УДК 519.24, 519.65

А.В. Банщиков, А.А. Ветров, А.В. Данеев, В.А. Русанов

К ЮСТИРОВКЕ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТЕ*

Введение

В основе современной орбитальной прецизионной верификации астроприборов [1–5] лежат сложные электронно-механические процессы, что актуализирует вопросы, связанные с разработкой их математических моделей [6]. В данном контексте востребованы регрессионные модели [7], в том числе важный класс образуют регрессионно-тензорные системы [8]. Эти системы, с одной стороны, охватывают полиноминальные модели, допуская аналитическое описание на базе тензорного исчисления [9], сильной дифференцируемости векторных отображений [10] и теории экстремальных задач. С другой стороны, они активно используются [11] в апостериорном многофакторном нелинейном математическом моделировании электронно-механических [12] и оптико-механических систем [13], тем самым обеспечивая (в рамках оптимизации целевого функционала качества приема электромагнитного сигнала) адаптивную настройку параметров, понижающих энергетический уровень боковых лепестков электромагнитных излучателей [8, 11, 14].

В связи с этим основное внимание здесь уделяется задачам, представленным в выводах работы [14], в том числе коррекции целевого функционала интенсивности наблюдаемого сигнала источника электромагнитного излучения (ИЭИ) на геостационарной орбите в регрессионно-тензорном моделировании процесса юстировки пространственно-геометрических параметров ИЭИ. При этом определяются регрессионные интерпретации многосвязных условий, налагаемых сложными ограничениями [15], допускающими на базе матричного анализа [16] построение оптимального режима адаптивной настройки параметров ИЭИ (в частности, геометрии и ориентации его антенны) в терминах математической модели «вход–выход». Прогностическая модель сигнала ИЭИ строится по экспериментальным данным орбитальных верификационных испытаний на основе двухкритериальной идентификации методом наименьших квадратов (МНК) ковариантных тензоров [9] нелинейного уравнения ИЭИ как многомерной тензорной регрессии с минимальной координатно-матричной нормой.

Мотивация, терминология и формулировка задачи

Пусть R — поле вещественных чисел, R^n — n-мерное векторное пространство над R с евклидовой нормой $\|\cdot\|_{R^n}$, $\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n)\in R^n$ — вектор-столбец с элементами $y_1,\ldots,y_n\in R$, $M_{n,m}(R)$ — пространство всех $n\times m$-матриц с элементами из R. Кроме того, примем, что T_m^k — пространство всех ковариантных тензоров k-й валентности, т.е. вещественных полилинейных форм $f^{k,m}:R_1^m\times\ldots$ $\ldots\times R_k^m\to R$ с нормой $\|f^{k,m}\|_{T_m^k}:=\left(\sum t_j^2\right)^{1/2}$, где $\{t_{\ldots j \ldots}\}$ — «матрица координат» [9, с. 246] тензора $f^{k,m}$ относительно канонического базиса в R^m.

---

* Работа выполнена при финансировании РФФИ (проект 16-07-00201), а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-8081.2016.9).

 ISSN 0572-2691

Допустим, в процессе орбитальной юстировки $\{b_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — комплекс стационарных точек наземного приема сигнала ИЭИ, расположенного на геостационарном спутнике (например, системы ГЛОНАСС (глобальная навигационная спутниковая система), т.е. радиус-векторы, соединяющие спутник и точки b_i, постоянны), $\omega \in R^m$ — некоторый фиксированный (опорный) вектор пространственно-угловых параметров антенны ИЭИ [11–15], v — целенаправленная вариация физико-геометрических предикторов [7] в процессе прецизионной настройки, $w(\omega + v) \in R^n$ — вектор прогностической интенсивности калибровочного сигнала ИЭИ, измеряемого в точках зондирования.

В такой постановке для компактного описания нелинейного адаптивного процесса параметрической орбитальной юстировки ИЭИ рассмотрим многомерную прогностическую систему «вход–выход», описываемую векторно-тензорным k-валентным уравнением многофакторной регрессии вида

$$w(\omega + v) = \operatorname{col}\left(\sum_{j=0,\ldots,k} f_1^{j,m}(v,\ldots,v),\ldots, \sum_{j=0,\ldots,k} f_n^{j,m}(v,\ldots,v) \right) + \varepsilon(\omega, v). \tag{1}$$

Здесь $f_i^{j,m} \in T_m^j$, $\varepsilon(\omega,\cdot): R^m \to R^n$ — непараметризируемая вектор-функция класса

$$\|\varepsilon(\omega, v)\|_{R^n} = o((v_1^2 + \ldots + v_m^2)^{k/2}), \tag{2}$$

$v = \operatorname{col}(v_1,\ldots,v_m)$, $f_i^{0,m}$ — тензор «ранга 0», представляющий интенсивность сигнала w_i, $i = \overline{1,n}$, в режиме ω орбитальной электронно-геометрической настройки передающей антенны ИЭИ.

