УДК 517.929

*Д.Я. Хусаинов, Й. Диблик, Я. Баштинец, А.В. Шатырко*[1]

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОЙ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

## Введение

Еще в 1943 году Мак-Каллок и Уолтер Питтс [1] рассматривали нервные клетки головного мозга как логические элементы, а систему клеток, собранную в сеть, — как элементарный вычислительный прибор, способный имитировать логические элементы. Этим же ученым принадлежит первенство и в определении «нейронных сетей». Для нейронных сетей свойственно два процесса: обучение, которое представляет, по сути, определение необходимых параметров для требуемого решения заданной проблемы; и собственно работа нейронной сети, представляющая идентификацию запроса и выработку требуемого решения [1, 2]. Как правило, оба процесса итерационны, и их математическая модель может быть представлена в виде нелинейной дискретной системы большой размерности. При малых «шагах» дискретизации система может представлять собой дифференциальные уравнения.

В нейронных сетях, в которых выходной сигнал вновь подается на вход, возникает итерационный процесс — получается сеть с обратной связью (feed-back). Такая структура сетей получила название автоассоциативной. Описываемый тип впервые был предложен Хопфилдом в 1982 году [2, 3]. Первоначально в сеть подавался вектор, элементы которого принимали значения $\pm 1$. Дальнейшие шаги расчетов для $i$-го нейрона выполнялись по итерационной схеме

$$y_i(k) = f(x_i(k)), \;\; x_i(k+1) = \sum_{j=0}^{n-1} w_{ji} y_j(k).$$

Расчет приостанавливался, когда образ начинал повторяться (или слабо менялся). Таким образом, математическая модель динамики нейронной сети могла описываться системой разностных уравнений.

**Модель нейрона.** Рассмотрим модель нейрона следующего вида [2, 4] (рис. 1). В литературе по нейронным сетям модель, показанную на рис. 1, обычно называют аддитивной (additive model). Эту модель можно рассматривать как неоднородную (lumped) аппроксимацию электрической цепью модели в виде распределенной линии передачи (distributed transmission line model) биологического дендрического нейрона (biological dendritic neuron) [4]. Такую природу RC-цепи (resistance capacity) (см. рис. 1) можно также объяснить тем фактом, что сам биологический синапс является фильтром, предназначенным для хорошей аппроксимации [5].

В физических (электрических) терминах синаптические веса $w_{ji}$ представляют собой емкости, а соответствующие выходные сигналы $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, — потенциалы, где $n$ — количество входов. Эти сигналы подаются на суммирующие соединения. Общий ток можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i(t) + I_j ,$$

[1] The authors were supported by the Czech Science Foundation under the project 16-08549S. This work was realized in CEITEC — Central European Institute of Technology with research infrastructure supported by the project CZ.1.05/1.1.00/02.0068 financed from European Regional Development Fund.

где первое слагаемое отражает возбуждения, действующие на синаптические веса, а второе является источником тока, представляющим внешнее смещение. Пусть $v_j(t)$ — индуцированное локальное поле на входе нелинейной функции активации $\varphi(\cdot)$. Тогда общий ток, вытекающий из входного узла нелинейного элемента, можно выразить следующим образом

$$\frac{v_j(t)}{R_j} + C_j \frac{dv_j(t)}{dt},$$

где первое слагаемое вызвано сопротивлением (leakage resistance) $R_j$, а второе — емкостью (leakage capacitance) $C_j$. Применив закон Кирхгофа, получаем [2, 4]

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} = -\frac{v_j(t)}{R_j} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{ji} x_i(t) + I_j.$$

Для заданного индуцированного локального поля $v_j(t)$ можно определить выход нейрона $j$ с помощью соотношения $x_j(t) = \varphi(v_j(t))$.

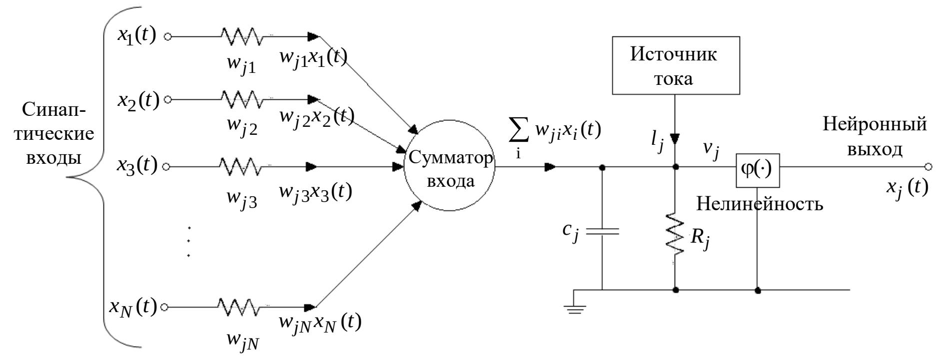


Рис. 1

Функция активации $\varphi(\cdot)$, определяющая отношение выхода $x_j(t)$ нейрона $j$ к его же индуцированному локальному полю $v_j(t)$, является непрерывно дифференцируемой. Чаще всего в качестве функции активации используют логическую функцию

$$\varphi(v_j) = \frac{1}{1+\exp\{-v_j\}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда, произведя замену

$$a_j = \frac{1}{R_j C_j}, \quad w_{ji} = \frac{\omega_{ji}}{C_j},$$

получаем систему

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = -a_j v_j(t) + \sum_{i=1}^{n} w_{ji} \varphi(v_j(t)) + I_j.$$

Еще одна модель нейродинамики $i$-го нейрона может быть описана системой дифференциальных уравнений [5]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t) + \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t)\right).$$

**Модель Хопфилда** [2, 3]. Сеть Хопфилда состоит из множества нейронов, формирующих систему со множеством обратных связей (mu1tip1e-loop feedback system). Количество обратных связей равно количеству нейронов. Выход каждого нейрона замыкается через элемент единичной задержки на все остальные нейроны сети. Нейрон этой сети не имеет обратных связей с самим собой (рис. 2).

