Наукові праці УкрНДМІ НАН України, № 5 (частина I), 2009
Transactions of UkrNDMI NAN Ukraine, № 5 (part I), 2009

УДК 530.3+550

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЕОЛОГІЧНОГО ТІЛА

Бицань Є. М.
(*Інститут геофізики НАН України, м. Київ, Україна*)

Проанализирована структура реологических тел с произвольным числом элементов. Сформулированы условия невырожденности реологических тел. Показано, что реологические тела делятся на два типа - квазиупругие и квазивязкие.

Structure of rheological bodies with arbitrary quantity of elements was analyzed. Conditions of rheological bodies' nonsingularity were formulated. It was shown rheological bodies of a certain class are subdivided into two types - quasi-elastic and quasi-viscous.

Коливальні процеси в фізичних середовищах являються затухаючими, тому що останні являються непружними, тобто не задовольняють закону Гука. Непружність фізичних середовищ враховується за допомогою математичних моделей в’язкопружних деформованих середовищ. В повідомленні розглядаються реологічні тіла (РТ), які складаються з пружних (ПЕ) та в'язких (ВЕ) елементів, та з’єднаних між собою паралельно або послідовно в різних комбінаціях. Зв'язок між напругою і деформацією визначається за допомогою реологічного рівняння (РР), яке є певним узагальненням закону Гука і записується в узагальненому вигляді таким чином:

$$P\sigma = Q\varepsilon. \tag{1}$$

Розглянемо з’єднання двох РТ, РР яких мають такий вигляд:

$$P_1\sigma_1 = Q_1\varepsilon_1, P_2\sigma_2 = Q_2\varepsilon_2. \tag{2}$$

При паралельному з'єднанні деформації і напруження будуть задовольняти такому РР:

$$P_1 P_2 \sigma = \left(P_1 Q_2 + P_2 Q_1\right)\varepsilon , \tag{3}$$

а при послідовному з'єднанні РР набудуть такого вигляду:

$$\left(P_1 Q_2 + P_2 Q_1\right)\sigma = Q_1 Q_2 \varepsilon. \tag{4}$$

Рівняння (3, 4) являються основою для дослідження властивостей РТ з довільним числом елементів. РТ можна утворювати рекурсивним шляхом, приєднуючи до певного РТ окремі елементи або РТ. За допомогою рівнянь (3, 4) можна проаналізувати процес утворення нових РТ і виявити їхні особливості.

Структура РТ визначається характером їхніх РР: порядками та особливістю ЛДВ P і Q . Ці характеристики залежать від кількості елементів та з'єднань певних типів та від співвідношення між ними. Особливості РТ можна встановити, аналізуючи процес його утворення за допомогою співвідношень (3 - 4). Проаналізуємо РТ, які вивчає реологія. Випишемо в таблицю інформацію про них, додавши до них для симетрії ще п'ятиелементні РТ.

Аналізуючи цю таблицю, можна замітити, що РТ рангу k=1, 2 відповідають чотири різних типів їхніх РР, які поділяють РТ певного рангу в залежності від порядку коефіцієнтів РР на два типи - квазіпружні (порядки коефіцієнтів при напрузі і деформації однакові) і квазів'язкі (порядки коефіцієнтів при напрузі на одиницю менше порядку коефіцієнта при деформації), кожен з яких поділяється на два роди в залежності від того, має ЛДВ Q в РР адитивну константу (АК) чи ні. Переконаємось, що вказані особливості РТ мають місце для РТ з довільним рангом. Для цього доведемо методом математичної індукції наступну теорему:

Теорема 1: ***Для кожного натурального числа n існують чотири різних види РР РТ рангу n, за допомогою яких останні поділяються на два типи - квазіпружні та квазів'язкі, кожен з яких має два роди в залежності від того, має ЛДВ Q в РР АК, або ні. РР для РТ з цих сукупностей мають такий вигляд:***

$$\begin{aligned}
&\left(1+a_1D+\cdots a_{i-1}D^{i-1}\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R D\left(1+b_1D+\cdots b_{n-1}D^{n-1}\right)\varepsilon, && \left(N_{2n-1}\right)\\
&\left(1+a_1D+\cdots a_iD^{i}\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R D\left(1+b_1D+\cdots b_{n-1}D^{n-1}\right)\varepsilon, && \left(H_{2n}\right)\\
&\left(1+a_1D+\cdots a_{n-1}D^{n-1}\right)\sigma = E_n^R D\left(1+b_1D+\cdots b_nD^{n}\right)\varepsilon, && \left(N_{2n}\right)\\
&\left(1+a_1D+\cdots a_iD^{i}\right)\sigma = E_n^R D\left(1+b_1D+\cdots b_iD^{i}\right)\varepsilon, && \left(H_{2n+1}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

де $\boldsymbol{N}$ – квазів'язкі, а $\boldsymbol{H}$ – квазіпружні РТ; нижній індекс при них позначає число елементів в цих РТ, а n – їхній ранг.

