilon_{is}. \quad (23)$$

При разных  $s$  и фиксированных  $i, j$  (23) дает систему гарантированных оценок, отсюда следует, что точное значение должно принадлежать усеченному наименьшему интервалу

$$\max_s (\hat{a}_{ij}^s - \varepsilon_{is}) \leq \bar{a}_{ij} \leq \min_s (\hat{a}_{ij}^s + \varepsilon_{is}). \quad (24)$$

Из (24) вытекает, что с увеличением  $S$  и при разбросе реализаций  $\hat{a}_{ij}^s$  точность оценивания должна улучшаться. В качестве интегрированной по  $S$  оценки  $\bar{a}_{ij}$  целесообразно взять середину интервала  $[\max_s (\hat{a}_{ij}^s - \varepsilon_{is}); \min_s (\hat{a}_{ij}^s + \varepsilon_{is})]$ , а половина его ширины будет характеризовать точность оценивания.

### 3.2. Решение с использованием метода наименьших квадратов МНК.

Было сказано, что комбинаторный метод не применим, когда условие (18) не выполняется, поскольку оценка (19) не будет справедливой. В таком случае предлагается использовать обычный или взвешенный МНК. Последовательность уравнений (4) позволяет построить переопределенную систему уравнений (15) с тем же искомым вектором  $\hat{a}_i$ , в которой  $\Delta\tilde{Y}_i = (\Delta\tilde{y}_i(1) \Delta\tilde{y}_i(2) \dots \Delta\tilde{y}_i(K))^T$ :

$$\Delta\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \Delta\tilde{y}_1(0) & \Delta\tilde{y}_2(0) & \dots & \Delta\tilde{y}_n(0) \\ \Delta\tilde{y}_1(1) & \Delta\tilde{y}_2(1) & \dots & \Delta\tilde{y}_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\tilde{y}_1(K-1) & \Delta\tilde{y}_2(K-1) & \dots & \Delta\tilde{y}_n(K-1) \end{pmatrix},$$

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_1(0) & \Delta q_2(0) & \dots & \Delta q_n(0) \\ \Delta q_1(1) & \Delta q_2(1) & \dots & \Delta q_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_1(K-1) & \Delta q_2(K-1) & \dots & \Delta q_n(K-1) \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что входные импульсы  $\Delta q_i(k)$  известны точно. Однако все результаты, которые будут получены далее, остаются справедливыми и в том случае, если вместо  $\Delta Q$  имеем приближенную матрицу  $\Delta\tilde{Q}$ .

Если использовать МНК для решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений с приближенной правой частью  $\Delta\tilde{Y}_i$  и матрицами  $\Delta\tilde{Y}$  и  $\Delta Q$ , то оценка вектора  $\hat{a}_i$  определяется соотношением

$$\hat{a}_i = ((\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q))^{-1} (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T \Delta\tilde{Y}_i. \quad (25)$$

При использовании взвешенного МНК, в котором весовые коэффициенты задаются элементами матрицы  $D$  (диагональной, размерности  $K$ ), формула (25) примет вид

$$\hat{a}_i = ((\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q))^{-1} (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D \Delta\tilde{Y}_i. \quad (26)$$

Оба метода (25), (26) наиболее эффективны, когда матрица  $\Delta Q$  сформирована из постоянно возбуждающих входных импульсных воздействий [8]. Применительно к рассматриваемой задаче они определяются следующим образом. Пусть имеем последовательность входных импульсов  $\Delta\bar{Q}$ , представленную в виде

$$\Delta\bar{Q}^T = (\Delta q_1(0) \dots \Delta q_n(0) \Delta q_1(1) \dots \Delta q_n(1) \dots \Delta q_1(K-1) \dots \Delta q_n(K-1)).$$

Последовательность  $\Delta\bar{Q}$  считаем постоянно возбуждающей порядка  $K$ , если

$$\text{rank}(\Delta\bar{Q} \Delta\bar{Q}^T) = nK. \quad (27)$$

Когда сигнал  $\Delta\bar{Q}$  является стационарным белым шумом с нулевым средним, последовательность  $\Delta\bar{Q}(j)$ , удовлетворяющая (27), имеет статистическое свойство

$$E \left( \begin{pmatrix} \Delta\bar{Q}(j) \\ \Delta\bar{Q}(j+1) \\ \dots \\ \Delta\bar{Q}(j+k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{Q}^T(j) & \Delta\bar{Q}^T(j+1) & \dots & \Delta\bar{Q}^T(j+k-1) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \sigma_u^2 \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{pmatrix},$$

где  $\Delta\bar{Q}(j) = (\Delta q_1(j) \dots \Delta q_n(j))^T$ ,  $E$  — математическое ожидание стационарной случайной последовательности, а  $\sigma_u^2$  — дисперсия.

