КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.6:519

DOI:10.34229/2707-451X.20.4.4

В.К. ЗАДІРАКА, Л.В. ЛУЦ, І.В. ШВІДЧЕНКО

ОПТИМАЛЬНЕ ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Побудовано оптимальні за точністю та близькі до них квадратурні формули наближеного обчислення перетворення Фур`є, вейвлет-перетворень, перетворення Бесселя для деяких класів підінтегральних функцій. Застосовано теорію тестування якості прикладного програмного забезпечення до визначення якості запропонованих квадратурних формул та оцінок їх характеристик.

Ключові слова: *квадратурна формула, оптимальний алгоритм, інтерполяційний клас, швидкоосцилююча функція, тестування якості.*

Вступ. Чи актуальна зазначена тематика? Безумовно так! Чому? По-перше, це одна із основних задач обчислювальної математики, і треба розробляти нові ефективні (в тому числі оптимальні) методи її розв`язання. По-друге, широке коло застосувань: задачі математичної фізики, комп`ютерне моделювання, задачі механіки, фізики, цифрової обробки сигналів і т. і.

Чи потрібні оптимальні за точністю квадратурні формули? Так. Вони потрібні для розв`язання високоточних задач та обчислення інтегралів з заданою точністю, а це – досить велике коло застосувань.

Новизна цієї роботи полягає у тому, що в ній розглядаються більш вузькі (інтерполяційні) класи функцій, що дозволяє покращити потенційну спроможність чисельних методів. Для побудованих квадратурних формул наводяться конструктивні оцінки їх повної похибки, які дають гарантію якості наближеного розв`язку задачі.

Наводяться резерви оптимізації обчислень та приклади. Зокрема, розглядається задача оптимального інтегрування функцій.

1. Постановка задачі. Потрібно обчислити інтеграл

$$R(f)=\int_{\Omega} f(X)g(X)dX \qquad (1)$$

по деякій стандартній області Ω, наприклад, $\Omega\equiv\pi_n: -1\le x_i\le 1,\quad i=\overline{1,n},\quad X=(x_1,...,x_n)$, причому відомий клас функцій F, $f(X)\in F$, $g(X)$ – деяка фіксована функція і є можливість обчислювати N значень функціоналів $L_1(f),\ldots,\ L_N(f)$, де $L_\nu(f)\in\boldsymbol{L}$, $\nu=\overline{1,N}$, $\boldsymbol{L}$ – задана множина функціоналів. Характерними прикладами таких значень функціоналів можуть бути значення функцій та її похідних у ряді точок, на лінії, або на площині, коефіцієнти розкладу функцій у ряди за даними системами базисних функцій [1] тощо.

Розглянемо пасивну чисту мінімаксну стратегію.

Позначимо як

$$R\left(f,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)=M\left(\{L_\nu(f)\}_1^N\right)$$

результат застосування деякого методу M до вхідних даних задачі. Абсолютною похибкою пасивного методу M на класі функцій F називають величину

$$V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,M\right)=\sup_{f\in F}\left|R(f)-R\left(f,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)\right|.$$

Нехай

$$V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)=\inf_M V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,M\right),$$

де нижня грань береться за всіма методами, які використовують інформацію про клас F і вектори $\{L_\nu(f)\}_1^N$. Якщо існує метод M^o, для якого

$$V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)=V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,M^o\right),$$

$$R^o\left(f,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)=M^o\left(\{L_\nu(f)\}_1^N\right),$$

то він зветься найкращим за точністю пасивним методом або пасивною стратегією інтегрування на класі F, або оптимальним при заданих значеннях функціоналів $\{L_\nu(f)\}_1^N$.

Метод M_η^o, для якого

$$V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,M_\eta^o\right)\le V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)+\eta,\ \eta>0,$$

називають найкращим за точністю з точністю до η. Будемо припускати (зазвичай це виконується), що $\lim_{N\to\infty}V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)=0$.

