УДК 519.21+62

А.В. Никитин

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ В СХЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ ЛЕВИ

Введение

Важным свойством динамических систем является диссипативность, рассмотренная, в частности, в работах Р.З. Хасьминского и В.А. Плисса. В математических терминах понятие диссипативности детерминированной системы введено Н. Леймнсоном, Р. Рейссигом, Г. Сансонсом и Р. Конти. Японский математик Т. Йошизава Т. предложил критерии диссипативности систем, в которых используется устойчивость по Ляпунову. В работах Р.З. Хасьминского проанализирована диссипативность детерминированных и стохастических систем, основанная на использовании свойств функции Ляпунова детерминированной системы.

В то же время анализ асимптотических характеристик случайных эволюций под влиянием равномерно эргодического марковского процесса проведен в работах [1–3]. В частности, рассмотрена устойчивость, сходимость к точке равновесия и асимптотическая нормальность таких процессов.

Таким образом, анализ диссипативности диффузионных процессов с марковскими переключениями в схеме серий с малым параметром является актуальным [4–6]. Случайные процессы с марковскими переключениями позволяют рассмотреть более широкий класс прикладных задач с точки зрения разработки методов моделирования и анализа таких систем.

В работе [7] изучен вопрос асимптотического поведения стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде. Показано, что предельный процесс $\widehat{u}(t)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$d\widehat{u}(t)=[\widehat{C}(\widehat{u}(t))+\widetilde{a}]dt+\sigma dw(t)+\int_R v\,\widetilde{\nu}(dt,dv).$$

Таким образом, возникает важный вопрос о том, как поведение предельного процесса зависит от допредельной нормированной стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде. В настоящей статье изучен вопрос асимптотической диссипативности допредельной системы в схеме аппроксимации Леви.

1. Постановка задачи

Стохастическая эволюционная система в эргодической марковской среде определяется стохастическим дифференциальным уравнением [8]

$$du^{\varepsilon}(t)=C(u^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^2))dt+d\eta^{\varepsilon}(t),\quad u^{\varepsilon}(t)\in R, \tag{1}$$

где $u^{\varepsilon}(t)$ — случайная эволюция, $t \geq 0$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр серий; $C(u,\cdot) \in C^2(R^d)$ — функция регрессии; $x(t)$ — равномерно эргодический марковский процесс в стандартном фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$, который определен генератором [1]

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

на банаховом пространстве $B(X)$ ограниченных функций $\varphi(x)$ с действительными значениями и супремум-нормой $\|\varphi\| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$ [2].

Стохастическое ядро $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$, определяет равномерно эргодическую вложенную цепь Маркова $x_n = x(\tau_n)$ со стационарным распределением $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стационарное распределение $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, марковского процесса $x(t), t \geq 0$, определено соотношением [2]

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \quad q = .\int_X \pi(dx)q(x).$$

Обозначим R_0 потенциальный оператор генератора $\mathbf{Q}$, который определен равенством [3]: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, где $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)\mathbf{1}(x)$ — проектор на подпространство $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$.

2. Импульсный процесс возмущений

Импульсный процесс возмущений $\eta^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, в схеме аппроксимации Леви определяется соотношением

$$\eta^{\varepsilon}(\mathrm{t}) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(ds, x(s/\varepsilon^2)),$$

где совокупность процессов с независимыми приращениями $\eta^{\varepsilon}(t, x), t \geq 0, x \in X$, определяется генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(\omega) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(\omega + v) - \varphi(\omega))\Gamma^{\varepsilon}(dv, x), \; x \in X, \tag{2}$$

и удовлетворяет условиям аппроксимации Леви.