**3.3. Регуляризованное решение.** При определенных условиях задача идентификации может стать существенно некорректно поставленной. Такое случается при больших  $n$  и плохой обусловленности информационной матрицы  $\Delta\tilde{Y} + \Delta Q$ . Это приводит к тому, что решение становится чувствительным к погрешностям в исходных данных. В таких случаях целесообразно использовать дополнительную информацию об искомом решении и на ее основе вводить в алгоритм решения процедуру регуляризации, позволяющую находить устойчивые решения по отношению к вариациям погрешности. Очень эффективной может оказаться дополнительная информация о значениях матрицы смежности, т.е. о связях между вершинами КК. Отсутствие определенных связей означает равенство нулю соответствующих коэффициентов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ . Это приводит к уменьшению размерности вектора  $\bar{a}_i$  и размерности информационных матриц в (25). Если этого недостаточно для получения устойчивого решения и при отсутствии другой дополнительной информации, можно воспользоваться методом регуляризации Тихонова [9] применительно к решению плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений с неточно заданной правой частью и основной информационной матрицей.

Введем в рассмотрение стабилизатор

$$\Omega(\bar{a}_i) = \|\bar{a}_i\|_2^2, \quad (28)$$

в котором норма евклидова. В соответствии с [9] запишем сглаживающий функционал со стабилизатором (28)

$$M^\alpha(\bar{a}_i, \Delta\tilde{Y}_i, \Delta\tilde{Y} + \Delta Q) = \left\| (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)\bar{a}_i - \Delta\tilde{Y}_i \right\|_2^2 + \alpha \|\bar{a}_i\|_2^2. \quad (29)$$

Составим убывающую последовательность  $\{\alpha_j\}$ , например убывающую геометрически, и решим последовательность задач при этих  $\alpha_j$ . Регуляризованное решение будет при наименьшем значении  $\alpha_j$ , которое можно получить, исходя из принципа невязки. Согласно этому принципу минимальное значение  $\alpha_j$  определяется из неравенства

$$\left\| (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)\bar{a}_i - \Delta\tilde{Y}_i \right\|_2 \leq \varepsilon (\|\Xi_1\|_2 + \|\bar{e}\|_2). \quad (30)$$

При этом для  $\alpha_{j-1}$  выражение (30) не выполняется. Элемент  $\hat{\bar{a}}_i$ , обеспечивающий минимум (29) при  $\alpha$ , определяемом из (30), и будет регуляризованным решением задачи параметрической идентификации, т.е. решением, устойчивым к погрешностям в данных.

Результат можно улучшить, если параметр регуляризации  $\alpha$  определять как квазиоптимальный. Тогда, стартуя с  $\alpha_j$ , определяемого из (29), продолжаем его уменьшать до тех пор, пока реализуется точная нижняя грань функционала



$\inf \left\| \alpha \frac{d\bar{a}_i(\alpha)}{d\alpha} \right\|_2$ , где  $\bar{a}_i(\alpha)$  — минимизирующий элемент при заданном  $\alpha$ . Поэтому  $\bar{a}_i(\alpha)$  будет линейным функционалом от  $\alpha$ .

#### 4. Экспериментальные исследования

Проведена серия экспериментальных вычислительных исследований на основе КК деятельности коммерческого банка [10], представленной на рис. 1.