Якщо $\eta=\mathrm{o}\left[V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)\right]$, то метод M_η^o зветься асимптотично найкращим, якщо $\eta=\mathrm{O}\left[V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right)\right]$, то – найкращим за порядком точності. Аналогічні визначення мають місце для випадка, коли нижня грань береться за усіма методами з допустимої множини $\boldsymbol{M}$:

$$V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,\boldsymbol{M}\right)=\inf_{M\in\boldsymbol{M}}V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N,M\right).$$

Нехай ще

$$V(F,\boldsymbol{L})=\inf_{\{L_\nu(f)\}_1^N\subset\boldsymbol{L}}V\left(F,\{L_\nu(f)\}_1^N\right).$$

Якщо існують $\left\{L_\nu^*(f)\right\}_1^N$ і M^*, для яких

$$V_N(F,\boldsymbol{L})=V\left(F,\left\{L_\nu^*(f)\right\}_1^N,M^*\right),$$

$$R^*\left(f,\left\{L_\nu^*(f)\right\}_1^N\right)=M^*\left(\left\{L_\nu^*(f)\right\}_1^N\right),$$

то метод M^* зветься оптимальним за точністю пасивним методом інтегрування для класів F, $\boldsymbol{L}$.

Метод, для якого $V\left(F,\left\{L_\nu^*\right\}_1^N,M_\eta^*\right)\le V_N(F,\boldsymbol{L})+\eta$, $\eta>0$, зветься оптимальним за точністю з точністю до η.

Якщо $\eta = o\left[V_N\left(F, \boldsymbol{L}\right)\right]$, $O\left[V_N\left(F, \boldsymbol{L}\right)\right]$, то метод M_η^* зветься відповідно асимптотично оптимальним, оптимальним за порядком.

Існують також послідовні чисті мінімаксні стратегії, змішані послідовно-оптимальні стратегії, байєсовські стратегії розв`язання задач за умов невизначеності апріорної інформації.

Як приклади задач у рамках наведеної постановки розглянемо задачі обчислення перетворення Фур`є від фінітних функцій, вейвлет-перетворення, перетворення Бесселя.

Для побудови оптимальних квадратурних і кубатурних формул та оцінок їх похибки на класах функцій використовуються:

- для класів підінтегральних функцій F – метод «капелюхів» [2];
- для класів F_N, $F_{N,\varepsilon}$ – метод граничних функцій [3], який розглянемо більш детально.

У випадку фіксованих значень $\left\{L_\nu(f)\right\}_1^N$ отримуємо інтерполяційні класи функцій $F_N \equiv F\left(\left\{L_\nu(f)\right\}_1^N\right)$ всіх функцій з F із заданими значеннями $\left\{L_\nu(f)\right\}_1^N$. У цьому випадку $V_N\left(F, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N\right) = V_N\left(F_N\right)$ і $R^o(f, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N) = R^*(f, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N) = R_N^*$. У випадку, коли значення $\left\{L_\nu(f)\right\}_1^N$ наближені й фіксовані, $\left|L_\nu(f) - \tilde{L}_\nu(f)\right| \le \varepsilon_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, отримаємо відповідно клас $F_{N,\varepsilon}$. У цьому випадку $V_N\left(F_{N,\varepsilon}\right) = V_{N,\varepsilon}\left(F, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N\right) = V_{N,\varepsilon}$ і $R^o(f, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N) = R^*(f, \left\{L_\nu(f)\right\}_1^N) = R_{N,\varepsilon}^*$.

Позначимо

$$R_{N,\varepsilon}^+ = \sup_{f \in F_{N,\varepsilon}} R(f), \quad R_{N,\varepsilon}^- = \inf_{f \in F_{N,\varepsilon}} R(f).$$

Тоді

$$R_{N,\varepsilon}^* = \frac{R_{N,\varepsilon}^+ + R_{N,\varepsilon}^-}{2}, \quad V_{N,\varepsilon} = \frac{R_{N,\varepsilon}^+ - R_{N,\varepsilon}^-}{2}. \tag{2}$$

Якщо в класі $F_{N,\varepsilon}$ існують мажоранта $f_{N,\varepsilon}^+$ і міноранта $f_{N,\varepsilon}^-$, то

$$R_{N,\varepsilon}^\pm = \int_\Omega \left[f_{N,\varepsilon}^\pm(X) \cdot \overline{g}(X) - f_{N,\varepsilon}^\mp(X) \cdot \underline{g}(X) \right] dX,$$

$$\overline{g}(X) = \frac{\left|g(X)\right| + g(X)}{2}, \quad \underline{g}(X) = \frac{\left|g(X)\right| - g(X)}{2}.$$

Метод (2) розроблений в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України і отримав назву «метод граничних функцій» (МГФ) [3]. Він дозволяє будувати оптимальні алгоритми обчислення інтегралу (1) і будувати оцінки похибки чисельного інтегрування на класах функцій F, F_N, $F_{N,\varepsilon}$. МГФ застосовується також для побудови оптимальних алгоритмів інших типових класів задач обчислювальної математики [4].

