УДК 519.6:531:537

С.И. Ляшко, С.С. Зуб, В.С. Ляшко, Н.И. Ляшко, А.Ю. Чернявский

РАССЛОЕНИЕ $O^{+}(E^{3})$ КАК КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение

Начиная с Эйлера, рассмотрение твердого тела связывается с некой подвижной системой координат. Он же, фактически, ввел и теоретико-групповое описание твердого тела, предложив в качестве конфигурационного пространства для твердого тела группу вращений евклидового пространства. Такое понимание конфигурационного пространства для механики твердого тела с тех пор стало традиционным. Уместно привести цитату из современной монографии по динамике твердого тела [1]: «Конфигурационное пространство в динамике твердого тела, как правило, является некоторой естественной группой Ли. Например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки — это группа $SO(3)$, при свободном движении твердого тела — $E(3) = SO(3) \otimes_s \mathrm{R}^3$, являющаяся полупрямым произведением алгебры вращений $SO(3)$ и коммутативной алгебры трансляций R^3».

Последний подход доминирует в современных исследованиях, предлагающих далеко идущие обобщения динамики твердого тела на произвольные группы Ли [2, 3].

При теоретико-групповом описании угловая скорость тела становится элементом алгебры Ли $\mathbf{g}$ группы Ли **G**, являющейся конфигурационным пространством механической системы; момент импульса твердого тела описывается как элемент g^*, т.е. пространства, дуального к алгебре Ли.

Часто приходится сталкиваться с такими выражениями, как вектор угловой скорости относительно пространства, вектор угловой скорости относительно тела (аналогично для момента импульса). Это создает неверное впечатление о том, что существуют различные векторные физические величины такие, как угловая скорость относительно пространства или относительно тела, соответственно, для моментов импульсов. С нашей точки зрения, теория расслоенных пространств удачно объединяет геометрические и теоретико-групповые аспекты в дифференциально-геометрическом описании динамики твердого тела, в частности, проясняя смысл упомянутых выше терминов.

При теоретико-групповом описании механики твердого тела в качестве конфигурационного пространства принято использовать группу $SE(3)$, т.е. группу движений евклидового пространства, сохраняющих ориентацию. Следует заметить, что математическое описание механики твердого тела все же должно иметь другой исходный пункт.

Здесь имеется полная аналогия с аффинным (или евклидовым) пространством. В аффинном (евклидовом) пространстве нет выделенных точек — все точки равноправны. Поэтому векторное пространство не является полностью эквивалентным способом описания аффинного, так как в векторном пространстве имеется выделенный вектор $\vec{0}$. Чтобы описать аффинное пространство векторами (радиус-векторами), необходимо задать начальную точку отсчета O.

Аналогично положение твердого тела не может быть задано движением, т.е. элементом группы $SE(3)$, пока не задано некоторое начальное (исходное) положение тела.

Более правильно считать, что положение твердого тела однозначно задано, если задана ортонормированная триада (репер), жестко связанная с телом. Логично также считать, что начало отсчета этого подвижного репера находится в центре массы тела, а орты имеют направления главных осей инерции тела. Таким образом, естественным конфигурационным пространством для твердого тела является расслоение $O^+(E^3)$ ортонормированных ориентированных триад над 3-мерным евклидовым пространством E^3.

1. Расслоение ортонормированных ориентированных триад $O^+(E^3)$

Расслоение ортонормированных ориентированных реперов — это, вообще говоря, тройка $(O^+(E^3), \pi, E^3)$, $O^+(E^3) \xrightarrow{\pi} E^3$. Элементами $O^+(E^3)$ являются $z = (x, \{\mathbf{e}_i\})$, где $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, тогда $\pi(z) = x \in E^3$.

На $O^+(E^3)$ определено каноническое левое действие группы $SO(3)$:

$$\hat{Q} \in SO(3): \quad \hat{Q} \times z = \hat{Q} \times (x, \{\mathbf{e}_i\}) = (x, \{(Q^{-1})^k{}_i \mathbf{e}_k\}), \quad x \in E^3. \tag{1}$$

Примечание. По сути это правое действие, превращенное в левое обращением элементов группы.