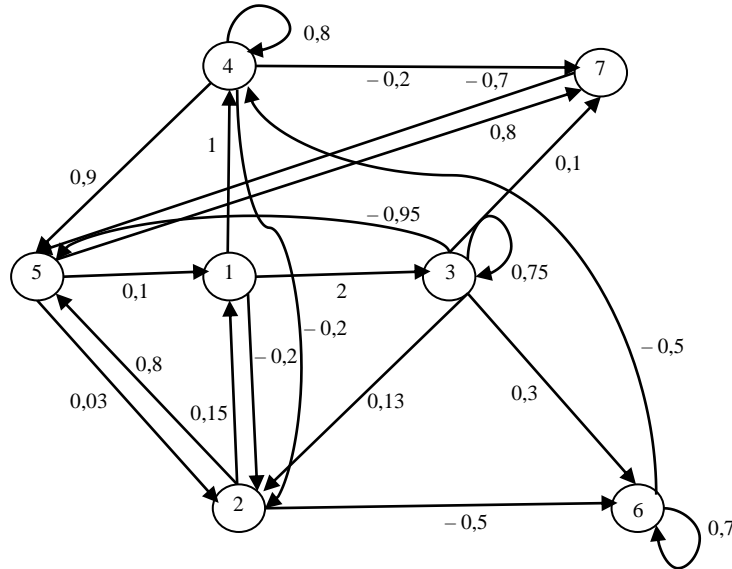


Рис. 1

Ее матрицу смежности запишем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вершины КК имеют следующий смысл: 1 — региональная сеть, 2 — капитал, 3 — кредиты, 4 — депозиты, 5 — ликвидные активы, 6 — мера риска стабильности, 7 — мера риска ликвидности. Поскольку собственные числа матрицы  $A$  по модулю меньше единицы, система асимптотически устойчивая.

Моделирование импульсного процесса производилось на основе уравнения (2), где тестирующие воздействия  $\Delta \bar{Q}$  — последовательность нормально распределенных независимых векторов с параметрами  $(0, 1)$ , т.е. «белый шум» (если не указано иное). Был выбран интервал моделирования  $K = 40$ .

Сначала был рассмотрен детерминированный случай, когда все вершины КК измеряются точно. В этом случае оказалось достаточно взять первые  $n = 7$  измерений выходного вектора и использовать формулу (12) для получения практически идеально точных оценок элементов матрицы  $A$  (с точностью, сопоставимой с

точностью компьютерных вычислений). Тестирующее воздействие достаточно подавать только в начальный момент времени и даже не на все вершины, качество оценивания почти не изменяется.

Ситуация существенно усложняется, когда координаты измеряются с погрешностями. Для моделирования в этом случае применен следующий подход. Находится  $\Delta Y_{\max}$  — максимум модуля среди всех значений  $\Delta \bar{Y}$ , причем не по отдельности для каждой из семи координат, а в целом, так как в алгоритмах будет использоваться общее ограничение для всех шумов. Задается некоторая точность  $\zeta$ , которую в целях эксперимента мы изменяли от 0 до 0,1 с шагом 0,01. Для каждого значения  $\zeta$  определяется  $\varepsilon = \zeta \cdot \Delta Y_{\max}$  и вводится случайный вектор  $\bar{\xi}$ , все координаты которого независимы и лежат в интервале  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . В данном случае каждая из координат — либо равномерно распределенная в этом интервале величина, либо нормально распределенная величина с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением  $\varepsilon/3$ , что обеспечивает 99 % значений в том же интервале. (Заметим, что во втором случае все получаемые оценки оказываются точнее в силу того, что большинство случайных значений сконцентрировано ближе к нулю.) После этого был вычислен вектор зашумленных измерений по формуле (14).

Исследованы пределы применимости комбинаторного метода в данной задаче. Они определены в первую очередь неравенствами (22), (18). В данном случае они выполняются при  $\varepsilon < 0,01$ , т.е. при незначительных шумах, а комбинаторный метод дает очень хорошие результаты, сравнимые с результатами в детерминированном случае. Специфика данной КК такова, что при больших возмущениях применить этот метод оказывается невозможным.

Следующий исследованный в работе метод основывается на применении МНК (25). При  $K = 40$  и тестирующих сигналах  $\Delta \bar{Q}$ , подаваемых на все вершины КК в каждый момент времени, получены лучшие результаты. На рис. 2 показаны графики зависимости оцененных значений всех весов ребер КК от точности  $\zeta$  (пунктирные линии — истинные значения) при 40 измерениях.