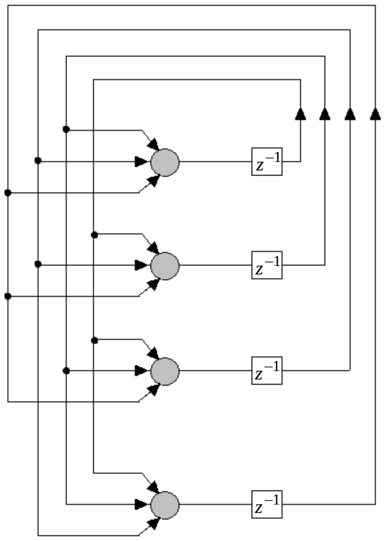


Рис. 2

В этом случае уравнения динамики модели Хопфилда можно переписать в виде

$$C_i \frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \varphi_i (v_i(t)) + I_i .$$

Пусть задана сеть Хопфилда, имеющая динамическое равновесие, если на ее вход подается образ, который отображается в себя. С точки зрения физики полная энергия системы в этой точке будет минимальна. Энергетическая функция (по существу, функция Ляпунова) может быть задана в виде суммы кинетической и потенциальной энергий

$$V(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} y_i y_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k .$$

Как следует из теорем второго метода Ляпунова, стационарное состояние сети будет асимптотически устойчивым, если функция Ляпунова будет положительно-определенной, а ее полная производная вдоль итерации — отрицательно-определенной. Если считать, что шаги итераций малы, то от разностной системы можно перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе фактически исследуются непрерывные нейронные сети Хопфилда, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием и без него, типа рассмотренных в [3, 4, 6, 7]

$$C_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} \varphi_j (y_j(t)) + I_i , \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если учитывается время обработки сигнала, то используются системы дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием

$$C_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} \varphi_j (y_j(t-\tau)) + I_i , \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$


ISSN 0572-2691

Здесь $n$ — число нейронов в сети, $y(t)=(y_1(t), y_2(t),..., y_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния сети в момент времени $t>0$; $R_i$, $C_i$, $I_i$, $i=\overline{1,n}$, — соответственно, сопротивления, емкости и внешние токи. Заменой $a_i=\dfrac{1}{R_iC_i}$, $\omega_{ij}=\dfrac{\nu_{ij}}{C_i}$, $I_i^0=\dfrac{I_i}{C_i}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, приведенные выше системы, описывающие динамику сетей Хопфилда, можно свести к системам в стандартном виде

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=-a_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_j(y_j(t))+I_i^0,\ \ t\geq 0,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Если учитывать время запаздывания, то

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=-a_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_j(y_j(t-\tau))+I_i^0,\ \ t\geq 0,\ \ i=\overline{1,n}.$$

**Проблемы устойчивости динамики нейросетей.** В работе [8] рассматривался общий принцип достижения устойчивости класса нейросетей, описываемых системой

$$\frac{d}{dt}u_j(t)=a_j(u_j(t))\left[b_j(u_j(t))-\sum_{i=1}^{N}c_{ji}\varphi_i(u_i(t))\right],\ \ j=\overline{1,N}. \tag{i}$$

Исследования проводились прямым методом Ляпунова с функцией вида

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_{ji}\varphi_i(u_i)\varphi_j(u_j)-\sum_{j=1}^{N}\int_0^{u_j}b_j(\lambda)\varphi'_j(\lambda)\,d\lambda\ ,\ \ \varphi'_j(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\varphi_j(\lambda),\ \ j=\overline{1,N}. \tag{ii}$$

Накладывались следующие ограничения.

1.Условие симметричности. Синаптические веса сети должны быть симметричными: $c_{ji}=c_{ij}$.

2. Условие неотрицательности. Функции $a_j(u_j)\geq 0$, $j=\overline{1,N}$.

3. Условие монотонности. Нелинейные функции отображения входа на выход $\varphi_j(u_j)$ должны быть монотонными, т.е.

$$\varphi'_j(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\varphi_j\lambda\geq 0.$$

**Теорема Коэна–Гроссберга** [8]. Если система нелинейных дифференциальных уравнений (i) удовлетворяет условиям симметрии, неотрицательности и монотонности, то функция Ляпунова (ii) удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}E\leq 0.$$

И следовательно, система является глобально устойчивой.

Для непрерывной модели Хопфилда, сравнивая систему (i) с системой, описывающей модель Хопфилда, получаем следующее.

Функция Ляпунова имеет вид

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_{ji}\varphi_i(v_i)\varphi_j(v_j)+\sum_{j=1}^{N}\int_0^{v_j}\left(\frac{v_j}{R_j}-I_j\right)\varphi'_j(v)\,dv\,.$$

Кроме того, можно сделать следующие преобразования.

1. $\varphi_i(v_i) = x_i$,

2. $\int\limits_0^{v_j} \varphi'_j(v)\,dv = \int\limits_0^{x_j} dx = x_j$,

3. $\int\limits_0^{v_j} v\varphi'_j(v)\,dv = \int\limits_0^{x_j} dx = \int\limits_0^{x_j} \varphi_j^{-1}(x)\,dx.$

Тогда, подставляя эти три выражения в последнюю функцию Ляпунова, получаем результат, идентичный полученному в работе [3].

Исследованию качественного поведения нейросетей различного вида с помощью прямого метода Ляпунова и подхода линейных матричных неравенств (LMI) посвящено в последнее время достаточное количество работ [7, 9–11].

В данной статье рассмотрена математическая модель динамики нейронной сети, представленная системой обыкновенных дифференциальных уравнений с выделенной асимптотически устойчивой линейной частью. Исследование подобных систем проводилось в работах [12–14]. Качественному исследованию особых точек систем дифференциальных уравнений на плоскости посвящены работы [15, 16]. Отдельные результаты исследования устойчивости освещены в [17].

В работе [17] исследование устойчивости положения равновесия системы с запаздыванием проводилось с использованием метода функций Ляпунова с условием Б.С. Разумихина. Получены достаточные условия устойчивости, равномерные по запаздыванию. Нелинейные части рассматривались как «возмущающие члены». Поэтому накладывались достаточно жесткие условия их «малости». В частности, постоянные Липшица нелинейных функций должны были быть достаточно малыми. Получены условия устойчивости, равномерные по запаздыванию. В работе [18] получены условия асимптотической устойчивости для «малого запаздывания», зависящего от параметров системы и коэффициентов функции Ляпунова.

В настоящей статье на нелинейные члены накладываются «секторные» ограничения. Исследование устойчивости нулевого положения равновесия систем без запаздывания проводится с использованием функции вида суммы квадратичной части и интеграла от нелинейности. Такого вида функции Ляпунова используются при исследовании нелинейных систем автоматического регулирования [19, 20]. Далее рассматриваются системы с запаздыванием. Для них используется метод функционалов Ляпунова–Красовского [21, 22]. Если нелинейные части удовлетворяют «условию сектора», то получаются «более слабые» условия устойчивости [22]. Понятия асимптотической, абсолютной, глобальной устойчивости по Ляпунову как для систем с запаздыванием аргумента, так и без него, использованные в данной работе, применяются в смысле представленных в работе [23] определений и не приведены в статье в целях экономии места.