Кроме того, имеется левое действие $SE(3)$, которое не является каноническим с точки зрения общей теории расслоений [4, с. 96].

Выберем фиксированную точку $O \in E^3$ и фиксированную триаду, образующие декартову систему отсчета $z_0 = (0, \{\mathbf{e}_{0i}\})$, тогда $z \in O^+(E^3)$ может быть получен сдвигом z_0 на некоторый элемент $g \in SE(3)$:

$$z = L_{(\mathrm{X}, \hat{R})} z_0 = L_{(\mathrm{X}, \hat{R})}(0, \{\mathrm{e}_{0i}\}) = (\mathrm{X}, \{\hat{R}[\mathrm{e}_{0i}]\}). \tag{2}$$

Рассмотрим левое действие группы $SE(3)$ на $O^+(E^3)$. Для $z = L_{(\mathbf{X}, \hat{R})} z_0$ имеем

$$L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})} z = (\mathbf{Y} + \hat{Q}[\mathbf{X}], \{\hat{Q}\hat{R}[\mathbf{e}_{0i}]\}) = L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})(\mathbf{X}, \hat{R})} z_0 = L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})} \circ L_{(\mathbf{X}, \hat{R})} z_0,$$

где $(\mathbf{Y}, \hat{Q})(\mathbf{X}, \hat{R})$ — произведение элементов группы $SE(3)$:

$$L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})} z = L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})} \circ L_{(\mathbf{X}, \hat{R})} z_0 = L_{(\mathbf{Y}, \hat{Q})(\mathbf{X}, \hat{R})} z_0. \tag{3}$$

Итак, получена биекция $SE(3)$ на $O^+(E^3)$, т.е. отображение, обратное единственной карте Ψ расслоения $O^+(E^3)$.

В данном случае карта не является локальной, а покрывает все расслоение $(\Psi : O^+(E^3) \mapsto SE(3))$. Кроме того, можно определить отображение Ψ_x, которое является сужением Ψ на слой $O^+(E^3)$ над точкой x, т.е. на реперы, имеющие одно и то же начало в точке $x \in E^3$ (после введения в (2) фиксированной системы отсчета точку $x \in E^3$ можно представлять радиус-вектором $\mathbf{X}$). Таким образом, из (2) следует отображение, обратное Ψ $(\Psi^{-1} : SE(3) \mapsto O^+(E^3))$:

$$\Psi^{-1}(\mathbf{X}, \hat{R}) = L_{(\mathbf{X},\, \hat{R})} z_0 = (\mathbf{X}, \{\hat{R}[\mathbf{e}_{0i}]\}). \tag{4}$$

Как итог, все операции над реперами теперь могут быть представлены операциями на группе $SE(3)$.

Рассмотрим, например, каноническое действие (1). Пусть $\Psi(z) = (\mathbf{X}, \hat{R})$, тогда (по определению, см. [4, (33), с. 97]) $\Psi_x(\hat{Q} \times z) = \Psi_x(z)\hat{Q}^{-1}$, где $\hat{Q} \in SO(3)$.

Из (2) имеем

$$z = (\mathbf{X}, \{\mathbf{e}_k\}) = (\mathbf{X}, \{\hat{R}[\mathbf{e}_{0k}]\}) = (\mathbf{X}, \{R^j{}_k \mathbf{e}_{0j}\}),$$

а из (1) —

$$\hat{Q} \times z = (\mathbf{X}, \{(Q^{-1})^k{}_i \mathbf{e}_k\}) =$$

$$= (\mathbf{X}, \{(Q^{-1})^k{}_i R^j{}_k \mathbf{e}_{0j}\}) = (\mathbf{X}, \{(\hat{R}\hat{Q}^{-1})^j{}_i \mathbf{e}_{0j}\}),$$

таким образом, $\Psi(z) = (\mathbf{X}, \hat{R}) \to \Psi_x(\hat{Q} \times z) = (\mathbf{X}, \hat{R}\hat{Q}^{-1})$.