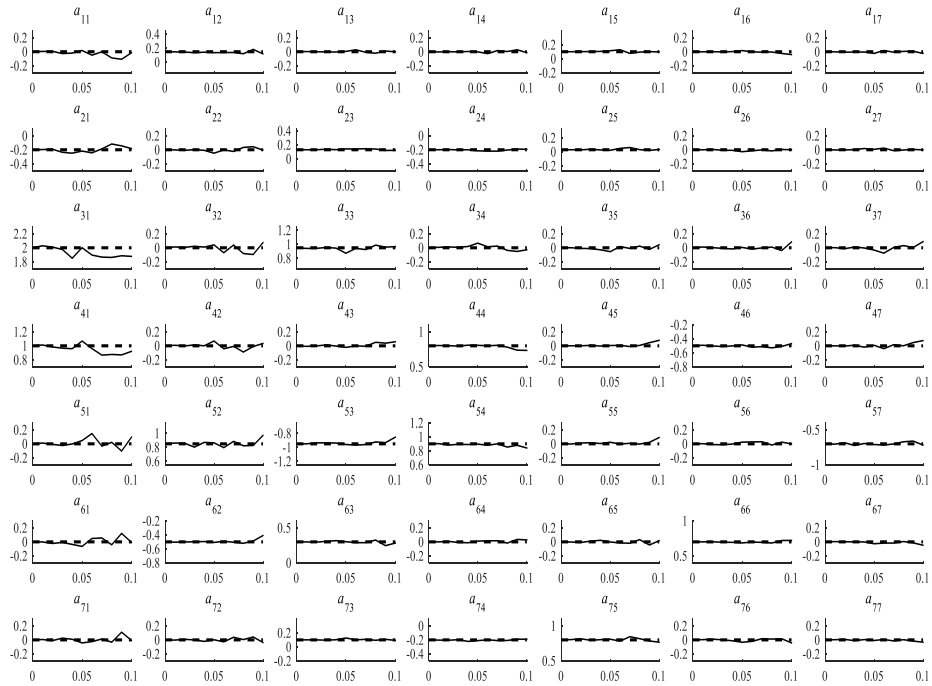


Рис. 2

Следует отметить некоторые важные результаты, выявленные в процессе моделирования. Во-первых, качество оценивания существенно зависит от количества используемых измерений  $K$ . На рис. 3 показаны графики оценивания элементов матрицы  $A$  при десяти измерениях. Получается более грубая оценка, что вполне объяснимо. Важно при этом, чтобы число данных было больше размерности системы, а оценка будет тем лучше, чем больше  $K$ .