Перейдемо до розгляду конкретних класів F, F_N.

1°. $g(X) \equiv 1$

1. Розглянемо клас $C_{1,L}^n$ – клас функцій n змінних, що задовольняють умові Ліпшиця з константою L. У цьому випадку $R(f) = \int_{\pi_n} f(X)dX$, $f \in C_{1,L}^n$, $L_\nu(f) = f_\nu = f\left(X_\nu\right)$, $X_\nu \in \pi_n$, $\nu = \overline{1, N}$.

Маємо [5]:

$$V\left(C_{1,L}^n,\{X_\nu\}_1^N\right)=\sup_{f\in C_{1,L}^n}\left|R(f)-\sum_{\nu=1}^N d_\nu^0 f(X_\nu)\right|=\sup_{f\in\left\{f/f\in C_{1,L}^n,\ f_\nu=0,\ \nu=\overline{1,N}\right\}}\left|R(f)\right|=$$

$$=L\sum_{\nu=1}^N\int_{D_\nu}\|X-X_\nu\|_1\,dX\ ,$$

$$D_\nu=\left\{X\ /\ X_\nu\in\pi_n,\ \min_{1\le s\le N}\|X-X_s\|_1=\|X-X_\nu\|_1\right\},\ d_\nu^0=\varphi_\nu'(0)=\int_{D_\nu}dX\ ,$$

$$\varphi_\nu(\varepsilon)=\sup_{f\in\left\{f/f\in C_{1,L}^n,\ f_\nu=\varepsilon,\ f_s=0,\ s\ne\nu\right\}}R(f)\,.$$

Розглянемо випадок $1/m$-мінімальної сітки $\left\{X_\nu^*\right\}_1^{m^n}$ в π_n, $m^n\le N<(m+1)^n$, оскільки

$$V\left(C_{1,L}^n,\{X_\nu\}_1^{m^n}\right)=V_N\left(C_{1,L}^n,\Phi_1\right),$$

де Φ_1 – множина функціоналів, що відповідають значенням $f\in C_{1,L}^n$ у будь-яких точках $X_\nu\in\pi_n$.

Тобто, при $N=m^n$

$$V\left(C_{1,L}^n,\left\{X_\nu^*\right\}_1^N\right)=\sup_{f\in C_{1,L}^n}\left|R(f)-\frac{2^n}{N}\sum_{\nu=1}^N f\left(X_\nu^*\right)\right|=L\cdot N\cdot n\cdot 2^{n-1}\int_{\left|X_1-X_1^*\right|\le 1/m}\left|X_1-X_1^*\right|^n dX_1=L\cdot\frac{2^n\cdot n}{n+1}\cdot\frac{1}{N^{1/n}}\,.$$

2. Розглянемо клас $C_{1,L,N}^n$ – клас функцій $f\in C_{1,L}^n$, значення яких фіксовані в $N=m^n$ точках X_ν^*, $f_\nu=f\left(X_\nu^*\right)$, $\nu=\overline{1,N}$. У цьому випадку

$$V\left(C_{1,L,N}^n,\left\{X_\nu^*\right\}_1^N\right)\equiv V\left(C_{1,L}^n,\{f_\nu\}_1^N\right)=\int_{\pi_n}\left(\left(f^+(X)-f^-(X)\right)/2\right)dX=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi_n}\left[\min_{1\le\nu\le N}\left\{f_\nu+L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\}-\max_{1\le\nu\le N}\left\{f_\nu-L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\}\right]dX=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^N\left[\int_{D_\nu^+}\left\{f_\nu+L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\}dX-\int_{D_\nu^-}\left\{f_\nu-L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\}dX\right]=$$

$$=\sum_{\nu=1}^N f_\nu\frac{V\left(D_\nu^+\right)-V\left(D_\nu^-\right)}{2}+\sum_{\nu=1}^N\frac{1}{2}\left[\int_{D_\nu^+}\left\|X-X_\nu^*\right\|_1 dX+\int_{D_\nu^-}\left\|X-X_\nu^*\right\|_1 dX\right],$$