## 1. Системы на плоскости без запаздывания

Рассмотрим математическую модель динамики нейронной сети, которая описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -a_1 y_1(t) + \omega_{11}\varphi_1(y_1(t)) + \omega_{12}\varphi_2(y_2(t)) + I_1, \\ \dot{y}_2(t) &= -a_2 y_2(t) + \omega_{21}\varphi_1(y_1(t)) + \omega_{22}\varphi_2(y_2(t)) + I_2,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что нелинейные функции $\varphi_1(y_1(t))$, $\varphi_2(y_2(t))$ непрерывные и удовлетворяют условию Липшица, т.е.

$$\left|\varphi_i(y + \Delta y) - \varphi_i(y)\right| \le L_i \left|\Delta y\right|,\ i = \overline{1, 2}, \tag{2}$$


ISSN 0572-2691

а решением системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&-a_1 y_1 + \omega_{11}\varphi_1(y_1) + \omega_{12}\varphi_2(y_2) + I_1 = 0,\\
&-a_2 y_2 + \omega_{21}\varphi_1(y_1) + \omega_{22}\varphi_2(y_2) + I_2 = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

является точка $M_0(y_1^0, y_2^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$. Заменим

$$y_1(t) = x_1(t) + y_1^0,\ \ y_2(t) = x_2(t) + y_2^0.$$

После подстановки в систему (1) получаем

$$\dot{x}_1(t) = -a_1(x_1(t) + y_1^0) + \omega_{11}\varphi_1(x_1(t) + y_1^0) + \omega_{12}\varphi_2(x_2(t) + y_2^0) + I_1,$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2(x_2(t) + y_2^0) + \omega_{21}\varphi_1(x_1(t) + y_1^0) + \omega_{22}\varphi_2(x_2(t) + y_2^0) + I_2.$$

Перепишем полученную систему в виде

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t) + \omega_{11}\varphi_1(x_1(t) + y_1^0) - \omega_{11}\varphi_1(y_1^0) + \omega_{12}\varphi_2(x_2(t) + y_2^0) - \omega_{12}\varphi_2(y_2^0),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + \omega_{21} f_{21}(x_1(t) + y_1^0) - \omega_{21} f_{21}(y_1^0) + \omega_{22} f_{22}(x_2(t) + y_2^0) - \omega_{22} f_{22}(y_2^0).$$

Произведя замену

$$F_1(x_1(t)) = \varphi_1(x_1(t) + y_1^0) - \varphi_1(y_1^0),\ \ F_2(x_2(t)) = \varphi_2(x_2(t) + y_2^0) - \varphi_2(y_2^0),$$

получаем «возмущенную» систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -a_1 x_1(t) + \omega_{11} F_1(x_1(t)) + \omega_{12} F_2(x_2(t)),\\
&\dot{x}_2(t) = -a_2 x_2(t) + \omega_{21} F_1(x_1(t)) + \omega_{22} F_2(x_2(t)).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Причем функции $F_1(x_1(t))$ и $F_2(x_2(t))$ также удовлетворяют условиям Липшица (2) с теми же постоянными

$$|F_1(x_1(t))| \le L_1 |x_1(t)|,\ |F_2(x_2(t))| \le L_2 |x_2(t)|. \tag{5}$$

После этой замены исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ системы (3) было сведено к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (4).

Обозначим

$$S_0[h] = \begin{bmatrix} 2h_1(a_1 - |\omega_{11}| L_1) & -h_1|\omega_{12}|L_2 - h_2|\omega_{21}|L_1 \\ -h_1|\omega_{12}|L_2 - h_2|\omega_{21}|L_1 & 2h_2(a_2 - |\omega_{22}|L_2) \end{bmatrix},$$

$h_{\min} = \min\{h_1, h_2\}$, $h_{\max} = \max\{h_1, h_2\}$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — минимальное собственное число соответствующей симметричной положительно-определенной матрицы

$$\phi(h) = h_{\min} / h_{\max},\ \ \gamma_0(h) = \lambda_{\min}(S_0[h]) / 2h_{\max}.$$

**Теорема 1.** Пусть нелинейные функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ удовлетворяют условиям Липшица (2) с постоянными $L_1, L_2$ и существуют $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, при которых справедливы неравенства

$$a_1 - |\omega_{11}| L_1 > 0,\ \ 4h_1 h_2 (a_1 - |\omega_{11}| L_1)(a_2 - |\omega_{22}| L_2) - (h_1|\omega_{12}|L_2 + h_2|\omega_{21}|L_1)^2 > 0.$$

Тогда нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво и справедливы следующие оценки сходимости

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\le \exp\{-\gamma_0(h)t\}[x_1^2(0)+(h_2/h_1)\,x_2^2(0)]^{1/2}, \\ |x_2(t)| &\le \exp\{-\gamma_0(h)t\}[(h_1/h_2)\,x_1^2(0)+x_2^2(0)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

*Доказательство.* Для получения доказательства теоремы 1 используем квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x_1(t),\, x_2(t)) = h_1 x_1^2(t) + h_2 x_2^2(t). \tag{7}$$

Для нее справедливы следующие двусторонние неравенства

$$h_{\min}[x_1^2(t)+x_2^2(t)] \le V(x_1(t),\, x_2(t)) \le h_{\max}[x_1^2(t)+x_2^2(t)]. \tag{8}$$

Полная производная функции Ляпунова (7) в силу системы (4) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t)) = 2h_1x_1(t)[-a_1x_1(t)+\omega_{11}F_1(x_1(t))+\omega_{12}F_2(x_2(t))]+$$

$$+2h_2x_2(t)[-a_2x_2(t)+\omega_{21}F_1(x_1(t))+\omega_{22}F_2(x_2(t))].$$

Учитывая ограничения (5), наложенные на функции $F_1(x_1(t))$, $F_2(x_2(t))$, получаем

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t)) \le -2[h_1a_1x_1^2(t)+h_2a_2x_2^2(t)]+$$

$$+2[h_1|\omega_{11}|L_1x_1^2(t)+h_1|\omega_{12}|L_2|x_1(t)||x_2(t)|]+$$

$$+2[h_2|\omega_{21}|L_1|x_1(t)||x_2(t)|+h_2|\omega_{22}|L_2x_2^2(t)].$$

Запишем полученное выражение в виде квадратичной формы

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t)) \le -(|x_1(t)|,|x_2(t)|)\,S_0[h](|x_1(t)|,|x_2(t)|)^{\mathrm{T}}.$$