Таблиця 1

Список РТ (реологічне древо)

Число елементів	В тому числі: пружних	В тому числі: в'язких	δ_e	Ранг	АК	Ім'я	Кількість з'єднань	В тому числі: Паралельних	В тому числі: Послідовних	δ_c	Число реалізацій	δ	P	Q	Тип	Рід
1	1	0	1	0	+	H	0	0	0	0	1	1	1	E	КП	I
1	0	1	1	1	-	N	0	0	0	0	1	1	1	D_η	КВ	II
2	1	1	0	1	-	M	1	0	1	1	1	1	$1+D_\tau$	D_η	КП	II
2	1	1	0	1	+	V	1	1	0	1	1	1	1	$E(1+D_\tau)$	КВ	I
3	2	1	1	1	+	K, PT	2	1	1	0	2	1	$1+D_\tau$	$E(1+D_\tau)$	КП	I
3	1	2	1	2	-	L,J	2	1	1	0	2	1	$1+D_\tau$	$\eta D(1+D_\tau)$	КВ	II
4	2	2	0	2	-	Bu	3	2	2	1	4	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D(1+D_\tau)$	КП	II
4	2	2	0	2	+	A	3	2	1	1	4	1	$1+D_\tau$	$E\sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КВ	I
5	3	2	1	2	+		4	2	2	0	8	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$E\sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КП	I
5	2	3	1	3	-		4	2	2	0	8	1	$\sum_{k=0}^{2} a_k D^k$	$\eta D \sum_{k=0}^{2} b_k D^k$	КВ	II

$\boldsymbol{n}_H$ – число пружних, а $\boldsymbol{n}_N$ – число в'язких елементів, $\delta_e = |\boldsymbol{n}_N - \boldsymbol{n}_H|$ різниця між числом пружних і в'язких елементів; $\boldsymbol{n}_I$ і $\boldsymbol{n}_{\_}$ – число паралельних та послідовних приєднань в РТ відповідно, а $\delta_c = |\boldsymbol{n}_I - \boldsymbol{n}_{\_}|$ - різниця між ними; $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{\eta}$ – релаксуючі пружні та в'язкі модулі; $\delta = \delta_e + \delta_c$ – баланс РТ; τ – час релаксації напруження при постійній деформації; ν –час релаксації деформації при постійному напруженні.

1. Це твердження справедливе при n=1 - це дві сукупності КПРТ - ВЕ і РТ Фойгта. У РР перших в коефіцієнті при деформації відсутня АК, а у РТ Фойгта є, а їхні РР записуються в стандартній формі як N_1, N_2, і дві сукупності КВРТ - тіла Максвелла, в РР яких коефіцієнт при деформації без АК, і РТ Кельвіна та Пойнтінга-Томпсона, в РР яких коефіцієнт при деформації має АК, а їхні РР записуються в стандартній формі як H_2 і H_3 відповідно.

2. Якщо при n=k маємо чотири різних за структурою РР для РТ рангу k, які в стандартній формі запишуться згідно системи (5) при n=k, і за їхньою допомогою РТ k - го рангу поділяються на чотири сукупності: $R_1^{(k)} = \{N_{2k-1}\}$, $R_2^{(k)} = \{H_{2k}\}$, $R_3^{(k)} = \{N_{2k}\}$, $R_4^{(k)} = \{H_{2k+1}\}$, то при n=k+1 згідно системи (5) матимемо чотири різних за структурою РР для РТ рангу k+1, РР які утворюються за допомогою формул (3, 4) таким чином:

$$\begin{aligned} N_{2k+1} &= N \big| H_{2k}, H_{2(k+1)} = N - H_{2k+1}, \\ N_{2(k+1)} &= N \big| H_{2k+1}, H_{2k+3} = H \big| N_{2(k+1)}, \end{aligned} \tag{6}$$

і які поділяють РР k+1 го рангу на чотири сукупності РТ:

$$R_1^{(k+1)} = \{N_{2k+1}\},\ R_2^{(k+1)} = \{H_{2(k+1)}\},\ R_3^{(k+1)} = \{N_{2(k+1)}\},\ R_4^{(k+1)} = \{H_{2k+3}\}.$$

Такий розподіл РТ можна покласти в основу класифікації РТ: тип тіла - КПРТ або КВРТ, і рід - I - з АК і II - без АК в ЛДВ Q.