де

$$D_\nu^+=\left\{X\ /\ \min_{1\le s\le N}\left\{f_s+L\left\|X-X_s^*\right\|_1\right\}=f_\nu+L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\},$$

$$D_\nu^-=\left\{X\ /\ \max_{1\le s\le N}\left\{f_s-L\left\|X-X_s^*\right\|_1\right\}=f_\nu-L\left\|X-X_\nu^*\right\|_1\right\},$$

та оптимальне значення інтегралу

$$R^*(f,\{f_\nu\}_1^N)=\int_{\pi_n}\frac{f^+(X)+f^-(X)}{2}dX=$$

$$=\sum_{\nu=1}^N f_\nu\frac{V\left(D_\nu^+\right)+V\left(D_\nu^-\right)}{2}+\sum_{\nu=1}^N\frac{L}{2}\left[\int_{D_\nu^+}\left\|X-X_\nu^*\right\|_1 dX-\int_{D_\nu^-}\left\|X-X_\nu^*\right\|_1 dX\right].$$

2º. Синус-перетворення ($n=1$, $g(x)=\sin x$)

Розглянемо задачу обчислення інтегралу

$$R(f)=\int_a^b f(x)\sin\omega x dx, \tag{3}$$

де $f(x)\in F$ (F – деякий клас функцій), ω – довільне дійсне число ($|\omega|\geq 2\pi(b-a)$), й інформація про $f(x)$ задана N значеннями у вузлових точках з відрізку $[a,b]$.

Лема 1. Нехай $f(x)\in C_{L,N}$ ($C_{L,N}\equiv C^1_{1,L,N}$), $f(x_i)=f_i=0$, $i=\overline{0,N-1}$. Нехай на відрізках $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ міститься k_i коливань функції $\sin\omega x$ і N вузлів x_i на $[a,b]$ входять у число нулів функції $\sin\omega x$. Тоді при $N<|\omega|$ (випадок сильної осциляції) мажоранта області невизначеності класу $C_{L,N}$ – це функція $p(x)$ вигляду

$$p(x)=\begin{cases}L\left(x-x_{ik}\right)sign\sin\omega x_{ik}, & x_{ik}\leq x\leq\frac{1}{2}\left(x_{ik}+x_{ik+1}\right),\\ L\left(x_{ik+1}-x\right)sign\sin\omega x_{ik}, & \frac{1}{2}\left(x_{ik}+x_{ik+1}\right)\leq x\leq x_{ik+1},\end{cases} \tag{4}$$

де $k=\overline{0,k_i-1}$, $x_{i0}=x_i$, $x_{ik_i}=x_{i+1}$, $x_{ik}=\dfrac{\pi}{2|\omega|}\left\{\left[\left(|\omega|/\pi\right)x_i+1/2\right]+2k+1\right\}$ – нулі $\sin\omega x$ на Δx_i, $k_i=\left[\left(|\omega|/\pi\right)x_{i+1}\right]-\left[\left(|\omega|/\pi\right)x_i\right]$, $i=\overline{0,N-1}$.

Доведення. Проведемо методом від супротивного. Нехай існує функція $g(x)\neq p(x)$, на якій досягається $\sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} R(f)$, тобто

$$\sup_{f(x)\in C_{L,N}} R(f)=\int_0^1 g(x)\sin\omega x dx.$$

Представимо функцію $g(x)$ у вигляді:

$$g(x)=p(x)+\phi(x),\ \ g(x_i)=p(x_i)=0,\ \ i=\overline{0,N-1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 g(x)\sin\omega x dx=$$

$$=\int_0^1 p(x)\sin\omega x dx+\int_0^1\phi(x)\sin\omega x dx=\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\sin\omega x dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(x)\sin\omega x dx\right\}.$$