Условие отрицательной определенности полной производной функции Ляпунова — положительная определенность матрицы $S_0[h]$. Этим условием, согласно критерию Сильвестра, является выполнение неравенств

$$\Delta_1 = 2h_1(a_1-|\omega_{11}|L_1) > 0,$$

$$\Delta_2 = 4h_1h_2(a_1-|\omega_{11}|L_1)(a_2-|\omega_{22}|L_2)-(h_1|\omega_{12}|L_2+h_2|\omega_{21}|L_1)^2 > 0.$$

При выполнении этих неравенств, для полной производной функции Ляпунова будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t)) \le -\lambda_{\min}(S_0[h])[x_1^2(t)+x_2^2(t)]. \tag{9}$$

Используя двусторонние неравенства (8), перепишем (9) в виде

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t)) \le -2\gamma_0(h)V(x_1(t),\, x_2(t)).$$

Проинтегрировав полученное неравенство, получаем

$$V(x_1(t),\, x_2(t)) \le \exp\{-2\gamma_0(h)t\}V(x_1(0),\, x_2(0)).$$

 ISSN 0572-2691

Используя вновь неравенства (8), запишем

$$h_1 x_1^2(t) + h_2 x_2^2(t) = V(x_1(t), x_2(t)) \le \exp\{-2\gamma_0(h)t\} V(x_1(0), x_2(0)) =$$

$$= \exp\{-2\gamma_0(h)t\}[h_1 x_1^2(0) + h_2 x_2^2(0)].$$

Отсюда получаем необходимые оценки (6), что и требовалось доказать.

К сожалению, полученные условия асимптотической устойчивости достаточно «жесткие». Они накладывают «требования малости» на постоянные Липшица функций $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$. Накладывая «менее жесткие» ограничения типа «условий сектора» [19–22], получим «более слабые» условия асимптотической устойчивости.

Будем говорить, что функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ удовлетворяют «условиям сектора», если существуют постоянные $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, при которых выполняются неравенства

$$0 < x_1 F_1(x_1) < k_1 x_1^2, \quad 0 < x_2 F_2(x_2) < k_2 x_2^2. \qquad (10)$$

Геометрически это означает, что функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ находятся внутри сектора первого и третьего квадрантов, ограниченного прямыми $x_1 = 0$, $y = k_1 x_1$ и $x_2 = 0$, $y = k_2 x_2$.

Введем следующие обозначения

$$\tilde{h}_{\max} = \max\{h_1 + \beta_1 k_1/2, h_2 + \beta_2 k_{21}/2\}, \quad \gamma_1(h) = \lambda_{\min}(S_1[h, \beta, r])/2\tilde{h}_{\max},$$

$$S_1[h, \beta, r] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2a_1 h_1 & 0 & \dfrac{a_1\beta_1 - k_1 r_1}{2} - h_1\omega_{11} & -h_1\omega_{12} \\ 0 & 2a_2 h_2 & -h_2\omega_{21} & \dfrac{a_2\beta_2 - k_2 r_2}{2} - h_2\omega_{22} \\ \dfrac{a_1\beta_1 - k_1 r_1}{2} - h_1\omega_{11} & -h_2\omega_{21} & -\beta_1\omega_{11} + r_1 & -\dfrac{\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21}}{2} \\ -h_1\omega_{12} & \dfrac{a_2\beta_2 - k_2 r_2}{2} - h_2\omega_{22} & -\dfrac{\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21}}{2} & -\beta_2\omega_{22} + r_2 \end{bmatrix}.$$

Условия устойчивости можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ удовлетворяют условиям (10) и система уравнений (3) имеет решение $M_0(y_1^0, y_2^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$. Если существуют параметры $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, при которых матрица $S_1[h, \beta, r]$ положительно-определенная, то нулевое положение равновесия системы (4) глобально асимптотически устойчиво, а для ее решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ имеет место следующая верхняя экспоненциальная оценка сходимости

$$|x_1(t)| \le \exp\{-\gamma_1(h)t\}[x_1^2(0) + (h_2/h_1)x_2^2(0)]^{1/2},$$

$$|x_2(t)| \le \exp\{-\gamma_1(h)t\}[(h_1/h_2)x_1^2(0) + x_2^2(0)]^{1/2}.$$

*Доказательство.* Для исследования устойчивости нулевого положения равновесия системы (4) используем функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2) = h_1 x_1^2 + h_2 x_2^2 + \beta_1 \int_0^{x_1} F_1(s_1)\, ds_1 + \beta_2 \int_0^{x_2} F_2(s_2)\, ds_2,\ \ \beta_1 > 0,\ \ \beta_2 > 0. \qquad (11)$$

Поскольку функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ удовлетворяют условиям (10), то при любых $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ функция будет положительно-определенной, удовлетворяющей двусторонним неравенствам

$$h_{\min}[x_1^2(t) + x_2^2(t)] \le V(x_1(t), x_2(t)) \le \tilde{h}_{\max}[x_1^2(t) + x_2^2(t)].$$

Вычислим полную производную функции Ляпунова (11) в силу системы (4). Она имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = 2h_1 x_1(t)[-a_1 x_1(t) + \omega_{11} F_1(x_1(t)) + \omega_{12} F_2(x_2(t))] +$$

$$+\beta_1 F_1(x_1(t))[-a_1 x_1(t) + \omega_{11} F_1(x_1(t)) + \omega_{12} F_2(x_2(t))] +$$

$$+2h_2 x_2(t)[-a_2 x_2(t) + \omega_{21} F_1(x_1(t)) + \omega_{22} F_2(x_2(t))] +$$

$$+\beta_2 F_2(x_2(t))[-a_2 x_2(t) + \omega_{21} F_1(x_1(t)) + \omega_{22} F_2(x_2(t))].$$

Перепишем полученное выражение в виде квадратичной формы четырех переменных

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = (x_1(t), x_2(t), F_1(x_1(t)), F_2(x_2(t)) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -2a_1 h_1 & 0 & -a_1\beta_1/2 + h_1\omega_{11} & h_1\omega_{12} \\ 0 & -2a_2 h_2 & h_2\omega_{21} & -a_2\beta_2/2 + h_2\omega_{22} \\ -a_1\beta_1/2 + h_1\omega_{11} & h_2\omega_{21} & \beta_1\omega_{11} & (\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21})/2 \\ h_1\omega_{12} & -a_2\beta_2/2 + h_2\omega_{22} & (\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21})/2 & \beta_2\omega_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ F_1(x_1(t)) \\ F_2(x_2(t)) \end{pmatrix}.$$