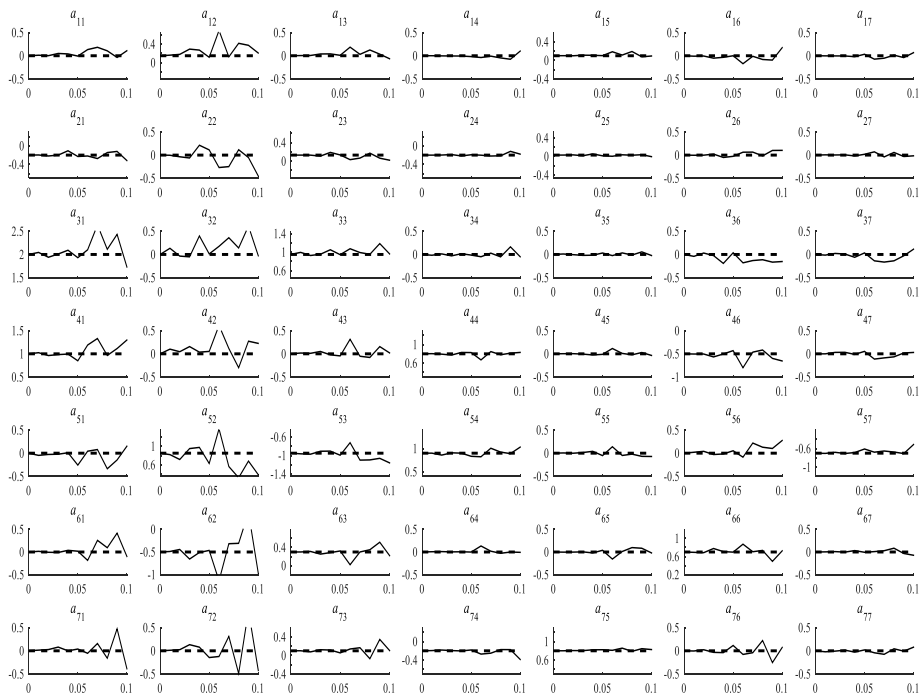


Рис. 3

Исследования показали существенную зависимость точности оценивания от длины интервала подачи информативного входного воздействия. На рис. 4 иллюстрируется точность оценивания параметров КК для наихудшего случая, когда возбуждающий сигнал подавался в начальный момент времени. Тогда информативными были данные только на интервале переходного процесса (асимптотически устойчивой системы), так как  $K$  в этом случае определялось его длиной. На рис. 4 использовалось 40 измерений.

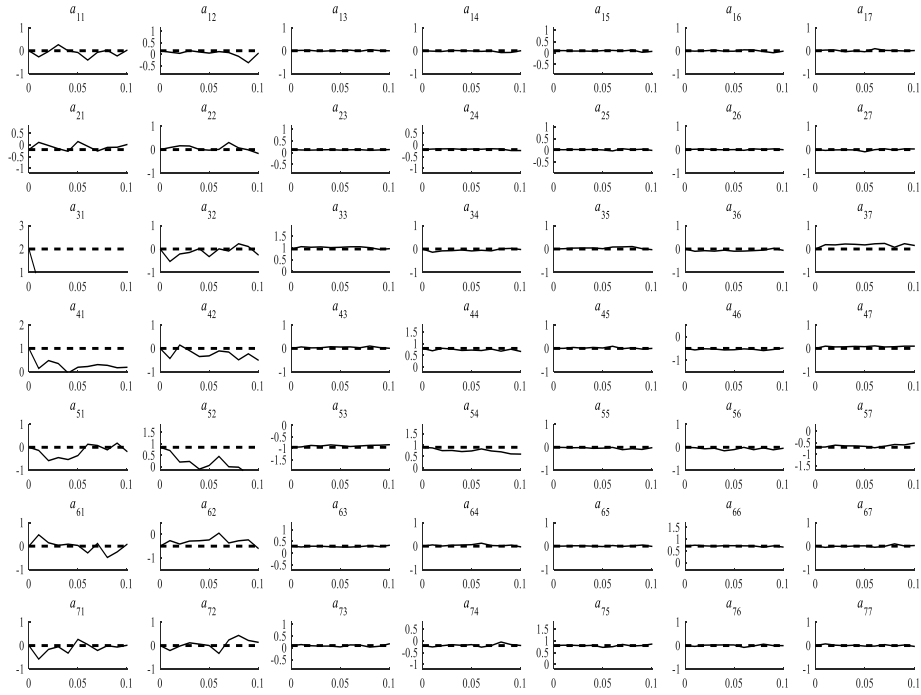


Рис. 4

Принимая во внимание, что на практике по целому ряду причин не на все вершины можно подавать тестирующие воздействия, были промоделированы ситуации, когда возбуждалось небольшое число вершин. Рассмотрим случай, когда тестирующие сигналы подавались только на три из семи вершин КК, а именно, на вершины 3 — кредиты, 4 — депозиты, 5 — ликвидные активы. Качество идентификации при таком воздействии показано на рис. 5. Фактически это соответствовало в определенном смысле уменьшению количества ненулевых составляющих вектора  $\Delta\bar{Q}$ . Действительно, и то, и другое приводит к меньшим вариациям определенных координат вершин и большему количеству нулевых элементов матрицы  $\Delta Q$ . Таким образом, лицу, принимающему решения при проведении экспериментов, рекомендуется «компенсировать» количество невозбуждаемых вершин увеличением длительности возбуждения на остальных вершинах. На рис. 5 возбуждения и соответствующие измерения осуществлялись в 40 точках.