Функція $\phi(x)$ має бути такою, щоб $g(x)\in C_{L,N}$. Доведемо, що при цьому

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi(x)\sin\omega x dx \le 0 . \tag{5}$$

Дійсно,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi(x)\sin\omega x dx = \sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{ik}}^{x_{ik+1}} \phi(x)\sin\omega x dx = \int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \phi(x)\sin\omega x dx + \left(k_i-1\right)\left(\int_{\pi/2|\omega|}^{3\pi/2|\omega|} \phi(x)\sin\omega x dx + \right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/2|\omega|}^{5\pi/2|\omega|} \phi(x)\sin\omega x dx \right) + \int_{x_{i+1}-\frac{\pi}{2|\omega|}}^{x_{i+1}} \phi(x)\sin\omega x dx = v_1(\omega) + \left(k_i-1\right)\left\{v_2(\omega)+v_3(\omega)\right\} + v_4(\omega) .$$

Дослідимо можливу поведінку $\int \phi(x)\sin\omega x dx$ на інтервалах $\left[x_i, x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2|\omega|},\frac{3\pi}{2|\omega|}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2|\omega|},\frac{5\pi}{2|\omega|}\right]$ та $\left[x_{i+1}-\frac{\pi}{2|\omega|}, x_{i+1}\right]$.

1. $x\in\left[x_i, x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}\right]$,

а) нехай $\left[x_i, x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}\right]\equiv\left[\frac{2k\pi}{|\omega|},\left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{|\omega|}\right]$, $k=0,1,2...$. У цьому випадку $\sin\omega x\ge 0$ і функція $\phi(x)$ має бути спадаючою із областю значень: $-2L\left(x-x_i\right)\le\phi(x)\le 0$, інакше $g(x)\notin C_{L,N}$. Оскільки $g\left(x_i\right)=0$, $i=\overline{0,N-1}$, $p(x_i)=0$, то $\varphi(x_i)=0$. Оскільки $\phi(x)$ не може зростати, то $\phi(x)\le 0$. Враховуючи, що $\sin\omega x\ge 0$, отримаємо

$$\int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \phi(x)\sin\omega x dx \le 0 ;$$

б) нехай $\left[x_i, x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}\right]\equiv\left[\left(2k+1\right)\frac{\pi}{|\omega|},\left(2k+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{|\omega|}\right]$, $k=0,1,2...$. У цьому випадку $\sin\omega x\le 0$ і функція $\phi(x)$ не спадає. Вона може бути тільки зростаючою (область її значень: $0\le\phi(x)\le 2L\left(x-x_i\right)$, інакше $g(x)\notin C_{L,N}$). Повторюючи аналогічні пункту а) міркування, отримаємо, що і у цьому випадку

$$\int_{x_i}^{x_i+\frac{\pi}{2|\omega|}} \phi(x)\sin\omega x dx \le 0 .$$

Таким чином, нарешті маємо:

$$\nu_1(\omega)\le 0 . \tag{6}$$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{3\pi}{2|\omega|} \right]$.

На цьому інтервалі $p(x)$ – спадаюча, отже, $\phi(x)$ має зростати, інакше $g(x) \notin C_{L,N}$. Тоді для довільного $\delta \in \left[0, \frac{\pi}{2|\omega|} \right]$

$$\phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - \delta \right) \le \phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} + \delta \right). \tag{7}$$

За визначенням інтегралу

$$\int\limits_{\pi/2|\omega|}^{3\pi/2|\omega|} \phi(x)\sin\omega x dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \phi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + \xi_i \right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + \xi_i \right) \right) \Delta t,$$

$\xi_i \in \Delta t,\ \Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{2\omega M}$, де M – кількість інтервалів Δt на відрізку $\left[\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{\pi}{|\omega|} \right]$.