Замечание 1. Прецизионность моделирования многофакторной орбитальной юстировки физико-геометрических параметров ИЭИ в классе регрессионно-тензорных систем (1) корректна в силу непрерывной зависимости [10, с. 495] решений дифференциального уравнения электродинамики от его начально-краевых условий. Тензорная структура уравнения (1) возникает в соответствии с теоремой 3 [17, с. 255] и полилинейным характером [10, с. 490] производных Фреше высших порядков при вычислении сильных дифференциалов в точке ω от вектор-функции $w(\cdot) = \operatorname{col}(w_1(\cdot),\ldots,w_n(\cdot))$. В конечном счете это подытоживается утверждением 1 из [14] (см. ниже задачу (I)). При этом оценка точности моделирования (2) представляется как остаточный член в форме Пеано [9, с. 287], связанный с показателем k-валентности системы (1).

Задача многомерного нелинейного регрессионно-тензорного моделирования многофакторного оптимального процесса орбитальной калибровки ИЭИ поставлена и подробно исследована в [11, 14] для 2-валентной модели (1). При этом получены аналитические решения для трех методологических позиций данной задачи:

I) для фиксированного вектор-предиктора $\omega \in R^m$ и его открытой окрестности $V \subset R^m$ определены аналитические условия, при которых вектор-функция $w(\cdot): V \to R^n$ показателей интенсивности калибровочного сигнала ИЭИ в точках зондирования b_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяет регрессионной системе (1);

II) построен прямой алгоритм идентификации координат тензоров $f_i^{j,m}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,2}$, в 2-валентной регрессионно-тензорной модели (1) на базе решения двухкритериальной МНК-задачи вида

$$\begin{cases} \min\left(\sum\limits_{l=1,\dots,q}\left(\left\| w_{(l)} - \mathrm{col}\left(\sum\limits_{j=0,\dots,k} f_1^{j,m}(v_{(l)},\dots,v_{(l)}),\dots,\sum\limits_{j=0,\dots,k}\right)\right\|_{R^n}\right)^2\right)^{1/2}, \\ \min\left(\sum\limits_{i=1,\dots,n}\ \sum\limits_{j=0,\dots,k}\| f_i^{j,m}\|^2_{T_m^j}\right)^{1/2}, \end{cases} \tag{3}$$

где $w_{(l)} \in R^n,\ v_{(l)} \in R^m,\ l = \overline{1, q},$ — соответственно векторы экспериментальных фактор-предикторов ИЭИ, т.е. $w_{(l)}$ — апостериорная «реакция» на целевую «вариацию» $v_{(l)}$ относительно координат опорного вектора ω при условии $\| v_{(l)} \|_{R^m} < 1$ (данное неравенство методологически диктуется условием (2)), q — число проведенных орбитальных экспериментов (определяется репрезентативностью модели (1)), проводимых с учетом динамических характеристик ИЭИ [18, 19];

III) для 2-валентной регрессионно-тензорной модели (1) при заданном предикторе $\omega \in R^m$ и номинальном условии $\varepsilon(\omega,\cdot) \equiv 0$ получено аналитическое решение задачи орбитальной калибровки как нелинейной «v-оптимизации» варьируемых (относительно вектора ω) фактор-предикторов настраиваемых физико-геометрических параметров ИЭИ:

$$\max_{v\in R^m} F(v) := r_1 w_1(\omega + v) + \ldots + r_n w_n(\omega + v), \tag{4}$$

где вектор-функция $v \mapsto w(\omega+v) = \mathrm{col}(w_1(\omega+v),\dots, w_n(\omega+v))$ имеет координатное представление согласно МНК-идентифицированной модели (1)–(3), $r_i > 0$ — весовые коэффициенты, отражающие приоритет наземных точек $b_i,\ i = \overline{1, n},$ зондирования сигнала ИЭИ. Можно исследовать задачу оптимизации (III) при некоторых $r_j < 0,$ что физически отвечает положению, когда в точках b_j надо ослабить прием ИЭИ-сигнала.

Значение нелинейного многофакторного регрессионно-тензорного моделирования не только в точных теоремах, которые уже получены этим методом [8, 11, 14], но и в простых и наглядных эвристических правилах (например, условие проведения экспериментов $\| v_{(l)} \|_{R^m} < 1$ или $n = m$ в следующем ниже следствии 2), участвующих в построении оптимального многомерного апостериорного моделирования. Со временем эти правила будут доведены до уровня строгих теорем регрессионного анализа, но уже сейчас их польза несомненна.