L1: Аппроксимация средних

$$\int_R v\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x) + \theta_a(x)), \;\; \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

и

$$\int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv, x) = \varepsilon^2(b(x) + \theta_b(x)), \;\; \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

L2: Условие на функцию распределения

$$\int_R g(\mathrm{v})\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)), \;\; \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для всех $g(\mathrm{v}) \in C^2(R)$ (пространство ограниченных функций, таких что $g(v)/$ $/|v|^2 \to 0, |v| \to 0)$. Здесь мера $\Gamma_g(x)$ ограничена для всех $g(v) \in C^2(R)$ и определяется соотношением (функции из пространства $C^2(R)$ разделяют меры [9, с. 395])

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv, x), \quad g(v) \in C^2(R).$$

L3: Равномерная квадратическая интегрированность

$$\sup \lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\, \Gamma_0(dv, x) = 0.$$

Пример. Простейшим примером случайной величины, которая удовлетворяет условиям аппроксимации Леви, является следующая случайная величина α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тогда для моментов этой случайной величины имеем

$$E\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 (a_2 + bp) + o(\varepsilon^2), \;\; E\alpha^2 = \varepsilon^2 (a_1^2 + b^2 p) + o(\varepsilon^2).$$

Как уже отмечалось, предельная эволюция системы (1) определяется решением дифференциального уравнения

$$d\hat{u}(t) = [\widehat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}]dt + \sigma dw(t) + \int_R v\tilde{v}(dt, dv), \tag{3}$$

где сдвиг $\widehat{C}(u) + \hat{a}$ определяется равенствами

$$\widehat{C}(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x), \;\; \hat{a} = \int_X \pi(dx) a(x).$$

Скачки процесса определены мерой, которая, в свою очередь, удовлетворяет условиям

$$\mathrm{E}\tilde{v}(dt, dv) = dt\tilde{\Gamma}_0(dv), \;\; \tilde{\mathrm{A}}_0(v) = \int_X \pi(dx) \Gamma_0(v, x),$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u, x)\varphi'(u).$$

Тогда

$$\Gamma^1(x)\varphi(\cdot) = a(x)\varphi'(\cdot) + \int_R (\varphi(\cdot + v) - \varphi(\cdot) - v\varphi'(\cdot))\Gamma_0(dv, x).$$

Определение 1. Система (1) при выполнении начального условия $u(t_0) = u_0(\omega)$ называется диссипативной, если случайные величины $|u_0(t, \omega, u_0, t_0)|$ ограничены по вероятности равномерно относительно $t \ge t_0$ и u_0: $\mathbf{P}\{|u_0(\omega)| < R\} = 1$ для всякого $R > 0$.

Определение 2. Система (1) называется асимптотически диссипативной, если $u^{\varepsilon}(t)$ слабо сходится к $u(t)$ и предельная эволюция, которая определяется уравнением (3), будет диссипативной в смысле определения 1.

Теорема. Пусть существует функция Ляпунова $V(u) \in \mathrm{C}^3(R^d)$ системы

$$\frac{du}{dt} = \alpha(u), \tag{4}$$

где $\alpha(u) = \widehat{C}(u) + \hat{a}$, которая удовлетворяет условиям

C1: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \hat{\mathrm{L}} V(u)| < \mathrm{M}_1 V(\mathrm{u}), \;\; M_1 > 0$;

C2: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u)| < \mathrm{M}_2 V(\mathrm{u}), \;\; M_2 > 0$;

C3: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u)| < \mathrm{M}_3 V(\mathrm{u}), \;\; M_3 > 0$;

C4: $|\mathbf{C}(x) R_0 \hat{\mathrm{L}} V(u)| < \mathrm{M}_4 V(\mathrm{u}), \;\; M_4 > 0$;

C5: $|\mathbf{C}(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u)| < \mathrm{M}_5 V(\mathrm{u}), \;\; M_5 > 0$;

C6: $|\mathbf{C}(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u)| < \mathrm{M}_6 V(\mathrm{u}), \;\; M_6 > 0$.