Форму запису РР згідно формул (5) назвемо стандартною (приведеною).

Кожна з стандартних форм запису РР РТ, число елементів в яких більше двох, має кілька невироджених реалізацій, які утворюють клас механічно (реологічно) еквівалентних реологічних тіл. Механічно еквівалентними, або подібними РТ, назвемо РТ, РР яких відрізняються величиною коефіцієнтів. Якщо ж коефіцієнти РР однакові за величиною, то такі РТ назвемо реологічно еквівалентними, тому що в цьому випадку співпадають їхні реологічні параметри - часи релаксації і часи післядії.

Виникає питання: чим відрізняються вироджені приєднання від невироджених. Виявляється, що воно тісно пов’язане з різницею між числом пружних і в'язких елементів $\delta_e = | \boldsymbol{n}_N - \boldsymbol{n}_H |$ і різницею між кількістю паралельних та послідовних включень $\delta_c = | \boldsymbol{n}_I - \boldsymbol{n}\_ |$. Назвемо балансом приєднання суму різниць $\delta = \delta_e + \delta_c$. Якщо підрахувати баланс для РТ, які застосовуються в реології, то виявиться, що для них він дорівнює одиниці:

$$\delta = \delta_e + \delta_c = 1. \tag{7}$$

Такі тіла назвемо збалансованими. Вияснимо роль балансу при побудові РТ. Приєднання певного елементу до РТ назвемо виродженим, якщо в результаті об'єднання одержимо РТ, РР якого відрізняються лише величиною коефіцієнтів, а ранг, тобто новоутворене РТ являється механічно еквівалентним базовому [1, 4].

Прослідкуємо виконання балансу при утворенні нових РТ. Приєднаємо ПЕ послідовно та паралельно до РТ k - го рангу, і побачимо, що з восьми варіантів ми маємо чотири вироджених і чотири невироджених випадки. Невиродженими, являються тільки такі приєднання, які виконуються з дотриманням умови балансу. Зауважимо, що характерною особливістю приєднання ПЕ до РТ є те, що в результаті приєднання ранг нового РТ не змінюється, причому при паралельному приєднанні тип РТ зберігається, а рід змінюється, а при послідовному з'єднанні навпаки - тип РТ змінюється, а рід залишається без змін.

Далі розглянемо приєднання ВЕ до всіх чотирьох варіантів збалансованих РТ k - го рангу, і побачимо, що в підсумку матимемо по чотири вироджених і невироджених випадки, причому невироджені випадки виконуються з виконанням умови (7), звідки робимо висновок, що невироджене приєднання ВЕ до РТ підвищує його ранг, причому послідовне приєднання зберігає тип базового РТ, змінюючи рід, а паралельне зберігає рід РТ і змінює його тип.

Одержаний результат можна сформулювати як лему:

Лема 1. ***Приєднання одиночного реологічного елементу до збалансованого РТ буде невиродженим в випадку, коли воно виконується з дотриманням умови балансу (7).***

Розглянемо далі об'єднання окремих РТ. Проаналізуємо вплив структури окремих РТ і типу об'єднання на структуру об'єднаного РТ. Будемо вважати, що РТ - доданки являються невиродженими (поліноми P_i і Q_i не мають спільних коренів), і ЛДВ обох доданків P при паралельному і Q при послідовному об'єднанні не мають спільних коренів. Всього налічується двадцять різних варіантів. з них половина буде виродженими, і половина невиродженими. Випишемо окремо невироджені випадки:

$$\begin{gathered} N_{2k-1}\left|H_{2l}=H_{2(k+l)-1}, N_{2k-1}-N_{2l}=N_{2(k+l)-1}, N_{2k-1}\right|H_{2l+1}=N_{2(k+l)}, \\ N_{2k-1}-H_{2l+1}=H_{2(k+l)}, H_{2k}\left|H_{2l}=H_{2(k+l)}, N_{2k}\right|H_{2l}=N_{2(k+l)}, \\ H_{2k}-N_{2l}=H_{2(k+l)}, H_{2k}\left|H_{2l+1}=H_{2(k+l)+1}, N_{2k}-N_{2l}=N_{2(k+l)},\right. \\ N_{2k}-H_{2l+1}=H_{2(k+l)+1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Характерною особливістю невироджених об'єднань є те, що вони виконується з дотриманням умови балансу (7). Звідси випливає, що має місце наступна теорема:

Теорема 2: *Об'єднання двох невироджених РТ буде невиродженим в випадку, коли воно виконується з дотриманням умови балансу (7).*

З формул (8) можна зробити висновок, що при паралельному з'єднанні КПРТ і КВРТ сумарне РТ є КВРТ, а якщо один з доданків має АК при деформації, а інший - ні, то результуюче РТ матиме АК при деформації. При послідовному з'єднанні КПРТ і КВРТ матимемо дзеркальне відбиття - сумарне РТ буде КПРТ, а коефіцієнт при деформації буде без АК, якщо хоча би один з РТ - доданків не матиме її.

Систему (5) можна представити в іншій формі через часи релаксації. ЛДВ P і Q являються поліномами від параметру D, і їх можна розкласти на множники і представити в такому вигляді:

$$P_k=\prod_{i=1}^{k-l}\left(D-\mu_i\right), Q_k=D^j M_R \prod_{i=1}^{k-j}\left(D-\lambda_i\right), \tag{9}$$

де j=0, коли ЛДВ Q має АК, і j=1 в протилежному випадку; $l=1$ в випадку, коли РТ є квазів'язким, і $l=0$, коли РТ буде квазіпружним λ_μ і μ_μ – корені характеристичних поліномів P і Q відповідно, які виражаються через часи релаксацій таким чином:

$\lambda_{\mu} = -\tau_{\mu}^{-1}, \mu_{\mu} = -\nu_{\mu}^{-1}$, де τ_{μ} – часи релаксації напруг при постійній деформації (часи релаксацій), а ν_{μ} – часи релаксації деформацій при постійній напрузі (часи післядії, часи повзучості)), M_R– релаксуючий модуль (пружний, коли в ЛДВ Q є АК, і в'язкий в протилежному випадку).

Виразимо далі корені характеристичних поліномів через часи релаксації, і прийдемо в підсумку до такої форми запису РР системи (5) через часи релаксації:

$$
\begin{aligned}
&a_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_i)\sigma = \mathrm{H}_k^R D b_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon, && (N_{2k-1}),\\
&a_k\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_i)\sigma = \mathrm{H}_k^R D b_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D+\lambda_i)\varepsilon, && (H_{2k}),\\
&a_{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(D+\mu_{\mu})\sigma = E_k^R b_k\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_{\mu})\varepsilon, && (N_{2k}),\\
&a_k\prod_{i=1}^{k}(D+\mu_{\mu})\sigma = E_k^R b_k\prod_{i=1}^{k}(D+\lambda_{\mu})\varepsilon, && (H_{2k+1}).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Представлення РТ в формі (10) дозволяє провести порівняння з розбиттям РТ за Блендом [6]:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{N+1}(D+\mu_i)\sigma = E\prod_{j=1}^{N}(D+\lambda_j)D\varepsilon, && (B_1),\\
&\prod_{i=1}^{N}(D+\mu_i)\sigma = E\prod_{j=1}^{N}(D+\lambda_j)\varepsilon, && (B_2),\\
&\prod_{i=1}^{N}(D+\mu_i)\sigma = \eta'\prod_{j=1}^{N}(D+\lambda_j)D\varepsilon, && (B_3),\\
&\prod_{i=1}^{N-1}(D+\mu_i)\sigma = \eta'\prod_{j=1}^{N}(D+\lambda_j)\varepsilon, && (B_4),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

де N – число нормальних координат, за допомогою яких описується деформація в РТ.

Зауважимо, що в формулі B_4 (формула (85) на стор. 62 в [5]) показники над добутками треба взяти на одиницю менше, тому що вираз для деформації

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta D} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i B_i}{D + \lambda_i} \right), \qquad (12)$$

а сталі B_i мають розмірність оберненого пружного модуля, при $1/E = 1/\eta = 0$ зводиться до такого рівняння:

$$\prod_{i=1}^{N} (D + \lambda_i)\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i B_i \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} (D + \lambda_j)\sigma = \eta_0^{-1} \prod_{i=1}^{N-1} (D + \mu_i)\sigma, \qquad (13)$$

де $\eta_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i B_i \right)^{-1} = \eta' -$ в'язкий модуль.