Следовательно, операция на группе $SE(3)$, соответствующая каноническому действию группы $SO(3)$ на расслоении $O^+(E^3)$, — это обратные правые сдвиги.

Представление (неканонического) левого действия операцией на группе следует из формул (2), (3):

$$\Psi(z) = (\mathbf{X}, \hat{R}) \to \Psi(L_{(\mathbf{Y},\, \hat{Q})} z) = (\mathbf{Y} + \hat{Q}[\mathbf{X}], \hat{Q}\hat{R}).$$

Итак, операция на группе $SE(3)$, соответствующая этому действию группы $SE(3)$ на расслоении $O^+(E^3)$, — это левые сдвиги.

Примечание. Расслоение реперов — это главное расслоение, ассоциированное с касательным и кокасательным расслоениями. Расслоение реперов проходит как ключевой пример [4, пример 1, с. 102], а также примеры: 1, с. 94; 3, с. 96; 5, с. 99–271).

2. Угловая скорость «в теле» соответствует левоинвариантному полю на $SO(3)$

Как было сказано во введении, часто одну и ту же физическую величину, например угловую скорость или момент импульса тела, относят либо к пространству, либо к телу, обозначая разными векторами, например $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{\Pi}$.

Такая запись создает впечатление, что речь идет о геометрически разных векторах. Но это не так. Речь идет об одной и той же физической и геометрической величине, но в разных системах отсчета.

Принципиально важно определить теоретико-групповой смысл такой величины как угловая скорость. Покажем, что компоненты угловой скорости в системе, связанной с телом, соответствуют матричным компонентам левоинвариантного векторного поля группы $SE(3)$.

Генераторы [3, с. 312] канонического действия группы $SO(3)$ на расслоении $O^+(E^3)$ с точностью до знака совпадают с фундаментальными полями этого же действия (см. [4, (36), с. 98]), и в соответствии с (1) могут быть записаны в виде

$$\xi \in \mathbf{g} \to \tilde{\xi}(z) = \frac{d}{dt}\left[\exp(-t\xi) \times z\right]_{|t=0}, \ \tilde{\xi}(z) \in T_{v_z}(O^+(E^3)).$$

В данном случае $\mathrm{g} = so(3) = Lie(SO(3)), \ \xi = \hat{\omega},$

$$\exp(-t\hat{\omega}) \times z = \{\exp(t\hat{\omega})^k{}_i \mathbf{e}_k\} \to \tilde{\omega} = \hat{\omega}^k{}_i \mathbf{e}_k = \varepsilon_{kli}\omega^l \mathbf{e}_k,$$

и так как

$$\varepsilon_{kli}\omega^l \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_i)\omega_l = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i,$$

то $\omega = \omega_l \mathrm{e}_l, \ \tilde{\omega}_i = \omega \times \mathrm{e}_i, \ \dot{\mathrm{e}}_i = \tilde{\omega}_i$. Таким образом, каноническое действие генерируется угловой частотой относительно тела: $\boldsymbol{\omega} = \omega_l \mathbf{e}_l$.

Вследствие $\Psi(z) = (\mathrm{X}, \hat{A}) \Rightarrow \Psi(\exp(-t\xi) \times z) = (\mathrm{X}, \hat{A}\exp(t\hat{\omega}))$ получаем $\tilde{\omega}(z) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (0, \hat{A}\hat{\omega})$. Итак, $\tilde{\omega}(z) \leftrightarrow (0, \hat{A}\hat{\omega})$, т.е. угловая скорость относительно тела порождает левоинвариантное векторное поле на $SE(3)$, соотвествующее элементу $\omega \in so(3)$ или $(0, \omega) \in so(3) \subset se(3)$.

3. Скобки Пуассона (СП) в инерциальной системе

В разд. 2 показано, что все вычисления, связанные с расслоением $O^+(E^3)$, могут быть проведены на группе $SE(3)$, используя карту расслоения (4).