Пусть также выполняются неравенства

$$\alpha(u)V'(u) < -c_1 V(u), \tag{5}$$

$$\sup_{u\in R^d} \| \sigma(u) \| < c_2(x), \tag{6}$$

$$| \int_R v^2 \Gamma_0(dv, x) | < c_3(x), \tag{7}$$

где $c_1 > 0, c_2 > 0$ и $\hat{c}_3 = \int_X \pi(dx) c_3(x) > 0.$

Тогда система (1) будет асимптотически диссипативной.

Лемма 1. Генератор трехкомпонентного марковского процесса $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2),$ $\eta^\varepsilon(t, x), t \ge 0,$ может быть представлен в виде

$$\mathrm{L}^\varepsilon(x)\varphi(w, x) = \varepsilon^{-1}\mathrm{Q}\varphi(u, w, x) + \Gamma_\omega^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) +$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x), \tag{8}$$

где $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ — генератор совокупности процессов с независимыми приращениями (2), который действует по переменной $w,$ а $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ — эквивалентный предыдущему генератор совокупности процессов с независимыми приращениями (2), который действует по переменной u.

Доказательство. Генератор марковского процесса на возмущенной тест-функции определяется из соотношения [8]

$$\mathrm{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta} E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(u, w, x) \,|\, u^\varepsilon(t) = u, \quad \eta^\varepsilon(t) = w, \quad x(t/\varepsilon^2) = x].$$

Добавим и отнимем в условном математическом ожидании $\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$. Получим

$$\mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x) \,|\, u^\varepsilon(t) = u, \quad \eta^\varepsilon(t) = w, \quad x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] -$$

$$- \mathrm{E}[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x)].$$

Разложение $u_{t+\Delta}^\varepsilon$ имеет вид

$$u_{t+\Delta}^\varepsilon = u + C(u, x)\Delta + \Delta w + \mathrm{o}(\Delta).$$

Полученное выражение подставим в первое слагаемое условного математического ожидания

$$\mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= E[\varphi(u + C(u, x)\Delta + \Delta w + o(\Delta), w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= E[\varphi(z + \Delta w, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)],$$

где

$$z = u + C(u, x)\Delta + o(\Delta).$$

Добавим и отнимем $\varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$ в полученном выражении

$$E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= E[\varphi(z + \Delta w, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] +$$

$$+ E[\varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)].$$

Так как генератор $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ имеет представление

$$\Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(E[\varphi(u+\Delta u, w, x) - \varphi(u, w, x)]),$$

для предела первого слагаемого получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z+\Delta w, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] = \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x).$$

Разложим $\varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$ по формуле Тэйлора

$$\varphi(u + C(u, x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) =$$

$$= \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) + \varphi'(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)(\tilde{N}(u, x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta).$$

Подставив в выражение $E[\varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)]$ полученное разложение, имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u, x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) + \varphi'(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)(C(u, x)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ o(\Delta) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi'(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)(C(u, x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] =$$

$$= C(u, x)\varphi'(u, w, x).$$

Точно так же из соотношения для генератора $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ и очевидного равенства для генератора марковского процесса $\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(w, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(w, x)] = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w, x)$ получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon) + \varphi(u, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x)] =$$

$$= \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x).$$

Отсюда вытекает, что $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ имеет вид (8).

Следствием леммы 2 из [10] будет утверждение.

Лемма 2. Генератор (8) допускает асимптотическое разложение

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) +$$

$$+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w,x)+\mathbf{C}(u)\varphi(u,w,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x),$$

где

$$\mathbf{C}(u)\varphi(u)=C(u,x)\varphi'(u),$$

а остаточный член $\left\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\right\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0,\ \varphi(u,w,\cdot)\in C^3(R)$.