Преобразуем полную производную функции Ляпунова $V(x_1, x_2)$ в силу системы (4) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = (x_1(t), x_2(t), F_1(x_1(t)), F_2(x_2(t))) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -2a_1 h_1 & 0 & \frac{k_1 r_1 - a_1\beta_1}{2} + h_1\omega_{11} & h_1\omega_{12} \\ 0 & -2a_2 h_2 & h_2\omega_{21} & \frac{k_2 r_2 - a_2\beta_2}{2} + h_2\omega_{22} \\ \frac{k_1 r_1 - a_1\beta_1}{2} + h_1\omega_{11} & h_2\omega_{21} & \beta_1\omega_{11} - r_1 & \frac{\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21}}{2} \\ h_1\omega_{12} & \frac{k_2 r_2 - a_2\beta_2}{2} + h_2\omega_{22} & \frac{\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21}}{2} & \beta_2\omega_{22} - r_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ F_1(x_1(t)) \\ F_2(x_2(t)) \end{pmatrix} - r_1 F_1(x_1(t))[k_1 x_1(t) - F_1(x_1(t))] - r_2 F_2(x_2(t))[k_2 x_2(t) - F_2(x_2(t))].$$

Здесь $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ — произвольные положительные постоянные.

Поскольку, как следует из условий теоремы, выполняются условия «сектора» (10), матрица $S_1[h, \beta, r]$ положительно-определенная, а постоянные $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то, отбросив два последних слагаемых, получаем оценку

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t)) \le -\lambda_{\min}(S_1[h, \beta, r])[x_1^2(t) + x_2^2(t)].$$

Дальнейшее доказательство условий теоремы 2 полностью совпадает с доказательством аналогичных утверждений теоремы 1.

## 2. Системы с запаздыванием на плоскости

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -a_1 y_1(t) + \omega_{11}\varphi_1(y_1(t-\tau_1)) + \omega_{12}\varphi_2(y_2(t-\tau_2)) + I_1, \\ \dot{y}_2(t) &= -a_2 y_2(t) + \omega_{21}\varphi_1(y_1(t-\tau_1)) + \omega_{22}\varphi_2(y_2(t-\tau_2)) + I_2, \end{aligned} \tag{12}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Как и в разд. 1, считаем, что нелинейные функции $\varphi_1(y_1(t))$, $\varphi_2(y_2(t))$ непрерывные и удовлетворяют условию Липшица (2), а решением системы уравнений (3) есть точка $M_0(y_1^0, y_2^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$. Заменим

$$y_1(t) = x_1(t) + y_1^0, \quad y_2(t) = x_2(t) + y_2^0.$$

После подстановки в систему (12) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_1(x_1(t) + y_1^0) + \omega_{11}\varphi_1(x_1(t-\tau_1) + y_1^0) + \omega_{12}\varphi_2(x_2(t-\tau_2) + y_2^0) + I_1, \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2(x_2(t) + y_2^0) + \omega_{21}\varphi_1(x_1(t-\tau_1) + y_1^0) + \omega_{22}\varphi_2(x_2(t-\tau_2) + y_2^0) + I_2. \end{aligned}$$

Перепишем полученную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) + \omega_{11}\varphi_1(x_1(t-\tau_1) + y_1^0) - \omega_{11}\varphi_1(y_1^0) + \omega_{12}\varphi_2(x_2(t-\tau_2) + y_2^0) - \omega_{12}\varphi_2(y_2^0), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_2(t) + \omega_{21}\varphi_1(x_1(t-\tau_1) + y_1^0) - \omega_{21}\varphi_1(y_1^0) + \omega_{22}\varphi_2(x_2(t-\tau_2) + y_2^0) - \omega_{22}\varphi_2(y_2^0). \end{aligned}$$

Произведя замену

$$\begin{aligned} F_1(x_1(t-\tau_1)) &= \varphi_1(x_1(t-\tau_1) + y_1^0) - \varphi_1(y_1^0), \\ F_2(x_2(t-\tau_2)) &= \varphi_2(x_2(t-\tau_2) + y_2^0) - \varphi_2(y_2^0), \end{aligned}$$

получаем «возмущенную» систему уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) + \omega_{11}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{12}F_2(x_2(t-\tau_2)), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_2(t) + \omega_{21}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{22}F_2(x_2(t-\tau_2)). \end{aligned} \tag{13}$$

После этой замены исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ системы с запаздыванием (12) сводится к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы с запаздыванием (13). Для получения условий устойчивости используем метод функционалов Ляпунова–Красовского с функционалами вида

$$V[x_1(t), x_2(t)] = h_1 x_1^2(t) + h_2 x_2^2(t) + \beta_1 \int\limits_0^{x_1(t)} F_1(s_1)\,ds_1 + \beta_2 \int\limits_0^{x_2(t)} F_2(s_2)\,ds_2 +$$

$$+\gamma_1 \int\limits_{t-\tau_1}^{t} F_1^2(x_1(s))\,ds + \gamma_2 \int\limits_{t-\tau_2}^{t} F_2^2(x_2(s))\,ds,\ \ \beta_1 > 0,\ \ \beta_2 > 0,\ \ \gamma_1 > 0,\ \ \gamma_2 > 0. \qquad (14)$$

Обозначим

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t), F_1(x_1(t)), F_2(x_2(t)), F_1(x_1(t-\tau_1)), F_2(x_2(t-\tau_2)))^{\mathrm{T}}, \qquad (15)$$

$$S_2[h, \beta, r, \gamma] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2a_1h_1 & 0 & (a_1\beta_1 - k_1r_1)/2 & 0 & -h_1\omega_{11} & -h_1\omega_{12} \\ 0 & 2a_2h_2 & 0 & (a_2\beta_2 - k_2r_2)/2 & -h_2\omega_{21} & -h_2\omega_{22} \\ (a_1\beta_1 - k_1r_1)/2 & 0 & r_1 - \gamma_1 & 0 & -\beta_1\omega_{11}/2 & -\beta_1\omega_{12}/2 \\ 0 & (a_2\beta_2 - k_2r_2)/2 & 0 & r_2 - \gamma_2 & -\beta_2\omega_{21}/2 & -\beta_2\omega_{21}/2 \\ -h_1\omega_{11} & -h_2\omega_{21} & -\beta_1\omega_{11}/2 & -\beta_2\omega_{21}/2 & \gamma_1 & 0 \\ -h_1\omega_{12} & -h_2\omega_{22} & -\beta_1\omega_{12}/2 & -\beta_2\omega_{22}/2 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