На группе $SE(3)$, как и на всякой группе Ли, существует каноническая пуассонова структура [5]. Из [5, (40)] могут быть выведены следующие СП для компонент физических величин $(\mathbf{x}, \hat{R}, \mathbf{p}, \mathbf{m})$ в инерциальной системе отсчета (см. также [1]):

$$\begin{cases} \{x_i, x_j\} = 0, \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{x_i, R_{jk}\} = 0, \{x_i, m_j\} = 0, \\ \{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, R_{jk}\} = 0, \{p_i, m_j\} = 0, \\ \{m_i, R_{jk}\} = \varepsilon_{ijl}R_{lk}, \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijl}m_l. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь x_i — координаты центра масс твердого тела, $\hat{R}$ — матрица поворота от фиксированной (инерциальной) системы отсчета к системе отсчета, связанной с телом, p_i — компоненты импульса тела, m_i — компоненты момента импульса в фиксированной системе отсчета.

Как замечено в [6], эти соотношения инвариантны относительно правого действия группы $SO(3)$. В контексте вышесказаного это означает, что каноническое действие группы $SO(3)$ на расслоении $O^+(E^3)$ (1) является одновременно каноническим преобразованием пуассоновой структуры (5).

Следует, однако, заметить, что вращательная кинетическая энергия тела, дающая обязательный вклад в любой физический гамильтониан твердого тела, является не правоинвариантной, а левоинвариантной квадратичной формой [1, 3, 5].

Это означает, что в общем случае асимметричного твердого тела данная группа преобразований не дает законов сохранения и не приводит к редукции, т.е. к понижению числа степеней свободы динамической системы.

Фактически инвариантность относительно преобразований данной группы говорит о симметрии тела, а не о симметрии системы в целом.

Если же тело, действительно, симметрично относительно некоторой подгруппы преобразований из данной группы, то редукция возможна, что и будет показано ниже.

4. Пуассонова редукция для симметричного волчка

С точки зрения пуассоновой структуры (5) и ее группы инвариантности, рассмотренных в предыдущем разделе, наиболее естественным и эффективным способом редукции системы (5) к симметричному волчку будет использование теоремы 10.5.1 [3, с. 355].

Эта теорема утверждает: если Р — пуассоново многообразие, на котором задано пуассоново (т.е. сохраняющее СП) действие группы Ли **G**, то на Р/**G** существует пуассонова структура и проекция π Р на Р/**G** является пуассоновым отображением.

Редукция пуассоновой структуры (5) к симметричному волчку имеет прозрачный геометрический смысл, поэтому следует вновь вернуться к расслоению ортонормированных ориентированных триад $O^{+}(E^{3})$ (разд. 2), в частности, заменив матрицу поворота $\hat{R}$ на триаду $\{\mathbf{E}_i\}$.

Элементы (матрицы) $SO(3)$ отождествляются с элементами $O^{+}(E^{3})$ (триадами $\{\mathbf{E}_i\}$) следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_k = R_{ik}\mathbf{e}_i, \\ R_{ji} = \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{e}_j \rangle, \end{cases}$$

где $\{\mathbf{e}_i\}$ — фиксированный базис инерциальной системы отсчета, а $\{\mathbf{E}_i\}$ — репер, связанный с телом. Предполагается, что ось симметрии тела направлена по вектору $\mathbf{E}_3$. Группа S^1 симметрии тела определяется так:

$$S^1 = \{\hat{B} \in SO(3) : B_{i3} = \delta_{i3}\}.$$

Действие S^1 на исходном фазовом пространстве является частным случаем (1) и имеет вид

$$l_{\hat{B}}((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_i\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})) = ((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_k(\hat{B}^{-1})_{ki}\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})), \ \ \hat{B} \in S^1, \tag{6}$$

причем в силу (1) имеем

$$l_{\hat{B}}((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_i\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})) = ((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_\beta(\hat{B}^{-1})_{\beta 1}, \mathbf{E}_\beta(\hat{B}^{-1})_{\beta 2}, \mathbf{E}_3\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})),$$

$$l_{\hat{B}}((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_i\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})) = ((\mathbf{x}, \{B_{1\beta}\mathbf{E}_\beta, B_{2\beta}\mathbf{E}_\beta, \mathbf{E}_3\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})),$$

$$\alpha, \beta \in 1...2.$$

Тогда проекция π исходного фазового пространства P $(P = T^{*}(SE(3)))$ на Р/**G** $(G = S^1)$ определяется так:

$$\pi((\mathbf{x}, \{\mathbf{E}_i\}), (\mathbf{p}, \mathbf{m})) = ((\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} = \mathbf{E}_3), (\mathbf{p}, \mathbf{m})). \tag{7}$$

В матричном виде эта проекция описывается формулами (8)–(10).