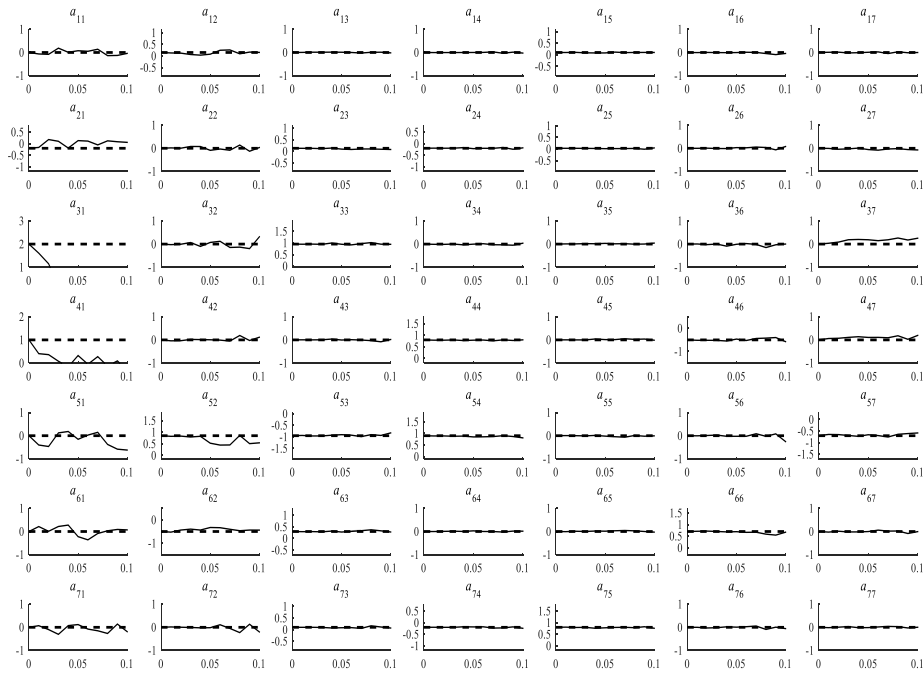


Рис. 5

Наконец, в предположении, что известны сведения о том, какие из связей между вершинами КК отсутствуют либо очень малы, проводились исследования по повышению точности оценивания с учетом этой информации. Для этого, а также чтобы гарантированно получить устойчивое решение, применялась регуляризация по Тихонову. При этом вместо сглаживающего функционала (29) использовался модифицированный функционал следующего вида:

$$M^\alpha(\bar{a}_i, \Delta\tilde{Y}_i, \Delta\tilde{Y} + \Delta Q) = \left\| (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)\bar{a}_i - \Delta\tilde{Y}_i \right\|_2^2 + \alpha \sum_{j=1}^n w_{ij} a_{ij}^2,$$

где

$$w_{ij} = \begin{cases} 100, & \text{если } a_{ij} = 0, \\ 0, & \text{если } a_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, дополнительная информация о связях между вершинами КК учтена в самом стабилизаторе. Как видно из рис. 6, в результате улучшились оценки нулевых коэффициентов, а точность оценивания остальных осталась прежней. При моделировании использовалось 40 измерений.