Рассмотрим теперь усеченный генератор

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w,x)+\mathbf{C}(u)\varphi(u,\omega,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w,x). \quad (9)$$

Лемма 3. Решение задачи сингулярного возмущения для оператора $\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)$ на возмущенной тест-функции

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x)=\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x) \quad (10)$$

определяется равенством

$$L_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x)=\widehat{L}\,\varphi(u,w)+\varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(u,w),$$

где

$$\begin{aligned}\theta^\varepsilon(x)&=\Gamma_u^1(x)R_0\widehat{L}-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)+\\&+\mathbf{C}(x)R_0\widehat{L}-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_w^1(x)+\\&+\Gamma_w^1(x)R_0\widehat{L}-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x).\end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Подставив (10) в (9), получим

$$\begin{aligned}L_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x)&=\varepsilon^{-1}Q[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\Gamma_u^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\\&+\mathbf{C}(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\Gamma_w^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]=\\&=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w)+[\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w)+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w)]+\\&+\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)].\end{aligned}$$

Для существования предельного оператора $\widehat{L}\,\varphi(u,w)$ при $\varepsilon\to 0$ необходимо, чтобы выполнялось условие $\mathbf{Q}\varphi(u,w)=0$, т.е. функция должна принадлежать нуль-пространству оператора $\mathbf{Q}$.

Тогда

$$\widehat{L}\,\varphi(u,w)=\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w)+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w)+\Gamma_w^1(x)\varphi(u,w),$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)=[\widehat{L}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

Из условия разрешимости для последнего уравнения получим

$$\Pi\mathbf{Q}\Pi\varphi_1(u,w,x)=0=\Pi[\widehat{L}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]\Pi\varphi(u,w).$$

Таким образом, $\widehat{L}\,\varphi(u,w)=\Pi\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w)+\Pi\mathbf{C}(x)\varphi(u,w)+\Pi\Gamma_w^1(x)\varphi(u,w)$, а $\varphi_1(u,w,x)=R_0[\widehat{L}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]\varphi(u,w)$.

Отсюда получим разложение для последнего слагаемого

$$\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi_1(u,w,x)]=$$

$$= \varepsilon[\Gamma_u^1(x) R_0[\hat{L} - \Gamma_u^1(x) - C(x) - \Gamma_w^1(x)] + C(x) R_0[\hat{L} - \Gamma_u^1(x) - C(x) - \Gamma_w^1(x)] +$$

$$+ \Gamma_w^1(x) R_0[\hat{L} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]]\varphi(u, w).$$

Доказательство теоремы. Поскольку выполняются условия C1–C6 теоремы, справедливой будет ограниченность остаточного члена (11)

$$\| \theta^{\varepsilon}(x) V(u) \| =$$

$$=| \Gamma_u^1(x) R_0 \hat{L} V(u) - \Gamma_u^1(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u) - \Gamma_u^1(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u) - \Gamma_u^1(x) R_0 \Gamma_w^1(x) V(u) +$$

$$+ \mathbf{C}(x) R_0 \hat{L} V(u) - \mathbf{C}(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u) - \mathbf{C}(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u) - \mathbf{C}(x) R_0 \Gamma_w^1(x) V(u) +$$

$$+ \Gamma_w^1(x) R_0 \hat{L} V(u) - \Gamma_w^1(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u) - \Gamma_w^1(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u) - \Gamma_w^1(x) R_0 \Gamma_w^1(x) V(u) | \le$$

$$\le M_1 V(u) + M_2(x) V(u) + M_3 V(u) + M_4 V(u) + M_5(x) V(u) + M_6 V(u),$$

отсюда следует, что

$$\| \theta^{\varepsilon}(x) V(u) \| \le MV(u), \qquad (12)$$

где $M = \sum_{k=1}^{6} M_k$.