 ISSN 0572-2691

Проекция $SO(3)$ на сферу (как множество единичных векторов)

$$\pi_S : \hat{R} \mapsto \mathbf{v} = R_{i3}\mathbf{e}_i. \tag{8}$$

В качестве матрицы, проецирующейся в заданный вектор $\mathbf{v}$, при $\nu_3 \neq -1$ можно взять

$$\hat{R}(\nu) = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\nu_1^2}{1+\nu_3} & -\dfrac{\nu_1\nu_2}{1+\nu_3} & \nu_1 \\ -\dfrac{\nu_2\nu_1}{1+\nu_3} & 1-\dfrac{\nu_2^2}{1+\nu_3} & \nu_2 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Если же $\nu_3 = -1$, то $\hat{R}$ — это поворот вокруг оси x на угол π:

$$\hat{R}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

При переходе от матрицы $\hat{R}$ к триаде $\{\mathbf{E}_i\}$ СП (5) приобретают вид

$$\begin{cases} \{x_i, \mathrm{E}_j\} = 0, \\ \{p_i, \mathrm{E}_j\} = 0, \\ \{m_i, \mathrm{E}_j\} = -\mathrm{e}_i \times \mathrm{E}_j. \end{cases} \tag{11}$$

Проекция (7) является пуассоновым отображением по теореме 10.5.1 [3, с. 355]. И из (11) очевидно, что они инвариантны относительно действия (6).

Соответствующие СП на $\mathrm{P}/\mathbf{G}$ имеют вид

$$\begin{cases} \{x_i, \mathbf{v}\} = 0, \\ \{p_i, \mathbf{v}\} = 0, \\ \{m_i, \mathbf{v}\} = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{v} \end{cases} \tag{12}$$

или

$$\begin{cases} \{x_i, \nu_k\} = 0, \\ \{p_i, \nu_k\} = 0, \\ \{m_i, \nu_k\} = \varepsilon_{ikl}\nu_l. \end{cases}$$

Отличие от подхода А.В. Борисова и И.С. Мамаева состоит в том, что данная пуассонова структура не постулируется, а выводится из исходной, базовой и общепринятой для описания динамики твердого тела, при этом, например, соотношение $\mathbf{v}^2 = 1$ выполняется в полученной пуассоновой структуре изначально, а не как функция Казимира.

Это пуассоново многообразие $(\mathrm{P}/\mathbf{G})$, как легко видеть, имеет функцию Казимира $\langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle$:

$$\begin{cases} \{\nu_i, \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle\} = \{\nu_i, m_k\nu_k\} = 0, \\ \{m_i, \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle\} = \{m_i, m_k\nu_k\} = 0. \end{cases}$$

Но и эта динамическая переменная (ДП) может быть вычислена как интеграл движения, наследуемый от исходной гамильтоновой системы на основании следствия из теоремы 10.5.1 [3], где дано краткое доказательство того, что в случае **G**-инвариантной функции Гамильтона H на P она определяет соответствующий гамильтониан h $(H = h \circ \pi)$ на P/**G**. Кроме того, гамильтоновы поля X_H на P и X_h на P/**G** π-связаны.

Далее, если имеется сохраняющаяся ДП J на P и она тоже **G**-инвариантна, то соответствующая ДП j на P/**G** тоже сохраняется. В данном случае под это утверждение однозначно подпадает компонента собственного момента тела $\langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle$.