Нехай $\xi_i = t_i + \theta_i \Delta t = (i + \theta_i)\Delta t$, $0 \le \theta_i \le 1$. Оскільки $\frac{\pi}{2\omega} + (i+\theta_i)\Delta t = \frac{\pi}{\omega} - \Delta t(M - i - \theta_i)$, отримаємо

$$\int\limits_{\pi/2|\omega|}^{3\pi/2|\omega|} \phi(x)\sin\omega x dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \phi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i+\theta_i)\Delta t \right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i+\theta_i)\Delta t \right) \right) \Delta t =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (M - i - \theta_i)\Delta t \right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (M - i - \theta_i)\Delta t \right) \right) \Delta t =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \left\{ \phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i+\theta_i)\Delta t \right) \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i+\theta_i)\Delta t \right) \right) + \phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} + (i+\theta_i)\Delta t \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{|\omega|} + (i+\theta_i)\Delta t \right) \right) \right\} \Delta t.$$

Оскільки $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega} \right]$ $\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{\omega} + \alpha \right) \right) = -\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{\omega} - \alpha \right) \right)$, отримаємо

$$\int\limits_{\pi/2|\omega|}^{3\pi/2|\omega|} \phi(x)\sin\omega x dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{2M} \left\{ \phi\left(\frac{\pi}{|\omega|} - (i+\theta_i)\Delta t \right) - \phi\left(\frac{\pi}{2|\omega|} + (i+\theta_i)\Delta t \right) \right\} \times \sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} - (i+\theta_i)\Delta t \right) \right) \Delta t.$$

Оскільки $\sin\left(\omega\left(\frac{\pi}{2|\omega|} - (i+\theta_i)\Delta t \right) \right) \ge 0$, $\frac{\pi}{2\omega} \le \frac{\pi}{\omega} - (i+\theta_i)\Delta t \le \frac{\pi}{\omega}$, $i = \overline{0, M-1}$, враховуючи співвідношення (7), нарешті маємо

$$v_2(\omega) \le 0. \tag{8}$$

За аналогією з доведенням оцінки (8) легко довести, що $v_3(\omega) \le 0$ у випадку $x \in \left[\frac{3\pi}{2|\omega|}, \frac{5\pi}{2|\omega|} \right]$.

Повторюючи міркування, аналогічні п. 1, отримаємо, що $v_4(\omega) \le 0$ у випадку $x \in \left[x_{i+1} - \frac{\pi}{2|\omega|}, x_{i+1} \right]$.

Таким чином, твердження (5) доведене. Отже, $\sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} \int\limits_0^1 g(x)\sin\omega x dx$ досягатиметься тільки у тому випадку, якщо $g(x) \equiv p(x)$. У протилежному випадку для будь-якої функції $g(x) \in C_{L,N}$ маємо: $\int\limits_0^1 g(x)\sin\omega x dx < \int\limits_0^1 p(x)\sin\omega x dx$, тобто функція $p(x)$ є функцією, на якій досягається $\sup\limits_{f(x)\in C_{L,N}} R(f)$.

Теорема 1. В умовах леми 1 справедлива наступна оцінка знизу:

$$V\left(C_{L,N}, \{f_i\}_0^{N-1}, \{x_i\}_0^{N-1}, \omega\right) = \frac{1}{2}\left| \sup_{f(x)\in C_{L,N}} R(f) - \inf_{f(x)\in C_{L,N}} R(f) \right| =$$

$$= \frac{2L}{\omega^2}\left\{ \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right] - 2\sum_{i=0}^{N-1}\left\{ \left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right] - \left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right] \right\}\sin^2\frac{\pi|\Delta f_i|}{4L\Delta x_i} \right\} + A(\omega),$$

де $A(\omega) = \frac{L}{\omega}\left| \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\left(1 - \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\left(1 + \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\right) - \left(1 - \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\cos\omega \right|$,

причому квадратурна формула

$$R(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int\limits_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} f_{ik}^*(x)\sin\omega x dx, \tag{9}$$

де $f_{ik}^*(x)$ – чебишевський центр області невизначеності $C_{L,N}$ на відрізках $[x_{i,k}, x_{i,k+1}]$:

$$f_{ik}^*(x) = \begin{cases} f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\dfrac{\pi k}{|\omega|}, & x_{i,k} \le x \le \overline{x}_{i,k}, \\ f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\dfrac{\pi k}{|\omega|} + L\left\{ x - \left\{ \left[\dfrac{|\omega|}{\pi}x_i + 1\right] + k + \dfrac{1}{2} \right\}\dfrac{\pi}{|\omega|} \right\} - \dfrac{1}{2L}\dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\dfrac{\pi k}{|\omega|} \right\}, & \overline{x}_{i,k} \le x \le \overline{\overline{x}}_{i,k}, \\ f_i + \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_i}(k+1)\dfrac{\pi}{|\omega|}, & \overline{\overline{x}}_{i,k} \le x \le x_{i,k+1}, \end{cases}$$