Постановка задачи (по выводам работы [14]):

(i) определить необходимые и достаточные условия разрешимости оптимизационной задачи (4) для 3-валентной модели (1);

(ii) построить алгоритм коррекции достаточных условий экстремума стационарной точки задачи (i) на основе r-параметрической настройки $r \mapsto r^{\mathrm{T}} w(\omega + v)$ функционала

$$v \mapsto F(v) = r^{\mathrm{T}} w(\omega + v). \tag{5}$$

Оптимизация процесса юстировки параметров ИЭИ

Рассмотрим задачу (i) — оптимизацию процесса юстировки параметров ИЭИ для модели (1) с $k = 3.$ Отметим, что решение сопутствующей задачи идентификации (II) при $k = 3$ составляет модификация утверждения 2 из [14] (см. также [20]).

В такой математической постановке нелинейное прогностическое уравнение (1) можно подать в следующей векторно-матрично-тензорной форме:

$$w(\omega+v)=c+Av+\operatorname{col}(v^{\mathrm T}B_1v+f_1^{3,m}(v,v,v),\ldots,v^{\mathrm T}B_nv+f_n^{3,m}(v,v,v))+\varepsilon(\omega,v), \quad (6)$$

где $c\in R^n,\ A\in M_{n,m}(R),\ B_i\in M_{m,m}(R),\ i=\overline{1,n}.$ Не теряя общности, считаем, что каждая матрица B_i имеет верхнюю треугольную структуру; это упрощает реализацию МНК-алгоритма (3). Дополнительно отметим, что вектор-функция $\varepsilon(\omega,\cdot):R^m\to R^n$ удовлетворяет (согласно (2)) качественной оценке $\|\varepsilon(\omega,v)\|_{R^n}=$ $=o((v_1^2+\ldots+v_m^2)^{3/2})$.

Согласно (1) при $k=3$ функционал электромагнитной наблюдаемости (5) дважды непрерывно дифференцируем, что гарантирует равенство смешанных производных

$$\partial^2F(v_1,\ldots,v_m)/\partial v_g\partial v_p=\partial^2F(v_1,...,v_m)/\partial v_p\partial v_g \quad \forall g,\ p=\overline{1,m}. \quad (7)$$

Поэтому в решении оптимизационной задачи (4) для 3-валентной модели (6) основным результатом согласно теореме 3 [10, с. 505] и теореме 7.2.5 [16] можно считать следующее ниже утверждение. Но вначале предварительно условимся, что $B_i^*:=(B_i+B_i^{\mathrm T})\in M_{m,m}(R),\quad i=\overline{1,n},$ где каждая B_i — матрица системы (6) (матрица тензора $f_i^{2,m}$ в постановке, когда он рассматривается в системе (1) не как симметричный). Кроме того, рассмотрим вектор-функцию

$$v\mapsto\Phi(v):=(r_1B_1^*+\ldots+r_nB_n^*)^{-1}(A^{\mathrm T}+[\nabla_v f_1^{3,m}(v,v,v),\ldots,\nabla_v f_n^{3,m}(v,v,v)])r,$$

где $\nabla_v f_i^{3,m}(v,v,v)$ — градиент функционала $v\mapsto f_i^{3,m}(v,v,v)$.

Утверждение 1. Стационарные точки $v^*\in R^m$ задачи (i) — решения уравнения

$$v^*+\Phi(v^*)=0. \quad (8)$$

При этом достаточным условием $F(v^*)=\max\{F(v):v\in R^m\}$ является требование, чтобы v^* как стационарная точка функционала (5) была эллиптического типа. Другими словами, в точке v^* для гессиана $G(v,r)$ функционала (5) должны выполняться неравенства

$$\det[b_{ij}]_p<0,\quad p=\overline{1,m}, \quad (9)$$

где $[b_{ij}]_p\in M_{p,p}(R),\ p=\overline{1,m},$ — главные подматрицы гессиана

$$G(v^*,\ r)=r_1(B_1^*+[\partial^2 f_1^{3,m}(v,v,v)/\partial v_g\partial v_p\big|_{v^*}])+\ldots$$
$$\ldots+r_n(B_n^*+[\partial^2 f_n^{3,m}(v,v,v)/\partial v_g\partial v_p\big|_{v^*}])\in M_{m,m}(R),$$

что эквивалентно следующему: характеристические числа $\lambda_p(v^*,\ r)$ матрицы $G(v^*,\ r)$ удовлетворяют

$$\lambda_p(v^*,\ r)<0,\quad p=\overline{1,m}. \quad (10)$$

Следствие 1. Для варианта $k=2$ гессиан функционала (5) и условия (9), (10) инвариантны к положению стационарной точки v^*, при этом гессиан равен

$$G(r)=r_1B_1^*+\ldots+r_nB_n^*,$$

что приводит к линейной зависимости чисел $\lambda_p(r),\ p=\overline{1,m},$ от нормировки вектора r.