**Теорема 3.** Пусть функции $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ удовлетворяют условиям (10) и система уравнений (3) имеет решение $M_0(y_1^0, y_2^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$. Если существуют параметры $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, при которых матрица $S_2[h, \beta, r, \gamma]$ положительно-определенная, то положение равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ системы (12) глобально асимптотически устойчиво, а для решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (13) имеет место следующая верхняя экспоненциальная оценка сходимости

$$|x(t)| \le \le \sqrt{\tilde{\varphi}(h)}\,|x(0)|\ \exp\{-\theta(h, \beta, r, \gamma)\,t\},$$

где

$$|x(t)| = \{x_1^2(t) + x_2^2(t)\}^{1/2},\ \ \tilde{\varphi}(h) = \tilde{h}_{\max} / h_{\min},$$

$$\theta(h, \beta, r, \gamma) = \lambda_{\min}(S_2[h, \beta, r, \gamma]) / 2\tilde{h}_{\max},$$

$$h_{\min} = \min\{h_1, h_2\},\ \ \tilde{h}_{\max} = \max\left\{h_1 + \frac{1}{2}(\beta_1 + \gamma_1)k_1, h_2 + \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_2)k_2\right\}.$$

*Доказательство.* Для функционала (14) будут иметь место следующие двусторонние неравенства

$$h_{\min}[x_1^2(t) + x_2^2(t)] \le V(x_1(t), x_2(t)) \le \tilde{h}_{\max}[x_1^2(t) + x_2^2(t)].$$

Вычислим полную производную функционала (14) в силу системы (13).

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t), x_2(t)] = 2h_1x_1(t)\ [-a_1x_1(t) + \omega_{11}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{12}F_2(x_2(t-\tau_2))] +$$

$$+2h_2x_2(t)[-a_2x_2(t) + \omega_{21}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{22}F_2(x_2(t-\tau_2))] +$$

$$+\beta_1F_1(x_1(t))[-a_1x_1(t) + \omega_{11}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{12}F_2(x_2(t-\tau_2))] +$$

$$+\beta_2F_2(x_2(t))[-a_2x_2(t) + \omega_{21}F_1(x_1(t-\tau_1)) + \omega_{22}F_2(x_2(t-\tau_2))] +$$

 ISSN 0572-2691

$$+\gamma_1[F_1^2(x_1(t))-F_1^2(x_1(t-\tau_1))]+\ \gamma_2[F_2^2(x_2(t))-F_2^2(x_2(t-\tau_2))].$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\,x_2(t)]=-2a_1h_1x_1^2(t)-2a_2h_2x_2^2(t)+\gamma_1F_1^2(x_1(t))+\gamma_2F_2^2(x_2(t))-$$

$$-\gamma_1F_1^2(x_1(t-\tau_1))-\gamma_2F_2^2(x_2(t-\tau_2))-$$

$$-a_1\beta_1x_1(t)\,F_1(x_1(t))+2h_1\omega_{11}x_1(t)\,F_1(x_1(t-\tau_1))+2h_1\omega_{12}x_1(t)\,F_2(x_2(t-\tau_2))-$$

$$-a_2\beta_2x_2(t)F_2(x_2(t))+2h_2\omega_{21}x_2(t)F_1(x_1(t-\tau_1))+2h_2\omega_{22}x_2(t)F_2(x_2(t-\tau_2))+$$

$$+\beta_1\omega_{11}F_1(x_1(t))F_1(x_1(t-\tau_1))+\beta_1\omega_{12}F_1(x_1(t))F_2(x_2(t-\tau_2)+$$

$$+\beta_2\omega_{21}F_2(x_2(t))F_1(x_1(t-\tau_1))+\beta_2\omega_{22}F_2(x_2(t))F_2(x_2(t-\tau_2)).$$

Используя векторно-матричную форму записи, получим:

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\,x_2(t)]=(x_1(t),\,x_2(t),\,F_1(x_1(t)),\,F_2(x_2(t)),\,F_1(x_1(t-\tau_1)),\,F_2(x_2(t-\tau_2)))\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-2a_1h_1 & 0 & -a_1\beta_1/2 & 0 & h_1\omega_{11} & h_1\omega_{12}\\ 0 & -2a_2h_2 & 0 & -a_2\beta_2/2 & h_2\omega_{21} & h_2\omega_{22}\\ -a_1\beta_1/2 & 0 & \gamma_1 & 0 & \beta_1\omega_{11}/2 & \beta_1\omega_{12}/2\\ 0 & -a_2\beta_2/2 & 0 & \gamma_2 & \beta_2\omega_{21}/2 & \beta_2\omega_{22}/2\\ h_1\omega_{11} & h_2\omega_{21} & \beta_1\omega_{11}/2 & \beta_2\omega_{21}/2 & -\gamma_1 & 0\\ h_1\omega_{12} & h_2\omega_{22} & \beta_1\omega_{12}/2 & \beta_2\omega_{22}/2 & 0 & -\gamma_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ F_1(x_1(t))\\ F_2(x_2(t))\\ F_1(x_1(t-\tau_1))\\ F_2(x_2(t-\tau_2))\end{pmatrix}.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\,x_2(t)]=(x_1(t),\,x_2(t),\,F_1(x_1(t)),\,F_2(x_2(t)),\,F_1(x_1(t-\tau_1)),\,F_2(x_2(t-\tau_2)))\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-2a_1h_1 & 0 & \frac{k_1r_1-a_1\beta_1}{2} & 0 & h_1\omega_{11} & h_1\omega_{12}\\ 0 & -2a_2h_2 & 0 & \frac{k_2r_2-a_2\beta_2}{2} & h_2\omega_{21} & h_2\omega_{22}\\ \frac{k_1r_1-a_1\beta_1}{2} & 0 & \gamma_1-r_1 & 0 & \frac{\beta_1\omega_{11}}{2} & \frac{\beta_1\omega_{12}}{2}\\ 0 & \frac{k_2r_2-a_2\beta_2}{2} & 0 & \gamma_2-r_2 & \frac{\beta_2\omega_{21}}{2} & \frac{\beta_2\omega_{22}}{2}\\ h_1\omega_{11} & h_2\omega_{21} & \frac{\beta_1\omega_{11}}{2} & \frac{\beta_2\omega_{21}}{2} & -\gamma_1 & 0\\ h_1\omega_{12} & h_2\omega_{22} & \frac{\beta_1\omega_{12}}{2} & \frac{\beta_2\omega_{22}}{2} & 0 & -\gamma_2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ F_1(x_1(t))\\ F_2(x_2(t))\\ F_1(x_1(t-\tau_1))\\ F_2(x_2(t-\tau_2))\end{pmatrix}-\ r_1F_1(x_1(t))[k_1x_1(t)-F_1(x_1(t))]-r_2F_2(x_2(t))[k_2x_2(t)-F_2(x_2(t))].$$

Воспользовавшись обозначениями (15) и используя «условия сектора» (10), окончательно получим оценку

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t), x_2(t)] \le -z^{\mathrm{T}}(t)\, S_2[h, \beta, r, \gamma]\, z(t).$$

Дальнейшие преобразования, выводы об асимптотической устойчивости и оценки сходимости получаются аналогично предыдущим теоремам.

