

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ГЕНЕРАЦИИ ВЫСШИХ ГАРМОНИК УПРУГИХ ВОЛН СДВИГА В СЛОЕ МЕЖДУ РАЗНОРОДНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Сторожев В. И., Щербак Н. В.
(ДонНУ г. Донецк, Украина)

На основі моделі геометрично і фізично нелінійного деформування анізотропного пружного середовища кубічної системи побудовано аналітичні зображення для нелінійних других гармонік локалізованих SH хвиль для хвилеводу у вигляді шару, локалізованого між різнотипними напівпросторами. Проведено чисельно-аналітичні дослідження для хвилеводу у вигляді шару (NaCl), поміщеного між напівпросторами з монокристала кремнію і германію.

The model of geometrical and physical nonlinear distortion of cubic system anisotropic elastic medium is used in this work. The analytical presentations for nonlinear second harmonics of localized SH waves are built for a waveguide in the form of layer between a different type half-spaces. The numerical and analytical researches for the NaCl layer and for half-spaces of silicon and germanium are built.

Исследуемая волноводная структура отнесена к системе нормированных прямоугольных координат, в которой слой занимает область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$, а полупространства – области $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 < -h\}$ и $V_3 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h < x_3 < \infty\}$. Физико-механические свойства компоненты волновода V_p характеризуются упругими постоянными второго порядка $c_{ij}^{(p)}$, третьего порядка $c_{ijk}^{(p)}$ и плотностью

ρ_p . Кристаллографические направления для материалов слоя и полупространств являются коллинеарными. Для анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении локализованных SH волн вдоль координатного направления Ox_1 используется модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования упругого монокристаллического материала класса $m\bar{3}m$ кубической системы, базирующаяся на представлении упругого потенциала U

$$U = \frac{1}{2} c_{jqrk} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} + \frac{1}{6} c_{jqrkml} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{rk} \varepsilon_{lm}, \quad (1)$$

и представлении тензорных нелинейных механических деформаций

$$\varepsilon_{jk} = 1/2(u_{j,k} + u_{k,j} + u_{l,j}u_{l,k}). \quad (2)$$

Безразмерные нормированные компоненты тензора механических напряжений σ_{jd} , могут быть получены в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \sigma_{jd}^{(l)} + \sigma_{jd}^{(n)}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{jd}^{(l)} = c_{jdrk} u_{r,k}, \quad \sigma_{jd}^{(n)} = \frac{1}{2} c_{jdrk} u_{l,r} u_{l,k} + c_{pdrk} u_{j,p} u_{r,k} + \frac{1}{2} c_{jdrklm} u_{r,k} u_{l,m}. \quad (4)$$

Уравнения движения для рассматриваемой нелинейной упругой среды при отсутствии объемных сил можно представить в тензорном виде

$$\rho \ddot{u}_j - \sigma_{jd,d}^{(l)} = \sigma_{jd,d}^{(n)} \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5)$$

Используемой методикой решения задачи является методика отыскания нелинейных «добавок-возмущений» в представлениях функций волновых упругих смещений, которые пропорциональны малому параметру – акустическому числу Маха.

$$u_j = u_j^{(l)} + u_j^{(n)}, \quad (6)$$

в котором $|u_j^{(k)}| \sim \delta |u_j^{(k-1)}|$, а в качестве малого параметра δ выступает число Маха.

Определение волновых перемещений может быть сведено к однородной спектральной краевой задаче относительно комплексных функций напряженности $u_2^{(p,l)}$ линейных локализованных SH волн в рассматриваемой структуре

$$\sigma_{2j,j}^{(p,l)} - \rho_p \ddot{u}_2^{(p)} = 0 \quad (p = 1, 3), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{23}^{(1,l)})_{x_3=-h} &= (\sigma_{23}^{(2,l)})_{x_3=-h}, \quad (u_2^{(1,l)})_{x_3=-h} = (u_2^{(2,l)})_{x_3=-h}, \\ (\sigma_{23}^{(1,l)})_{x_3=h} &= (\sigma_{23}^{(3,l)})_{x_3=h}, \quad (u_2^{(1,l)})_{x_3=h} = (u_2^{(3,l)})_{x_3=h} \end{aligned} \quad (9)$$