Таке представлення певним чином пов'язується з стандартною формою РТ k - го рангу (5): $B_1 \sim H_{2k}, B_2 \sim H_{2k+1}, B_3 \sim N_{2k-1}, B_4 \sim N_{2k}$.

Знайдемо зв'язок між кількістю нормальних координат в РТ N і його рангом k , а також між релаксуючими модулями E_k^R і H_k^R та параметрами η' і E , враховуючи, що за теоремою Вієта $1/a_n = \prod_{i=1}^{n} (-1)^i \mu_i = \prod_{i=1}^{n} \tau_i^{-1}$ і $1/b_n = \prod_{i=1}^{n} (-1)^i \lambda_i = \prod_{i=1}^{n} \nu_i^{-1}$. Система рівнянь (10) набуде такого виду:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{k-1} \tau_i \prod_{i=1}^{k-1} (D + \mu_i)\sigma = \mathrm{H}_k^R D \prod_{i=1}^{k-1} \nu_i \prod_{i=1}^{k-1} (D + \lambda_i)\varepsilon, \quad (N_{2k-1}), \\
&\prod_{i=1}^{k} \tau_i \prod_{i=1}^{k} (D + \mu_i)\sigma = \mathrm{H}_k^R D \prod_{i=1}^{k-1} \nu_i \prod_{i=1}^{k-1} (D + \lambda_i)\varepsilon, \quad (H_{2k}), \\
&\prod_{i=1}^{k-1} \tau_i \prod_{i=1}^{k-1} (D + \mu_\mu)\sigma = E_k^R \prod_{i=1}^{k} \nu_i \prod_{i=1}^{k} (D + \lambda_i)\varepsilon, \quad (N_{2k}), \\
&\prod_{i=1}^{k} \tau_i \prod_{i=1}^{k} (D + \mu_\mu)\sigma = E_k^R \prod_{i=1}^{k} \nu_i \prod_{i=1}^{k} (D + \lambda_i)\varepsilon, \quad (H_{2k+1}).
\end{aligned} \qquad (14)$$

звідки, порівнюючи системи (10) і (11), знаходимо, що k=N+1 для перших двох рівнянь систем (14), і k=N для інших, а для непружних модулів E і η' одержимо такі вирази:

$$E = \mathrm{H}_N^R b_N / a_{N+1} = \mathrm{H}_{N+1}^R \nu_{N+1} \prod_{i=1}^{N} (\tau_i / \nu_i), \qquad (B_1),$$

$$E = E_N^R b_N / a_N = E_{N+1}^R \prod_{i=1}^{N} (\tau_i / \nu_i), \qquad (B_2),$$

$$\eta' = \mathrm{H}^{R}_{N+1} b_N / a_N = \mathrm{H}^{R}_{N+1} \prod_{i=1}^{N} (\tau_i / \nu_i), \qquad (B_3),$$
$$\eta' = E^{R}_{N} b_N / a_{N-1} = (E^{R}_{N} / \tau_n) \prod_{i=1}^{N} (\tau_i / \nu_i), \qquad (B_4). \tag{15}$$

Якщо ввести за Зінером [1] нерелаксуючі модулі для РТ з довільним рангом за формулою

$$M_U = M_R b_n / a_m, \tag{16}$$

де m і n - порядки ЛДВ P і Q, то можна зробити висновок, що модулі E і η' в формулах (11) являються нерелаксуючими пружними та в'язкими модулями відповідно.

Прив'язка до нормальних координат не дозволяє впорядкувати РТ за рангом. Для того, щоб досягти відповідності між представленням РР в формі (10) і (11), треба для випадків, коли в виразі для деформації (12) константа $\eta^{-1} = 0$, збільшити на одиницю число нормальних координат. Ще треба зауважити, що використання нормальних координат пов'язане з значними математичними труднощами, чого позбавлений пропонований метод розбиття РТ на класи і побудови РТ високого рангу. Використання пропонованого алгоритму дозволяє одержати РТ високого рангу і позбавитись виродження за допомогою рівняння балансу (7).

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Зинер К. М. Упругость и неупругость металлов. - М.: ИЛ, 1954. - 396 с.
2. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. - М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
3. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. - М.: Металлургия, 1974. – 352 с.
4. Рейнер М. Реология. - М.: Наука, 1965. – 294 с.
5. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. - М.; Мир, 1965. – 200 с.