**3. Системы с запаздыванием общего вида**

Наконец, рассмотрим системы общего вида с запаздыванием

$$\dot{y}_i(t) = -a_i y_1(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \varphi_j y_j(t-\tau_j) + I_i, \tag{16}$$

где $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Как и в разд. 1, считаем, что нелинейные функции $\varphi_j(y_j(t))$, $j = \overline{1, n}$, непрерывные и удовлетворяют условию Липшица, т.е.

$$\left|\varphi_i(y + \Delta y) - \varphi_i(y)\right| \le L_i \left|\Delta y\right|, \ \ j = \overline{1, n},$$

а решением системы уравнений

$$-a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \varphi_j(y_j) + I_i = 0, \ \ i = \overline{1, n},$$

является точка $M_0(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, $y_i^0 > 0$, $i = \overline{1, n}$. Заменим

$$y_i(t) = x_i(t) + y_i^0, \ \ i = \overline{1, n}.$$

После подстановки в систему получаем

$$\dot{x}_i(t) = -a_i(x_i(t) + y_i^0) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \varphi_j(x_j(t-\tau_j) + y_j^0) + I_i.$$

Перепишем полученную систему в виде

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} [\varphi_j(x_j(t-\tau_j) + y_j^0) - \varphi_j(y_j^0)].$$

Произведя замену

$$F_j(x_j(t-\tau_j)) = \varphi_j(x_j(t-\tau_j) + y_j^0) - \varphi_j(y_j^0),$$

получаем «возмущенную» систему уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} F_j(x_j(t-\tau_j)). \tag{17}$$

Исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ системы с запаздыванием (16) сводится к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы с запаздыванием (17). При исследовании используем метод функционалов Ляпунова–Красовского вида

$$V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i^2(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{0}^{x_i(t)} F_i(s_i)\, ds_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_{t-\tau_i}^{t} F_i^2(x_i(\xi_i))\, d\xi_i,$$

$$\beta_i > 0, \ \ \gamma_i > 0, \ \ i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Обозначим

$$z(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), F_1(x_1(t)), \ldots, F_n(x_n(t)), F_1(x_1(t-\tau_1)), \ldots, F_n(x_n(t-\tau_n)))^{\mathrm{T}},$$

$$S_n[h,\beta,\gamma,r]=\begin{bmatrix} S_n^{11} & S_n^{12} & S_n^{13} \\ (S_n^{12})^T & S_n^{22} & S_n^{23} \\ (S_n^{3})^T & (S_n^{23})^T & S_n^{33} \end{bmatrix},\ S_n^{11}[h,\beta,\gamma]=\begin{bmatrix} 2a_1h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2a_2h_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 2a_nh_n \end{bmatrix},$$

$$S_n^{12}[h,\beta,r]=\begin{bmatrix} (a_1\beta_1-k_1r_1)/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (a_2\beta_2-k_2r_2)/2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & (a_2\beta_2-k_2r_2)/2 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

$$S_n^{13}[h]=\begin{bmatrix} -h_1\omega_{11} & -h_1\omega_{12} & \dots & -h_n\omega_{1n} \\ -h_2\omega_{21} & -h_2\omega_{22} & \dots & -h_n\omega_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ -h_n\omega_{n1} & -h_2\omega_{n2} & \dots & -h_n\omega_{nn} \end{bmatrix},\ S_n^{22}[y]=\begin{bmatrix} -\gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & -\gamma_n \end{bmatrix},$$

$$S_n^{23}[\beta]=\begin{bmatrix} -\beta_1\omega_{11}/2 & -\beta_1\omega_{12}/2 & \dots & -\beta_1\omega_{12}/2 \\ -\beta_2\omega_{21}/2 & -\beta_2\omega_{22}/2 & \dots & -\beta_2\omega_{2n}/2 \\ . & . & \dots & . \\ -\beta_n\omega_{n1}/2 & -\beta_n\omega_{n2}/2 & \dots & -\beta_n\omega_{nn}/2 \end{bmatrix},\ S_n^{33}[y]=\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}.$$

Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

**Теорема 4.** Пусть функции $F_i(x_i)$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют условиям Липшица с постоянными $L_i$, $i=\overline{1,n}$, и система уравнений

$$-a_iy_i+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\varphi_j(y_j)+I_i=0,\quad i=\overline{1,n},$$

имеет решение $M_0(y_1^0,y_2^0,...,y_n^0)$, $y_j^0>0$, $j=\overline{1,n}$. Если существуют параметры $h_i>0$, $\beta_i>0$, $r_i>0$, $\gamma_i>0$, при которых матрица $S_n[h,\beta,r,\gamma]$ положительно-определенная, то положение равновесия $M_0(y_1^0,y_2^0,...,y_n^0)$ системы (16) глобально асимптотически устойчиво, а для решений $x_1(t),\ x_2(t),\dots,x_n(t)$ системы (17) имеет место следующая верхняя экспоненциальная оценка сходимости

$$|x(t)|\le\sqrt{\tilde{\phi}(h)}\,|x(0)|\,\exp\{-\theta(h,\beta,r,\gamma)t\},$$

где $\tilde{\phi}(h)=\tilde{h}_{\max}/h_{\min}$, $h_{\min}=\min_{i=1,n}\{h_i\}$, $\tilde{h}_{\max}=\max_{i=1,n}\left\{h_i+\frac{1}{2}(\beta_i+\gamma_i)k_i\right\}$.