и неоднородной краевой задаче для определения вектор-функции напряженности $\bar{u}^{(p,n)}$ нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник локализованных SH волн), имеющей вид

$$(\sigma_{ij,j}^{(p,l)})_{\bar{u}^{(p)}=\bar{u}^{(p,n)}} - \rho_p \ddot{u}_i^{(p,n)} = -(\sigma_{ij,j}^{(p,n)})_{\bar{u}^{(p)}=\bar{u}^{(p,l)}}, \quad (10)$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{3i}^{(2,l)})_{\bar{u}^{(2)}=\bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{3i}^{(2,n)})_{\bar{u}^{(2)}=\bar{u}^{(2,l)}} \quad x_3 = -h; \quad (11)$$

$$u_1^{(2,n)} = u_1^{(1,n)} \quad u_3^{(2,n)} = u_3^{(1,n)} \quad x_3 = -h;$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{3i}^{(3,l)})_{\bar{u}^{(2)}=\bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{3i}^{(3,n)})_{\bar{u}^{(2)}=\bar{u}^{(2,l)}} \quad x_3 = h;$$

$$u_1^{(3,n)} = u_1^{(1,n)} \quad u_3^{(3,n)} = u_3^{(1,n)} \quad \text{при } x_3 = -h.$$

В задаче о распространении обобщенных линейных сдвиговых волн в структуре «слой монокристалла класса m3m кубической системы между полупространствами из монокристаллов аналогичного класса кубической системы» комплексная вектор-функция волновых перемещений $\bar{u}^{(p,l)}$ характеризуется единственной ненулевой компонентой $u_2^{(p,l)}$.

В зоне контакта слоя с полупространствами предполагается идеальный механический контакт материалов.

Из решений спектральной задачи (8), (9) вытекают следующие представления для комплексных функций волновых перемещений $u_2^{(p,l)}$ в линейных локализованных SH волнах для ком-

поненты V_p рассматриваемой волноводной структуры с нормированным безразмерным амплитудным параметром $u_2^{(0)}$:

$$\begin{aligned} u_2^{(1,l)} &= e^{-i(\omega t - kx_1)} (A_1 \cos(\alpha^{(1)} x_3) + B_1 \sin(\alpha^{(1)} x_3)), \\ u_2^{(2,l)} &= u_2^{(0)} e^{-i\alpha^{(2)} x_3} e^{-i(\omega t - kx_1)}, \\ u_2^{(3,l)} &= B_3 e^{i\alpha^{(3)} x_3} e^{-i(\omega t - kx_1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha^{(j)} = ((-c_{44}^{(j)} k^2 + \rho_j \omega^2) / c_{44}^{(j)})^{\frac{1}{2}}$, A_1, B_1, B_3 получены аналитически.

Представление (12) является основой для формулировки задачи поиска соответствующих нелинейных ангармонических возмущений. В развернутой детализированной форме соотношения неоднородной граничной задачи (10), (11) относительно компонент комплексного вектора напряженности вторых гармоник локализованных SH волн для компоненты V_p в рассматриваемой структуре имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_p \ddot{u}_1^{(p,n)} - c_{11}^{(p)} u_{1,11}^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{1,33}^{(p,n)} - \Delta_8^{(p)} u_{3,31}^{(p,n)} &= \Delta_3^{(p)} u_{2,1}^{(p,l)} u_{2,11}^{(p,l)} + \\ &+ \Delta_6^{(p)} u_{2,1}^{(p,l)} u_{2,33}^{(p,l)} + (\Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)}) u_{2,3}^{(p,l)} u_{2,31}^{(p,l)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_p \ddot{u}_2^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} (u_{2,11}^{(p,n)} + u_{2,33}^{(p,n)}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_p \ddot{u}_3^{(p,n)} - c_{11}^{(p)} u_{3,33}^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{3,11}^{(p,n)} - \Delta_8^{(p)} u_{1,13}^{(p,n)} &= \Delta_3^{(p)} u_{2,3}^{(p,l)} u_{2,33}^{(p,l)} + \\ &+ \Delta_6^{(p)} u_{2,3}^{(p,l)} u_{2,11}^{(p,l)} + (\Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)}) u_{2,1}^{(p,l)} u_{2,13}^{(p,l)}; \\ c_{44}^{(1)} (u_{1,3}^{(1,n)} + u_{3,1}^{(1,n)})_{x_3=-h} - c_{44}^{(2)} (u_{1,3}^{(2,n)} + u_{3,1}^{(2,n)})_{x_3=-h} &= \\ &= (u_{2,1}^{(2,l)} u_{2,3}^{(2,l)})_{x_3=-h} - (u_{2,1}^{(1,l)} u_{2,3}^{(1,l)})_{x_3=-h}, \\ (c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(1,n)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(1,n)})_{x_3=-h} - (c_{12}^{(2)} u_{1,1}^{(2,n)} + c_{11}^{(2)} u_{3,3}^{(2,n)})_{x_3=-h} &= s_2 (\Delta_7^{(2)} \cdot \\ \cdot (u_{2,1}^{(2,l)})^2 + \Delta_3^{(2)} (u_{2,3}^{(2,l)})^2)_{x_3=-h} - s_2 (\Delta_7^{(1)} (u_{2,1}^{(1,l)})^2 + \Delta_3^{(1)} (u_{2,3}^{(1,l)})^2)_{x_3=-h}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$(u_j^{(1,n)})_{x_3=-h} - (u_j^{(2,n)})_{x_3=-h} = 0 \quad (j = \overline{1,3}),$$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} (u_{1,3}^{(1,n)} + u_{3,1}^{(1,n)})_{x_3=h} - c_{44}^{(3)} (u_{1,3}^{(3,n)} + u_{3,1}^{(3,n)})_{x_3=h} &= (u_{2,1}^{(3,l)} u_{2,3}^{(3,l)})_{x_3=h} - (u_{2,1}^{(1,l)} u_{2,3}^{(1,l)})_{x_3=h} \\ (c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(1,n)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(1,n)})_{x_3=h} - (c_{12}^{(3)} u_{1,1}^{(3,n)} + c_{11}^{(3)} u_{3,3}^{(3,n)})_{x_3=h} &= s_2 (\Delta_7^{(3)} \cdot \end{aligned}$$