$$\overline{x}_{i,k} = \frac{x_{i,k} + x_{i,k+1}}{2} - \frac{|\Delta f_i|}{\Delta x_i}\frac{\pi}{|\omega|}, \quad \overline{\overline{x}}_{i,k} = \frac{x_{i,k} + x_{i,k+1}}{2} + \frac{|\Delta f_i|}{\Delta x_i}\frac{\pi}{|\omega|},$$

k_i, $x_{i,k}$ визначені у лемі 1, є оптимальною за точністю квадратурною формулою обчислення інтегралу $R(f)$ в класі $C_{L,N}$ при $N < |\omega|$.

Доведення. Використовуючи співвідношення (7) та (8), отримаємо:

$$V\left(C_{L,N},\{f_i\}_0^{N-1},\{x_i\}_0^{N-1},\omega\right)=\frac{1}{2}\left|\sup_{f(x)\in C_{L,N}} I_2(\omega)-\inf_{f(x)\in C_{L,N}} I_2(\omega)\right|=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f^{+}(x)\sin\omega x dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f^{-}(x)\sin\omega x dx\right\}=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}}\left(f^{+}(x)-f^{-}(x)\right)\sin\omega x dx\right|=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} f_1(x)\sin\omega x dx,$$

де

$$f_1(x)=\begin{cases} L\left(x-x_{i,k}\right) sign\sin\omega x_{i,k}, & x_{i,k}\le x\le \overline{x}_{i,k},\\ \dfrac{1}{2}\left(L\Delta x_{i,k} sign\sin\omega x_{i,k}-\dfrac{\pi\left|\Delta f_i\right|}{\Delta x_i\omega}\right), & \overline{x}_{i,k}\le x\le \overline{\overline{x}}_{i,k},\\ L\left(x_{i,k+1}-x\right) sign\sin\omega x_{i,k}, & \overline{\overline{x}}_{i,k}\le x\le x_{i,k+1},\\ \qquad i=\overline{0,N-1},\quad k=\overline{0,k_i-1},\quad x\notin\left[x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]},x_N\right], & \\ L\left(x-x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]}\right) sign\sin\omega x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]}, & x\in\left[x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]},1\right].\end{cases}$$

Нарешті отримаємо:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} f_1(x)\sin\omega x dx\ge\frac{4L}{\omega^2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\left|\sin\frac{\omega}{2}\left(x_{i,k}+x_{i,k+1}\right)\right|\left(\sin^2\frac{\omega\Delta x_{i,k}}{4}-\sin^2\frac{\omega\left|\Delta f_i\right|\pi}{L\omega\Delta x_i}\right)\right|+A(\omega),$$

де

$$A(\omega)=\frac{L}{\omega}\left|\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\Delta x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]}\cos\omega\left(1-\frac{\Delta x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]}}{2}\right)-\Delta x_{N-1,\left[|\omega|/\pi\right]}\cos\omega\right|=$$

$$=\frac{L}{\omega}\left|\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\left(1-\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\left(1+\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\right)-\left(1-\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]\frac{\pi}{|\omega|}\right)\cos\omega\right|.$$

Тоді

$$\left|\int_0^1 f_1(x)\sin\omega x dx\right|=\frac{4L}{\omega^2}\left|\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1}\left\{\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\pi\left|\Delta f_i\right|}{4L\Delta x_i}\right\}\right|+A(\omega)=$$

$$=\left|\frac{4L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i+1\right]+1\right\}-\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i+1\right]\right\}\sin^2\frac{\omega\left|\Delta f_i\right|\pi}{4L\Delta x_i}\right|+$$

$$+A(\omega)=\frac{2L}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]-2\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right]\right\}\cdot\sin^2\frac{\omega\left|\Delta f_i\right|\pi}{4L\Delta x_i}\right\}+A(\omega)\,. \qquad (10)$$

Необхідна оцінка знизу доведена.