Из утверждения леммы 2, выражения (12) и выполнения условий модельной теоремы [1] имеем слабую сходимость

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (u(t), \eta(t)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть далее $\dfrac{d^{(1)}V(u)}{du}$ — производная функции Ляпунова, вычисленная вдоль траектории системы (3). Так как функция Ляпунова должна удовлетворять условию Липшица $| V(u_2) - V(u_1) | < K | u_2 - u_1 |$, где K является постоянной величиной, то следующее соотношение будет выполненным

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du} \le \frac{dV(u)}{du} + K[\| \sigma(u) \| | dw(t) | + \int_R v^2 \tilde{\Gamma}_0(dv) | dt |],$$

где $\dfrac{dV(u)}{du}$ — производная функции Ляпунова, вычисленная вдоль траектории детерминированной системы (4), $\tilde{\Gamma}_0(dv) = \int_X \pi(dx) \Gamma_0(dv, x)$.

Согласно неравенствам (5)–(7) теоремы получим

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du} \le -c_1 V(u) + K[c_2 | dw(t) | + C | dt |].$$

Таким образом, используя лемму 1.7 из [11], получим

$$V(u) \le V(u_0) \exp\{-c_1 t\} + K c_2 \int_0^t \exp\{-c_1(t-s)\} d | w(s) | ds + K \hat{c}_3 | dt |.$$

Отсюда из леммы 1.9 из [11] следует оценка

$$P\{| u(t) | > R\} \le \frac{V(u)}{\inf_{u \in \mathrm{R}^d} V(u)}, \quad R \to \infty.$$

ISSN 0572-2691

Значит, система (3) диссипативна, более того, из выполнения условий модельной предельной теоремы [1] и диссипативности предельного процесса следует, что система (1) является асимптотически диссипативной.

Заключение

При определении генератора предельного процесса очевидно, что предельный процесс является процессом Леви, что позволяет получить условия диссипативности предельной эволюции, а также асимптотическую диссипативность начального процесса из сходимости его к предельному. Важное условие диссипативности — ограниченность вторых моментов меры скачков допредельного процесса.

А.В. Нікітін

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Розглянуто випадок, коли випадкові збурення системи визначено імпульсним процесом у некласичній схемі апроксимації Леві. Вивчається асимптотична дисипативність дограничної нормованої стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі, яка суттєво впливає на поведінку граничного процесу.

A.V. Nikitin

ASYMPTOTIC DISSIPATIVITY OF STOCHASTIC PROCESSES WITH IMPULSE PERTURBATION IN THE LEVY APPROXIMATION SCHEME

The case when the random perturbations of the system are determined by the impulse process in the Levy nonclassical approximation scheme. The asymptotic dissipativity of the prelimited normalized stochastic evolution system in the ergodic Markovian environment is studied, which significantly influences the behavior of the limite process.

1. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic models of systems. — Dordrecht : Kluwer, 1999. — 185 c.
2. *Koroliuk V.S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. — Singapore World Scientific, 2005. — 330 c.
3. *Koroliuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V.* Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach // Comptes Rendus Mathématique. — 2016. — **354**. — С. 723–728.
4. *Nikitin A.V., Khimka U.T.* Asymptotics of normalized control with Markov switchings // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, N 8. — P. 1252–1262.
5. *Nikitin A.V.* Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — **51**, N 4. — P. 650–656.
6. *Семенюк С.А., Чабанюк Я.М.* Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». — 2009. — **660**, № 660. — С. 56–60.
7. *Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Chimka U.T.* Differential equations with small stochastic additions under Poisson approximation conditions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — **53**, N 3. — С. 93–99.
8. *Чабанюк Я.М.* Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення // Доп. НАН України. — 2004. — № 12. — С. 35–40.
9. *Jacod J. Shiryaev A.N.* Limit theorems for stochastic processes. — Berlin : Springer-Verlag. — 2003. — 601 p.
10. *Samoilenko I.V., Nikitin A.V.* Differential equations with small stochastic terms under the Levy approximation conditions // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — **69**, N 9. — P. 1445–1454.
11. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М. : Наука, 1969. — 368 с.

Получено 04.09.2017

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком НАН Украины А.А. Чикрием.