Если $\operatorname{rank} G(r) = m,$ то решение уравнения (8) единственно и имеет вид

$$v^* = -G^{-1}(r) A^{\mathrm{T}} r,$$

что делает инвариантным положение точки v^* к нормировке вектора r.

Согласно вектор-функциям $\nabla_v f_i^{3,m}(v, v, v)$ уравнение (8) геометрически определяется пересечением m квадрик [17, с. 219]. Локальный анализ можно проводить на базе принципа неподвижной точки [9, с. 286]. При этом, если неравенства (9) (равносильно (10)) не выполняются, т.е. хотя бы в одном из них происходит смена знака на противоположный, то стационарная точка v^* является гиперболической (седловой). С другой стороны, смена неравенства < на рефлексивное ≤ (т.е. $\operatorname{rank} G(v^*, r) < m$) вызывает для v^* структуру параболической точки. Таким образом, в случае седловой/параболической точки v^* для обеспечения ее эллиптического характера (10) требуется целенаправленная параметрическая коррекция функционала (5). Ясно, что такая коррекция может сместить положение стационарной точки, т.е. после этой коррекции требуется уточняющий пересчет v^* (в силу следствия 1 такой пересчет при $k = 2,$ в свою очередь, уже не влечет изменение спектра (10) гессиана $G(r)$).

Одним из факторов, влияющих на геометрию стационарной точки v^* утверждения 1, является цифровая адаптивная параметрическая настройка $r \mapsto G(v^*, r),$ приводящая к выполнению эллиптических условий (9) или (10).

Адаптация целевого функционала на *r*-параметрическом семействе его гессианов

Рассмотрим постановку (ii): для стационарной точки задачи оптимизации (i) построить численную процедуру коррекции весовых коэффициентов $r \in R^n,$ исходя из выполнения спектральных условий (10), т.е. обеспечения эллиптического характера стационарной точки v^* утверждения 1. Данная постановка актуальна в задаче орбитальной калибровки параметров ИЭИ, когда в некоторых наземных точках b_j надо ослабить (т.е. $r_j < 0$) прием ИЭИ-сигнала.

Замечание 2. Несмотря на алгебраическую эквивалентность условий (9), (10), использование в построении адаптивной коррекции $r \mapsto G(v^*, r),$ разложение определителей (9) почти неизбежно обречено на неудачу (даже средствами компьютерной алгебры) вследствие большого количества членов, выражаемых коэффициентами многомерной регрессии.

Условия разрешимости задачи, подобной (ii), удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому ниже обсудим подход к этой проблеме, основанный на идеях теории локализации и возмущений собственных значений [16]. Другим важным математическим инструментом представляется трансформация условий (10) к проблеме «квадратичной» устойчивости [6, 18] путем построения функции Ляпунова в аффинном семействе гессианов оптимизационной задачи (i) на том основании, что это семейство благодаря структуре функционала (5) явно зависит от вариаций координат вектора $r \in R^n$.

Пусть задан некоторый начальный вектор $r_0 \in R^n$ весовых коэффициентов из постановки (ii). Например, эвристический выбор r_0 может осуществляться из равенства его координат $r_{0i}, i = \overline{1, n},$ значениям некоторых функций $\Psi_i : R \to R,$ зависящих от величин функционалов $J_i(v) := w_i(\omega + v),\ i = \overline{1, n},$ из вспомогательных задач оптимального прогнозирования качества орбитальной юстировки ИЭИ по отдельным целевым показателям w_i. В частности, при 2-валентной модели регрессии (1) это положение, согласно следствию 2 из [14], будет характеризовать следующее.

Утверждение 2. Если максимальная валентность тензоров k равна двум, то вектор начальных весовых коэффициентов $r_0 = \mathrm{col}(r_{01}, \ldots, r_{0n})$ с координатами

$$r_{0i} = \Psi_i(z_i),\ z_i = \max\{J_i(v) : v \in R^m\},\ i = \overline{1, n},$$

имеет аналитическое представление

$$r_0 = \mathrm{col}(\Psi_1(c_1 - e_1^{\mathrm{T}} A B_1^{*-1} A^{\mathrm{T}} e_1 / 2), \ldots, \Psi_n(c_n - e_n^{\mathrm{T}} A B_n^{*-1} A^{\mathrm{T}} e_n / 2)),$$

где $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — канонический базис в R^n.