*Доказательство.* Для функционала (18) справедливы двусторонние неравенства

$$h_{\min}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)\le V[x_1(t),\dots,x_n(t)]\le\bar{h}_{\max}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t).$$

Полная производная функционала (18) в силу системы (17) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\dots,x_n(t)]=2\sum_{i=1}^{n}h_ix_i(t)\left[-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_iF_i(x_i(t))\left[-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))\right]+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i[F_i^2(x_i(t))-F_i^2(x_i(t-\tau_i))].$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\ldots,x_n(t)]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}2a_ih_ix_i^2(t)-\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_ix_i(t)F_i(x_i(t))+2\sum_{i=1}^{n}h_ix_i(t)\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_iF_i(x_i(t-\tau_i))\left[\sum_{j-1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))\right]+\sum_{i=1}^{n}\gamma_iF_i^2(x_i(t))-\sum_{i=1}^{n}\gamma_iF_i^2(x_i(t-\tau_i)).$$

Воспользовавшись обозначениями (19), преобразуем правую часть полученного выражения в виде квадратичной формы с определенной добавкой

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\ldots,x_n(t)]=-z^{\mathrm{T}}(t)S_n[h,\beta,\gamma,r]\,z(t)-\sum_{i=1}^{n}r_iF(x_i(t))[k_ix_i(t)-F_i(x_i(t))].$$

Учитывая условие «сектора» (10), окончательно получаем оценку

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\ldots,x_n(t)]\le -z^{\mathrm{T}}(t)S_n[h,\beta,\gamma,r]\,z(t).$$

Дальнейшие преобразования, выводы об асимптотической устойчивости и оценки сходимости получаются аналогично предыдущим теоремам.

**Заключение**

В статье рассмотрены системы дифференциальных уравнений с выделенной отрицательной диагональной частью и нелинейностью специального вида. Такие системы встречаются при исследовании динамики нейронных сетей. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия. Рассмотрены также системы с запаздыванием аргумента. Исследования устойчивости проведены с использованием функционалов Ляпунова–Красовского. Благодаря подходу LMI все условия имеют вид конструктивно проверяемых матричных неравенств.

*Д.Я. Хусаінов, Й. Діблік, Я. Баштінец, А.В. Шатирко*

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ОДНІЄЇ СЛАБКОНЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Розглянуто математичну модель динаміки нейромережі, що описана системою диференціальних рівнянь із запізнюванням та виділеною асимптотично стійкою лінійною частиною. З використанням прямого методу Ляпунова отримано достатні умови асимптотичної стійкості й побудовано експоненційні оцінки затухання розв'язків. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей.

*D.Ya. Khusainov, J. Diblik, Ja. Bashtinec, A.V. Shatyrko*

# DYNAMICS INVESTIGATION OF ONE WEAKLY NONLINEAR SYSTEM WITH DELAY ARGUMENT

A mathematical model of neural network dynamics represented by a system of differential equations with time-delay argument and an asymptotically stable linear part is considered. With using the direct Lyapunov method, sufficient conditions for asymptotic stability are obtained and exponential estimates of the decay of solutions are constructed. The results are formulated in the form of matrix algebraic inequalities (using LMI).

1. *McCulloch W.S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Mathematica1 Biophysics. — 1943. — N 5. — P. 115–133.
2. *Haykin S.* Neural networks: a comprehensive foundation. 2nd edition. — New Jersey : Prentice Hall, 1998. — 842 p.
3. *Hopfield J.J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1984. — N 81. — P. 3088–3092.
4. *Rall W.* Cable theory for dendritic neurons. In Methods in Neuronal Modeling. — Cambridge : MIT Press, 1989. — P. 9–62.
5. *Pineda F.J.* Generalization of back propagation to reccurent neural1 networks // Physical Review Letters. — 1987. — N 59. — P. 2229–2232.
6. *Scott A.C.* Neurophysics. — New York : Wiley, 1977. — 352 p.
7. *Gopalsamy K.* Leakage delays in BAM // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — N 325. — P. 1117–1132.
8. *Cohen M.A., Grossberg S.* Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1983. — **SMC-13**. — P. 815–826.
9. *Wu A., Zeng Z.* Algebraical criteria of stability for delayed memristive neural networks // J. Advances in Difference Equations. — 2015. — **111**. — 12 p. — https://doi.org/10.1186/s13662-015-0449-z
10. *Wanga X., Shea K., Zhong S., Cheng J.* On extended dissipativity analysis for neural networks with time-varying delay and general activation functions // Ibid. — 2016. — **79**. — 16 p. — https://doi.org/10.1186/s13662-016-0769-7
11. *Liu J., Xu R.* Passivity analysis and state estimation for a class of memristor-based neural networks with multiple proportional delays // Ibid. — 2017. — **34**. — 20 p. — https://doi.org/10.1186/s13662-016-1069-y
12. *Архангельский В.И., Богаенко И.Н., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А.* Нейронные сети в системах автоматизации. — Киев : Техника, 1999. — 364 с.
13. *Berezansky L., Idels L., Troib L.* Global dynamics of the class on nonlinear nonautonomous systems with time-varying delays // Nonlinear Analysis. — 2011. — **74**, N 18. — P. 7499–7512.
14. *Brokan E., Sadyrbaev F.* On a differential system arising in the network control theory // Ibid. — 2016. — **21**, N 5. — P. 687–701. — http://dx.doi.org/10.15388/NA.2016.5.8
15. *Liang J., Cao J., Ho D.W.C.* Discrete-time bidirectional associative memory neural networcs with variable delays // Physics Letters. — 2005. — **A 335**. — P. 226–234.
16. *Atslega S., Finaskins D., Sadyrbaev F.* On a planar system arising in the network control theory // Mathematical Modelling and Analysis. — 2016. — **21**, N 3. — P. 385–398. — http://dx.doi.org/10.3846/13926292.216.1172131
17. *Сіренко А.С., Шакотько Т.І., Хусаінов Д.Я.* Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методом Ляпунова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2014. — С. 232–237.
18. *Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Баштинец Я., Сиренко А.С.* Устойчивость, неравномерная по запаздыванию, одной слабонелинейной системы с последействием // Труды института прикладной математики и механики. — 2015. — **29**. — С. 129–146.
19. *Aizerman M.A., Gantmaher F.R.* Absolute stability of regulator systems. — San Francisco : Holden-Day, 1964. — 172 p.
20. *Lur'e A.I.* Some problems in the theory of automatic control. — London : H.M. Stationary Office, 1957. — 165 p.

21. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — Киев : Изд-во Киевского университета, 1997. — 236 с.
22. *Хусаінов Д.Я., Шатирко А.В.* Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. — К. : ДП «Інформаційне аналітичне агентство», 2012. — 73 с.
23. *El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.* Introduction to the theory of the differential equations with deviating argument. — New York : Academic Press, 1973. — 356 p.

*Получено 08.09.2017*