$$\left(u_{2,1}^{(3,l)} \right)^2 + \Delta_3^{(3)} \left(u_{2,3}^{(3,l)} \right)^2 \Big|_{x_3=h} - s_2 \left(\Delta_7^{(1)} \left(u_{2,1}^{(1,l)} \right)^2 + \Delta_3^{(1)} \left(u_{2,3}^{(1,l)} \right)^2 \right) \Big|_{x_3=h},$$

$$\left(u_j^{(1,n)} \right) \Big|_{x_3=h} - \left(u_j^{(3,n)} \right) \Big|_{x_3=h} = 0 \quad (j = \overline{1,3}). \quad \text{Где } \Delta_8^{(p)} = c_{12}^{(p)} + c_{44}^{(p)}.$$

Из (13), (14) априори следует, что вторыми гармониками исследуемых линейных локализованных SH волн будут волны $P-SV$ типа. Компоненты $u_j^{(p,n)}$ ($j = 1, j = 3$) комплексного вектора напряженности вторых гармоник для данных линейных волн определяются из соотношений краевой задачи (13), (14) в аналитической форме методами компьютерной алгебры и представляются в виде суммы ее частного решения и общего решения соответствующей однородной задачи.

Скомпонованное представление для частного и общего решения, имеет следующий вид компонент $u_j^{(p,n)}$ ($j = 1, j = 3$):

$$\begin{aligned} u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{12} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) \\ &\quad + \nu_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\ u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{32} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\ &\quad + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\ u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3) + \gamma_1^{(2)} \exp(-2i\alpha^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\ u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3) + \gamma_3^{(2)} \exp(-2i\alpha^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\ u_1^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3) + \gamma_1^{(3)} \exp(2i\alpha^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\ u_3^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3) + \gamma_3^{(3)} \exp(2i\alpha^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты $\tilde{\lambda}_{ij}$, $\tilde{\mu}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}^{(p)}$ в представлении общего решения и коэффициенты ν_i , χ_i , ξ_i , $\gamma_i^{(p)}$ в представлении частного решения получены в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеют крайне громоздкий вид.

Численные исследования кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник исследуемых поверхностных волн реализованы для случая распространения волн в слое V_1 из монокристалла соли (NaCl), заключенном между полупространством V_2 из монокристалла кремния и полупространством V_3 из монокристалла германия [1].

Для анализа исследуемых нелинейных волновых эффектов были рассчитаны распределения нормированных амплитуд упругих поперечных смещений $u_2^{(l)}/u_2^{(0)}$ в линейных локализованных SH волнах и в их вторых гармониках $u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$ и $u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$ по толщинной координате волновода x_3 в зоне, включающей область слоя $x_3/h \in [-1;1]$ и подобласти $x_3/h \in [-5;-1) \cup (1;5]$ в полупространствах. Определяемые нормированные функции интенсивности нелинейных ангармонических возмущений $u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$, $u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$ в случаях соотношений $\lambda/h=1$ и $\lambda/h=2$ соответственно представлены на рис. 1 и рис. 2.