Обозначим $v^0 \in R^m$ некоторую стационарную точку функционала (5), когда r-приоритет точек зондирования равен r_0. Соответственно обозначим $G_0 \in M_{m,m}(R)$ гессиан данного функционала, вычисленный для пары (r_0, v^0), и пусть

$$G_i := B_i^* + [\partial^2 f_i^{3,m}(v, v, v) / \partial v_g \partial v_p \big|_{v^0}],\ i = \overline{1, n}.$$

Тогда для допустимой линейной вариации Δr координат вектора $r_0 = \mathrm{col}(r_{01}, \ldots, r_{0n}),$ задаваемой (в силу комментариев к формуле (4)) областью этой вариации $W \subset R^n$ вида

$$\Delta r := \mathrm{col}\left(\Delta r_1, \ldots, \Delta r_n\right) \in W,$$

$$r_i = r_{0i} + \Delta r_i > 0,\ i = \overline{1, n},$$

Δr-параметрическое семейство линейных вариаций гессиана $G(v^0,\ r_0 + \Delta r)$ определяется матричным $m \times m$-многообразием вида

$$G_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} \Delta r_i G_i,\ \Delta r \in W. \tag{11}$$

В силу (7) матрицы семейства (11) симметричны.

Для матриц многообразия (11) собственные значения можно охарактеризовать как ряд задач оптимизации посредством теоремы Куранта–Фишера [16]. С другой стороны, в основе аналитических приложений этой теоремы лежат рассуждения теоремы Вейля [16] о связях между характеристическими числами гессиана G_0 и любой матрицы из многообразия (11), что позволяет прояснить геометрический смысл проводимых ниже построений линейной Δr-коррекции $\Delta r \mapsto (r_0 + \Delta r)^{\mathrm{T}} w(\omega + v)$ целевого функционала (5).

С учетом введенных конструкций адаптивная настройка функционала прогностической электромагнитной наблюдаемости $F(v) = r^{\mathrm{T}} w(\omega + v),$ обеспечивающая при варьировании вектора $r \in R^n$ в стационарной точке выполнение неравенства (10), содержит еще одно утверждение. По существу это утверждение представляет модификацию (в варианте сильной производной $dG(v^0,\ r) / dr\big|_{r_0}$) теоремы 6.3.12 [16] на базе теоремы 2 [10, с. 491] и теоремы 4.1.3 [16], учитывающей структуру многообразия (11), как симметричных матриц.

Утверждение 3. Пусть $r = r_0 + \Delta r$, $\{(\lambda_p(r_0), x_p),\ p = \overline{1, m}\} \subset R \times R^m$ — множество собственных пар гессиана G_0, т.е. $\lambda_p(r_0)\, x_p = G_0 x_p$, $p = \overline{1, m}$, и из реализации многообразия (11) заданы числа

$$g_{pi} = x_p^{\mathrm{T}} G_i x_p \,/\, x_p^{\mathrm{T}} x_p, \quad p = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда собственные значения $\lambda_p(v^0,\ r_0 + \Delta r),\ p = \overline{1, m}$, гессиана $G(v^0,\ r_0 + \Delta r)$ имеют вид

$$\begin{array}{l} \lambda_1(v^0,\ r_0 + \Delta r) = \lambda_1(r_0) + \sum\limits_{i=1,\ldots,n} g_{1i} \Delta r_i + o(\|\Delta r\|_{R^n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_m(v^0,\ r_0 + \Delta r) = \lambda_m(r_0) + \sum\limits_{i=1,\ldots,n} g_{mi} \Delta r_i + o(\|\Delta r\|_{R^n}). \end{array} \tag{12}$$

Система (12) дает оценку чувствительности спектра гессиана $G(v^0,\ r_0 + \Delta r)$ к линейным вариациям $\Delta r_i,\ i = \overline{1, n}$, весовых коэффициентов. Для нелинейных вариаций см. рекуррентные формулы из п. (б) [17, с. 154], поддающиеся символьным вычислениям [6]. Разумеется, этот анализ приближенный (справедлив при небольших значениях $\|\Delta r\|_{R^n}$). Особенно он эффективен для 2-валентной модели при $n = m$ (данное равенство нетрудно реализовать в силу относительной вариативности числа точек наземного зондирования).

Следствие 2. Пусть $k = 2,\ n = m,\ \Lambda(r_0) := \mathrm{col}(\lambda_1(r_0), \ldots, \lambda_m(r_0))$ — вектор характеристических чисел матрицы $(r_{01} B_1^* + \ldots + r_{0m} B_m^*)$ и $\{x_p\}_{p=\overline{1,m}}$ — соответствующие им собственные векторы. Кроме того, пусть $\Lambda^* := \mathrm{col}(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ — некоторый вектор характеристических чисел, «эталонных/образцовых» по критерию (10), и $B := [b_{pi}]$ — $m \times m$-матрица с элементами

$$b_{pi} = x_p^{\mathrm{T}} B_i^* x_p \,/\, x_p^{\mathrm{T}} x_p.$$

Тогда для $r_0 + \Delta r$, где вектор вариации имеет представление $\Delta r = B^{-1}(\Lambda^* - \Lambda(r_0))$, собственные значения гессиана $G(r_0 + \Delta r)$ будут $o(\|\Delta r\|_{R^n})$-близки к эталонным $\{\lambda_p^*\}_{p=\overline{1,m}}$.