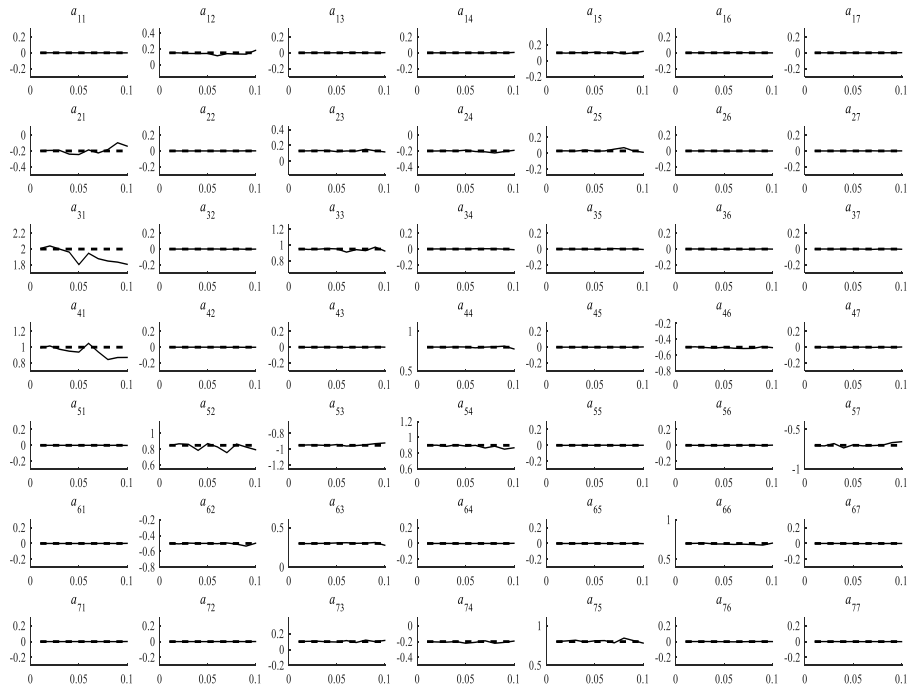


Рис. 6

### Заключение

В настоящей работе исследована проблема идентификации весов ребер КК по данным, полученным из экспериментов. Рассмотрено три метода, отличающихся областью применимости и качеством получаемых с их помощью результатов. Первый метод применим в детерминированном случае, когда все вершины измеряются точно. Второй метод позволяет получать гарантированные интервалы оценок в случае ограниченных шумов измерений. Однако он применим только при невысоких уровнях шума либо при очень хорошо обусловленной матрице измерений. Третий метод наиболее общий и основывается на методе наименьших квадратов. Проведены теоретические и практические исследования, которые выявили зависимость точности идентификации от соотношения шума к полезному сигналу, от длительности интервала наблюдений, от длительности периода подачи тестирующих возбуждающих воздействий и от количества вершин КК, на которые эти воздействия подаются. Предложенные в работе процедуры регуляризации обеспечивают устойчивость получаемых решений и повышают точность оценивания в случае, когда известна дополнительная информация о нулевых связях между определенными вершинами.

*В.Ф. Губарев, В.Д. Романенко, Ю.Л. Мільвський*

### ІДЕНТИФІКАЦІЯ В КОГНІТИВНИХ КАРТАХ У РЕЖИМІ ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ

Досліджено задачу ідентифікації вагових коефіцієнтів матриць суміжності когнітивних карт. Розроблено ряд методів, що дозволяють оцінити їх значення в детермінованому або стохастичному середовищі, за наявності або відсутності додаткової інформації, а також при різних параметрах алгоритмів ідентифікації. Проведено практичне дослідження на прикладі когнітивної карти банку, що продемонструвало межі застосовності та точність кожного з методів.

## IDENTIFICATION IN COGNITIVE MAPS IN THE IMPULSE PROCESSES MODE WITH FULL INFORMATION

The problem of identification of the weights of cognitive maps' adjacency matrices is investigated. A number of methods have been developed that allow estimating their values in deterministic or stochastic environment, with or without additional information, and also with different parameters of identification algorithms. A practical study was carried out based on the cognitive map of a bank, which demonstrated limits of applicability and accuracy of each method.

1. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986. — 496 с.
2. Романенко В.Д., Мильявский Ю.Л. Обеспечение устойчивости импульсных процессов в когнитивных картах на основе моделей в пространстве состояний // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 1. — С. 26–42.
3. Горелова Г.В., Захарова Е.Н., Радченко С.А. Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических систем. Когнитивный подход. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. — 332 с.
4. Романенко В.Д., Мильявский Ю.Л., Реутов А.А. Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 2. — С. 35–45.
5. Zgurovsky M., Romanenko V., Milyavsky Y. Adaptive control of impulse processes in complex systems cognitive maps with multirate coordinates sampling // Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control, 69. — Switzerland : Springer International Publishing, 2016. — P. 363–374.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
7. Губарев В.Ф., Мельничук С.В. Алгоритмы гарантированного оценивания состояния линейных систем при наличии ограниченных помех // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 2. — С. 26–35.
8. Verhaegen M., Dewilde P. Subspace model identification. Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms // International Journal of Control. — 1992. — 56, N 3. — P. 1187–1210.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
10. Романенко В.Д., Мильявский Ю.Л. Адаптивное координирующее управление соотношениями координат вершин взаимодействующих когнитивных карт в режиме импульсных процессов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 3. — С. 109–120.

Получено 26.01.2018