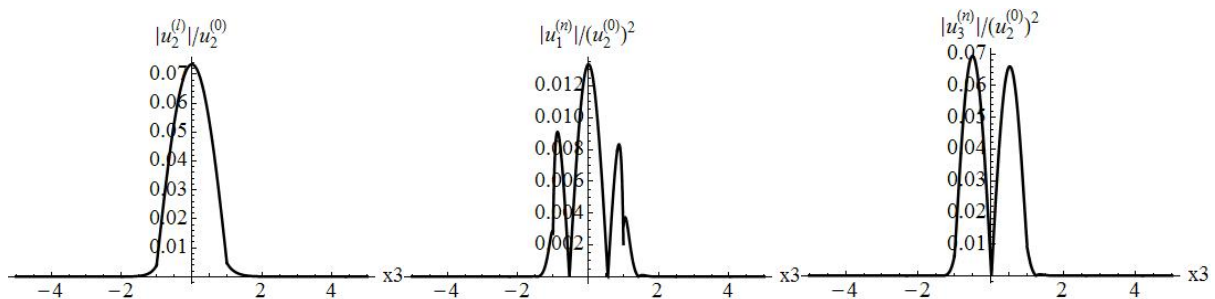


Рис. 1. Нормированные функции интенсивности нелинейных ангармонических возмущений $u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$, $u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$ в случае соотношения $\lambda/h=1$

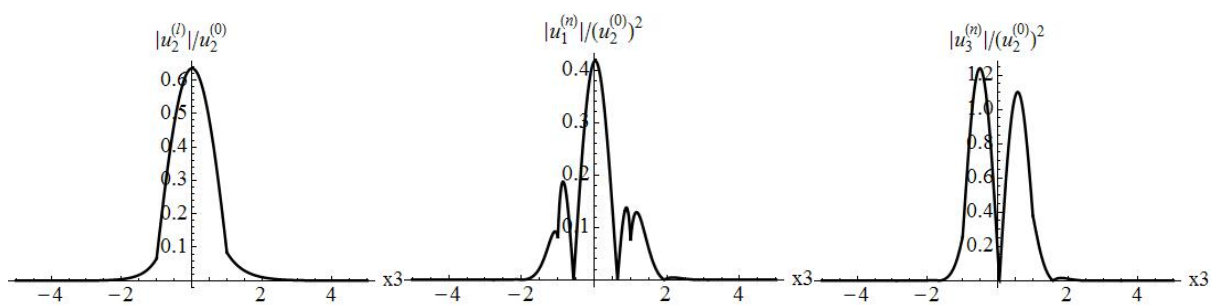


Рис. 2. Нормированные функции интенсивности нелинейных ангармонических возмущений $u_1^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$, $u_3^{(n)}/(u_2^{(0)})^2$ в случае соотношения $\lambda/h=2$

Следует подчеркнуть, что амплитуды нелинейных вторых гармоник пропорциональны квадрату нормирующего множителя,

который для локализованных SH волн с реальными параметрами при числах Маха $\delta \ll 1$ является малой величиной. Таким образом, в конечном итоге уровень нелинейных эффектов может быть оценен при задании конкретного значения малой амплитуды линейной локализованной SH волны.

Общим априорным свойством указанных распределений для линейных локализованных SH волн является монотонное затухание интенсивности волновых смещений при удалении от границ $x_3 = \pm h$ вглубь полупространств. Характеризуя распределения интенсивностей волновых перемещений во вторых гармониках по координате Ox_3 и сопоставляя уровни интенсивностей перемещений $u_1^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$, $u_3^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$ для вторых гармоник линейных локализованных SH волн различной относительной длины можно, в частности, сделать следующие выводы. Для второй гармоники локальные максимумы перемещений $u_1^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$ находятся в слое V_1 и около границ его контакта с полупространствами. В полубесконечной компоненте волноводов V_2 и V_3 с ростом x_3 / h интенсивность вторых гармоник становится исчезающе малой. Для $u_3^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$ максимальное значение достигается в зонах контакта слоя и полупространств при $x_3 = \pm h$. Для волновода наблюдается явление осцилляции интенсивности перемещений $u_1^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$ и $u_3^{(n)} / (u_2^{(0)})^2$ в зоне слоя V_1 . Энергетические эффекты могут быть охарактеризованы вектором плотности среднего за период потока мощности \bar{P} .