Приведем несколько существенных замечаний о редукции к симметричному волчку. Для того чтобы провести редукцию системы в полной мере, необходимо преобразовать стандартный гамильтониан для твердого тела, а именно вклад в него кинетической энергии собственного вращения тела:

$$T_{\text{spin}}(((\mathrm{x}, \hat{R}), (\mathrm{p}, \mathrm{m}))) = \frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{I}_B^{-1}\mathrm{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_1} + \frac{M_3^2}{I_3}\right),$$

$$\mathbf{M} = \hat{R}^{-1}[\mathbf{m}].$$

Пользуясь тем, что сохраняющаяся компонента собственного момента $\langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle$ является функцией Казимира в приведенном пуассоновом многообразии, модифицируем вклад этой компоненты момента во вращательную энергию таким образом, чтобы она стала функцией полного квадрата момента. Отброшенное при этом слагаемое является функцией Казимира и поэтому не влияет на уравнения движения системы:

$$T_{\text{spin}} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2I_1}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)M_3^2,$$

$$T_{\text{spin}}(((\mathbf{x}, \hat{R}), (\mathbf{p}, \mathbf{m}))) = \frac{1}{2I_1}\mathbf{m}^2 + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)\langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle^2.$$

Таким образом, гамильтониан системы является теперь функцией квадрата вектора момента импульса тела. Это означает, что его вид не зависит от системы отсчета. Значит, матрица перехода $\hat{R}$ от инерциальной системы отсчета к системе отсчета, связанной с телом (и наоборот), уже не входит в гамильтониан. Гамильтониан теперь зависит только от $\mathbf{v}$, т.е. только от третьего столбца матрицы $\hat{R}$, но не от двух первых (эта зависимость обусловлена, например, потенциальной энергией волчка во внешнем поле, но не видом кинетической энергии):

$$h(((\mathbf{x}, \mathbf{v}), (\mathbf{p}, \mathbf{m}))) = \frac{1}{2M}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2I_1}\mathbf{m}^2 + V(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \qquad (13)$$

где M — масса тела.

ISSN 0572-2691

Динамическая система окончательно приведена к переменным приведенного фазового пространства. При этом в данном описании динамики, вообще говоря, явным образом не представлена информация о скорости вращении волчка вокруг оси симметрии. Однако при желании полное описание вращения волчка может быть восстановлено из уравнений

$$\begin{cases} \dot{\hat{R}} = \hat{\omega}\hat{R}, \\ \omega = \hat{R}\mathrm{I}_B^{-1}\hat{R}^{-1}[\mathbf{m}], \end{cases} \tag{14}$$

где I_B — матрица тензора инерции в системе отсчета, связанной с телом, диагональная и постоянная. ДП $\mathbf{m}$ считаются известной функцией времени, найденной из уравнений движения на приведенном фазовом пространстве.

Следует особо отметить, что уравнения в приведенном фазовом пространстве не содержат I_3, но соотношения (14) зависят от этого параметра и полная траектория вращения тела (а не только эволюция оси симметрии волчка) также зависит от него.

На основе формул (12), (13) и теоретико-групповых методов гамильтоновой динамики была исследована динамика и устойчивость движения в некоторых магнитных системах [7–9].

5. Уравнения движения симметричного волчка во внешнем поле

Применяя $\dot{f} = \{f, h\}$ к базовым ДП, получаем

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{1}{M}\mathbf{p}; \\ \mathbf{p} = -\nabla^x V(\mathbf{x}, \mathbf{v}); \\ \mathbf{v} = \dfrac{1}{I_\perp}\mathbf{m}\times\mathbf{v}; \\ \mathbf{m} = \nabla^\nu V(\mathbf{x}, \mathbf{v})\times\mathbf{v}. \end{cases} \tag{15}$$

Интересным развитием предложенной математической модели может стать задача импульсного управления источником аксиально-симметричного внешнего поля для компенсации потерь энергии в связи с воздействием внешних факторов (трение, излучение и др.). Основные подходы и идеи формирования таких математических моделей для задач оптимизации и управления изложены в [10–14].