Замечание 3. Поскольку следствие 2 справедливо при малом $\|\Delta r\|_{R^m}$, остается открытым вопрос, будет ли сходиться итерационный вычислительный процесс

$$r_j = (r_{j-1} + \Delta r_{j-1}) \in R^m, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

построенный из расчета $\Delta r_{j-1} = B^{-1}(\Lambda^* - \Lambda(r_{j-1}))$, если начальное расхождение $\|\Lambda^* - \Lambda(r_0)\|_{R^m}$ достаточно значительно. При этом согласно структуре целевого функционала (5) на каждом итерационном шаге j для координат вектора $r_j \in R^m$ необходима (в рамках физической установки задачи (4)) проверка координатных условий $r_{ij} > 0,\ i = \overline{1, n}$.

Для адаптивных систем оценка задающих сигналов (в нашем случае $\|v_{(l)}\|_{R^m} < 1$ в (3)) имеет существенное значение (именно поэтому используются адаптивные технологии с обучением). В данном контексте важно получить достаточные условия для того, чтобы адаптивная система имела робастные ограниченные решения [21], при этом сам факт существования задающих решений, удовлетворяющий этим свойствам, оказывается более важным (2), чем их конкретные решения. Таким образом, фиксированная установка параметров, обеспечивающая качественное (10) управление прогностической системой (1), не очень чувствительная к точному значению параметров, может дать ряд возможных значений Δr, позволяя определить оптимальные значения v, гарантирующие качество (4).

В контексте замечания 3 приведем результат вычисления верхней оценки для возмущения $\|\Delta r\|_{R^m}$. Примем, что $\|\cdot\|_M$ — матричная норма в $M_{m,m}(R)$, согласованная с нормой в евклидовом пространстве $\|\cdot\|_{R^m}$, причем $\|E\|_M = 1$, $E \in M_{m,m}(R)$ — единичная матрица. Например, фробениусова норма $\|D\|_F := \left(m^{-1}\sum d_{ij}^2\right)^{1/2}$, $D = [d_{ij}] \in M_{m,m}(R)$ или спектральная (индуцированная) матричная норма

$$\|D\|_S := \sup\{\|Dx\|_{R^m} : x \in R^m, \|x\|_{R^m} = 1\} = \max_{1 \le i \le m} \lambda_i^{1/2}(D^{\mathrm{T}}D).$$

Возвращаясь к следствию 2, имеем $B\Delta r = \Lambda^* - \Lambda(r_0)$, $\det B \ne 0$. Теперь предположим, что вектор характеристических чисел $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$ переходит в возмущенный вектор $\Lambda^* - \Lambda(r_0) + \delta$ (в частности, за счет членов $o(\|\Delta r\|)_{R^m}$ системы (12)), а матрица B — в $B + D$. Тогда вектор Δr получит (в силу модификации следствия 2) некоторое приращение θ, переходя к значению $\Delta r + \theta$, которое удовлетворяет уравнению $(B + D)(\Delta r + \theta) = \Lambda^* - \Lambda(r_0) + \delta$.

Очевидно, что $\delta \in R^m$, $D \in M_{m,m}(R)$ моделируют возмущения вектора $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$, а также неточность параметрической оценки матрицы B (если $\|D\|_M \|B^{-1}\|_M < 1$, то $\|D\|_M < \|B\|_M$ [22, с. 197]). Результат вычисления верхней оценки возмущения $\|\theta\|_{R^m} / \|\Delta r\|_{R^m}$ формулирует следующее следствие. Технические детали сопутствующих выкладок с использованием конструкции условного числа матрицы см. в [22, с. 197].

Следствие 3. Пусть к предположениям следствия 2 добавлено $s(B) := = \|B\|_M \|B^{-1}\|_M$ — условное число матрицы B, где $\|\cdot\|_M$ — норма $\|\cdot\|_F$ или $\|\cdot\|_S$. Тогда для $\theta, \Delta r$ справедлива оценка

$$\|\theta\|_{R^m} / \|\Delta r\|_{R^m} \le s(B)(1 - s(B)\|D\|_M / \|B\|_M)^{-1} \times$$
$$\times (\|\delta\|_{R^m} / \|\Lambda^* - \Lambda(r_0)\|_{R^m} + \|D\|_M / \|B\|_M).$$

Если $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_S$ и λ_1, λ_m — соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $B^{\mathrm{T}}B$, то в последнем неравенстве можно считать $s(B) = (\lambda_m / \lambda_1)^{1/2}$.