$$P_k = -\frac{i\omega}{4} \left(\sigma_{jk} \bar{u}_j - \overline{\sigma_{jk} u_j} \right) \quad (k, j = \overline{1, 3}).$$

Результаты проведенных иллюстративных расчетов нормированных распределений среднего за период потока мощности $P_1^{(l)}$ в линейных локализованных SH волнах относительной длины λ / h и $P_1^{(n)}$ для вторых гармоник, соответственно представлены в случаях соотношений $\lambda / h = 1$, $\lambda / h = 2$ на рис. 3 – рис. 4.

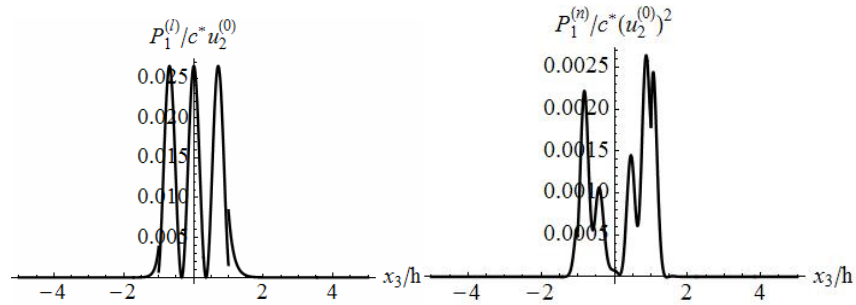


Рис. 3. Результаты расчетов нормированных распределений среднего за период потока мощности $P_1^{(l)}$ в линейных локализованных SH волнах относительной длины λ/h и $P_1^{(n)}$ для вторых гармоник в случае соотношения $\lambda/h = 1$

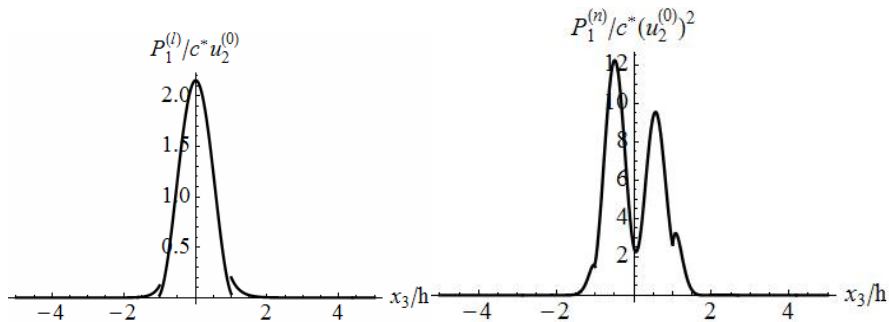


Рис. 4. Результаты расчетов нормированных распределений среднего за период потока мощности $P_1^{(l)}$ в линейных локализованных SH волнах относительной длины λ/h и $P_1^{(n)}$ для вторых гармоник в случае соотношения $\lambda/h = 2$

В линейных локализованных SH волнах энергетические потоки характеризуются ненулевой компонентой $P_1^{(l)}$, которая достигает максимальных значений в слое V_1 и монотонно затухает при отходе вглубь волновода. Потоки мощности для вторых гармоник локализованной SH волны в рассматриваемом волноводе характеризуется единственной ненулевой компонентой $P_1^{(n)}$. Расчеты показывают, что амплитуда $P_1^{(n)}$ во вторых гармониках анализируемых волн достигает максимальных значений в слое V_1 , а

также на границе контакта с полупространствами, и увеличивается с ростом относительной длины волны.

СПИСОК ССЫЛОК

1. Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. Акустические кристаллы / Под ред. М. П. Шашкольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
2. Красильников В. А., Лямов В. Е. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журнал. – 1973. – Т. 19, Вып. 5. – С. 801-804.
3. Harvey A. P., Topholme G. E. Propagation of anisotropic elastic and piezoelectric nonlinear surface acoustic waves // Wave Motion. – 1992. – Vol. 16. – P. 125-135.
4. Kumon R. E., Hamilton M. F. Directional dependence of nonlinear surface acoustic waves in the (001) plane of cubic crystals // J. Acoust. Sos. Am. – 2002. – Vol. 111, N 1. – P. 2060-2069.