Заключение

Естественным описанием положения твердого тела является расслоение $O^+(E^3)$. Именно благодаря такому описанию можно внятно объяснить, почему угловой скорости относительно тела соответствует левоинвариантное поле на $SE(3)$. Однако расслоение $O^+(E^3)$ может быть покрыто одной картой, и тогда с помощью этой карты оно может быть отождествлено с группой $SE(3)$. Все необходимые операции над расслоением при этом переходят в групповые операции на $SE(3)$. Именно поэтому, как правило, считают конфигурационным пространством твердого тела группу $SE(3)$. Предложенный подход позволяет получить уравнение движения симметричного волчка во внешнем поле (15).

С.І. Ляшко, С.С. Зуб, В.С. Ляшко, Н.І. Ляшко, А.Ю. Чернявський

РОЗШАРУВАННЯ $O^{+}(E^{3})$ ЯК КОНФІГУРАЦІЙНИЙ ПРОСТІР ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Відомо, що положення твердого тіла однозначно визначено, якщо задано ортонормовану тріаду, яка жорстко зв'язана з тілом. Логічно також припустити, що початок цієї рухомої системи координат розташовано в центрі мас тіла, а одиничні вектори мають напрямки основних осей інерції тіла, тому розшарування $O^{+}(E^{3})$ ортонормованих орієнтованих тріад над тривимірним евклідовим простором E^{3} є природним конфігураційним простором твердого тіла. При такому підході пуассонова редукція фазового простору твердого тіла до симетричної дзиги має чіткий геометричний зміст.

S.I. Lyashko, S.S. Zub, V.S. Lyashko, N.I. Lyashko, A.Yu. Chernyavskiy

LAYERING $O^{+}(E^{3})$ AS CONFIGURATION SPASE WHILE MODELING RIGID BODY

It is known that position of a rigid body is uniquely specified if an orthonormal triad is «frozen» in the body. It is also logical to assume that the origin of this movable reference coordinate system is located in the center of mass of the body, and the unit vectors have directions of the main axes of inertia of the body, so $O^{+}(E^{3})$ bundle of orthonormal oriented triads over E^{3} 3-dimensional Euclidean space is a natural configuration space for a rigid body. Poisson reduction of the phase space of a rigid body to the symmetrical top acquires a clear geometric meaning in this approach.

1. *Борисов А.В., Мамаев. И.С.* Аналитическая динамика. — Москва; Ижевск: НИЦ «Рег. и хаот. дин.», 2001. — 384 с.
2. *Арнольд В. И.* Топологические методы в гидродинамике. — 3-е изд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.
3. *Marsden J.E., Ratiu. T.S.* Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems. — 2nd ed. Texts in Applied Mathematics **17**. — New York : Springer-Verlag, 1999. — 553 p.
4. *Зуланке Р., Вингтен П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. — М. : Мир, 1975. — 348 с.
5. *Зуб С.С.* Группа Ли как конфигурационное пространство для простой механической системы // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — **112**, № 2. — С. 89–99.
6. *Зуб С.С., Зуб С.І.* Канонічна пуассонова структура на $T^{*}SE(3)$ в кватерніонних змінних // Вісник Київського нац. ун-ту. — 2013. — № 2. — С. 17–27.
7. *Zub S.S.* Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies // Proccedings of Sci. (ACAT08). — 2008. — P. 116–121.
8. *Зуб С.С.* Гамильтонов формализм для магнитного взаимодействия свободных тел // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — **102**, № 3. — С. 49–62.
9. *Зуб С.С.* Орбитрон: устойчивость орбитального движения магнитного диполя // Там же. — 2013. — **111**, № 1. — С. 113–128.
10. *Lyashko S.I., Semenov V.V.* Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2001. — **37**, N 1. — P. 13–32.
11. *Lyashko S.I., Nomirovskii D.A.* Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid // Differential Equations. — 2003. — **39**, N 1. — P. 90–98.
12. *Lyashko S.I., Nomirovskii D.A.* The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2003. — **39**, N 5. — P. 737–745.
13. *Abramchuk V.S., Lyashko S.I.* Solution of equations with one variable // J. Math Sci. — 2002. — **109.** — P. 1669–1679.
14. *Klyushin D.A., Lyashko N.I., Onopchuk Yu.N.* Mathematical modeling and optimization of intra-tumor drug transport // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43**, N 6. — P. 886–892.

Получено 20.11.2017