Замечание 4. Конструкция условного числа $s(B) = (\lambda_m / \lambda_1)^{1/2}$, полученного с использованием спектральной нормы $\|\cdot\|_S$, прозрачна в силу равенства $s(B) = = \|B\|_S \|B^{-1}\|_S$.

Альтернативой учета помех, не только охватываемых следствием 3, могут служить подходы [23–27], предполагающие глубокое проникновение (посредством компьютерной алгебры) в физическое содержание предмета.

Заключение

Цель статьи — основываясь на результатах из [14], указать на связь, существующую между задачей определения значения матричной функции–гессиана в стационарной точке целевого функционала (5) и вектором r весовых коэффициентов в (5), отражающих приоритет между w_i — моделируемыми прогнозами сигнала ИЭИ в заданном комплексе наземных точек. В данном контексте утверждение 1 и следствие 1 показывают, что, в отличие от 3-валентной, в 2-валентной регрессионно-тензорной модели гессиан $G(v, r)$ инвариантен к положению стационарной точки. При этом оба варианта позволяют выявить r-зависимость спектра гессиана $G(v, r)$ на базе нелинейной многомерной регрессионной модели электромагнитной наблюдаемости, идентифицированной в рамках двухкритериальной МНК-задачи (II).

В утверждении 3, по существу, спрашивалось, что можно сказать о собственных значениях матрицы $G_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} \Delta r_i G_i$, если каждая вариация Δr_i — малый параметр? Таким образом, нас интересовала лишь сугубо формальная сторона исследуемой задачи, когда не рассматривается вопрос о том, каким должно быть реальное значение приращения Δr_i, чтобы термин «малый параметр» был действительно уместен. При этом результат утверждения 3 основан на том, что собственные значения (10) непрерывно r-зависимы от элементов гессиана $G(v, r)$ в процессе текущей параметрической r-коррекции целевого функционала (5). Однако следует заметить, что некоторая информация утрачивается, когда имеем дело лишь с характеристическим многочленом, ибо существует много различных матриц с заданным характеристическим полиномом. Поэтому не удивительно, что более сильные результаты по моделированию спектра гессиана $G(v, r)$, в частности утверждение 3 и следствие 2, учитывают строение $G(v, r)$. Последние допускают технические упрощения средствами специализированной компьютерной алгебры [6, 18], исходя из того, что любая матрица–гессиан ортогонально подобна вещественной диагональной матрице.

Численные методы отыскания собственных значений и собственных векторов представляют собой один из наиболее важных разделов теории матриц. Выше не затрагивались какие-либо стороны этой темы при анализе вектора $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$ и матрицы B из следствия 2, но следствие 3 дает верхнюю оценку для возмущения Δr через относительные возмущения $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$, B и условное число $s(B)$. При этом $s(B)$ участвует в оценке во всех случаях, будут ли возмущения происходить только в $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$, только в B или в $\Lambda^* - \Lambda(r_0)$ и B одновременно.

В завершение обозначим иной подход к адаптивной коррекции $r \mapsto r^{\mathrm{T}} w(\omega + v)$, связанный с использованием для 2-валентной модели достаточных условий робастной устойчивости матрицы $G(r)$, что тоже приводит к условиям (10). В данном контексте требуется, чтобы при интервальных допусках на координаты вектора r можно было построить функцию Ляпунова $V(x) = x_p^{\mathrm{T}} P x_p$, где $P \in M_{m,m}(R)$ — симметричная положительно-определенная матрица, для которой уравнение Ля-

 ISSN 0572-2691

пунова $G(r)P + PG(r) = -Q$ имеет решение при заданной симметричной положительно-определенной $m \times m$-матрице Q. Переход к адаптивно-робастной квадратичной устойчивости и методы ее решения предложены в [21, 23]. Эта теория благодаря огромному количеству имеющихся в ней вычислительных задач, а также вследствие возможностей, которые она открывает для приложений нелинейного многомерного регрессионно-тензорного анализа, может иметь большое (расширенное) значение в задачах прецизионной многофакторной орбитальной верификации сложных комплексно-сопряженных астроприборов, в том числе системы ГЛОНАСС.

А.В. Банщиков, О.А. Вєтров, О.В. Данєєв, В.А. Русанов

ДО ЮСТИРОВКИ ПАРАМЕТРІВ ДЖЕРЕЛА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ГЕОСТАЦІОНАРНІЙ ОРБІТІ

Досліджено багатовимірну нелінійну регресійно-тензорну модель в обґрунтуванні необхідних і достатніх умов оптимального багатофакторного процесу прецизійної калібровки параметрів електромагнітного джерела випромінювання на геостаціонарній орбіті (в тому числі, системи ГЛОНАСС). Запропоновано робастно-адаптивну стратегію апостеріорного формування цільового функціонала електромагнітної спостережуваності зважено-розподільного сигналу в фіксованому комплексі стаціонарних наземних точок на основі спостережень цього сигналу, виконаних з похибкою.

A.V. Banshchikov, A.A. Vetrov, A.V. Daneev, V.A. Rusanov

TO THE HIGH-PRECISION ADJUSTMENT OF THE SOURCE OF ELECTROMAGNETIC RADIATION IN THE GEOSTATIONARY ORBIT

The paper studies a multivariate non-linear regression-tensor model in the substantiation of necessary and sufficient conditions of the optimal multi-factorial process precision calibration of the parameters of the electromagnetic radiation source in the geostationary orbit (for example, satellite of system GLONASS). The paper proposes a robust-adaptive strategy of a posteriori formation of the target functional of the electromagnetic observability balanced-distributed signal in a fixed unit of fixed ground points on the basis of observations of this signal, executed with an error.

1. *Управление* движением космического платформенного комплекса. V. Алгоритмы юстировки комплекса / И.Н. Алешин, В.В. Батурин, А.В. Молоденков и др. // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 3. — С. 132–139.
2. *Tanaka H.* Surface error estimation and correction of a space antenna based on antenna gain-analyses // Acta Astronautica. — 2011. — **68**, N 7. — P. 1062–1069.
3. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Параметрическая юстировка комплекса «камера и звездный датчик», установленного на низкоорбитальном космическом аппарате // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 2. — С. 153–165.
4. *Митрохин В.Н., Можаров Э.О.* Радиоголографический метод контроля профиля параболических зеркальных антенн по электромагнитному полю в ближней зоне // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2015. — № 4. — С. 81–95.
5. *Ткаченко А.И.* Усовершенствование методики полетной геометрической калибровки с использованием неизвестных ориентиров // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 2. — С. 112–121.
6. *Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычислительные технологии. — 2014. — **19**, № 6. — С. 3–18.

7. *Дрейпер Н.Р., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. — 912 с.
8. *Козырев В.А., Куменко А.Е., Рудых А.Г., Русанов В.А.* Нелинейный регрессионно-тензорный анализ оптимальной установки электромагнитного источника излучения при несанкционированном сканировании его электромагнитного поля // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2010. — **53**, № 10. — С. 10–17.
9. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. — М. : Наука, 1969. — 476 с.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1976. — 544 с.
11. *Русанов В.А., Данеев Р.А.* Об адаптивной настройке параметров источника электромагнитного излучения на геостационарной орбите // Управляющие системы и машины. — 2014. — № 6. — С. 12–17.
12. *Каршаков Е.В.* Задача калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 250–268.
13. *Демин А.В., Менделеева Л.М.* Алгоритм юстировки составных зеркал высокотемпературных телескопов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2014. — **57**, № 1. — С. 51–56.
14. *On adaptive* adjustment of parameters for the source of electromagnetic radiation on a geostationary orbit / V.A. Rusanov, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev, A.E. Kumenko, A.A. Vetrov // Far East Journal of Electronics and Communications. — 2016. — **16**, N 3. — P. 685–701.
15. *Гряник М.В., Ломан В.И.* Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. — М. : Радио и связь, 1987. — 72 с.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М. : Мир, 1989. — 656 с.
17. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. — М. : Наука, 1986. — 304 с.
18. *Банщиков А.В.* Анализ динамики механических систем большой размерности средствами компьютерной алгебры // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — **12**, № 3. — С. 15–27.
19. *A posteriori* simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat / V.A. Rusanov, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev, A.A. Vetrov, V.A. Voronov // Far East Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — **101**, N 9. — P. 2079–2094.
20. *Статников Р.Б., Матусов И.Б.* О решении задач многокритериальной идентификации и доводки опытных образцов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2012. — № 5. — С. 20–29.
21. *Ackerman J.* Robust control: systems with uncertain physical parameters. — New York : Springer-Verlag, 1993. — 404 p.
22. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М. : Наука, 1982. — 270 с.
23. *Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P.* Computational complexity and feasibility of data processing and interval computational. — Dordrecht : Kluwer, 1998. — 472 p.
24. *Домрачев В.Г., Полещук О.М.* О построении регрессионной модели при нечетких исходных данных // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 11. — С. 74–83.
25. *Сальников Н.Н., Сирик С.В.* Алгоритм оценивания параметров линейной регрессии при ограниченных помехах в измерениях всех переменных // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 35–48.
26. *Потапов А.А.* Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах. — В кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. — М. : Техносфера, 2006. — С. 374–457.
27. *Ковель А.А., Покидько С.В.* Математическое планирование эксперимента при отработке электронных элементов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2008. — **51**, № 8. — С. 13–17.

Получено 17.10.2017