Отримаємо відповідну оцінку зверху для $V_N(C_{L,N}, R, \omega, \{f_i\}_0^{N-1})$.

$$V_N(C_{L,N}, R, \omega, \{f_i\}_0^{N-1}) = \sup_{f(x)\in C_{L,N}} \left| \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1} \int_{x_{i,k}}^{x_{i,k+1}} \left[f(x) - f_{i,k}^*(x) \right] \sin\omega x dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1} \left\{ \int_{x_{i,k}}^{\bar{x}_{i,k}} \left(x - x_{i,k}\right) sign \sin\omega x_{i,k} \sin\omega x dx + \frac{L}{2}\int_{\bar{x}_{i,k}}^{\bar{\bar{x}}_{i,k}} \left(\Delta x_{i,k} - \frac{|\Delta f_i \pi|}{L\omega\Delta x_i} \right) sign \sin\omega x_{i,k} \times \right.$$

$$\left. \times \sin\omega x dx + L\int_{\bar{\bar{x}}_{i,k}}^{x_{i,k+1}} \left(x_{i,k+1} - x\right) sign \sin\omega x_{i,k} \sin\omega x dx \right\} + L \int_{x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}^{1} \left(x - x_{N-1,[|\omega|/\pi]}\right) \times$$

$$\times sign \sin\omega x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \sin\omega x dx = \frac{4L}{\omega^2} \left| \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1} \right| \sin\frac{\omega}{2}\left(x_{i,k} + x_{i,k+1}\right) \left| \left(\sin^2\frac{\omega\Delta x_{i,k}}{4} - \sin^2\frac{\omega|\Delta f_i|\pi}{L\omega\Delta x_i} \right) \right| +$$

$$+ \frac{L}{\omega} \left| \frac{2}{\omega} \sin\frac{\omega}{2}\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \cos\omega \left(1 - \frac{\Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]}}{2} \right) - \Delta x_{N-1,[|\omega|/\pi]} \cos\omega \right| =$$

$$= \frac{4L}{\omega^2} \left| \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{k_i-1} \right| \sin\frac{\omega}{2}\left(x_{i,k} + x_{i,k+1}\right) \left| \left(\sin^2\frac{\omega\Delta x_{i,k}}{4} - \sin^2\frac{\omega|\Delta f_i|\pi}{L\omega\Delta x_i} \right) \right| + A(\omega). \quad (11)$$

Доведення теореми завершується порівнянням оцінок (10) і (11).

3°. Вейвлет-перетворення

Розглянемо побудову ефективних за точністю алгоритмів обчислень вейвлет-перетворень вигляду

$$W_f(s,t) = s^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\frac{x-t}{s}\right)dx, \quad (12)$$

де $\psi(x)$ – вейвлет-функція [6 – 8], яка є дійсною функцією від x, коливається навколо вісі x, має нульове значення інтегралу $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0$ та швидко прямує до нуля на нескінченності. Остання властивість характеризується наявністю «реального» компактного носія $[-K, K]$, зовні якого $\psi(x)$ зневажливо мала. Ще однією важливою бажаною властивістю $\psi(x)$ є достатня кількість нульових моментів: $\int_{-\infty}^{\infty} x^k\psi(x)dx = 0$, $k = \overline{0, n-1}$.

В роботі [9] побудовані оптимальні за порядком точності квадратурні формули обчислення вейвлет-перетворення $W_f(s,t)$ функцій з класів C_L, $W_{2,L}$ та отримані оцінки знизу похибки інтегрування на цих класах. Розглядається також обчислення неперервного вейвлет-перетворення з більш вузьких (інтерполяційних) класів функцій $C_{L,N}$ та $W_{2,N,L}$. Для цих класів побудовані оптимальні за точністю квадратурні формули обчислення $W_f(s,t)$. При цьому на вузли квадратурних формул накладаються певні умови в залежності від вигляду вейвлет-функції $\psi(x)$. Обгрунтування отриманих результатів базується на використанні методу «капелюхів» та методу граничних функцій.

Зокрема, мають місце теореми 2, 3.

Теорема 2 [9]. Нехай $f(x) \in C_L$, $\psi(x)$ має компактний носій $[-K, K]$ та змінює на ньому знак M разів. Тоді для оптимальної оцінки обчислення інтегралу (12) при $s > 1/(2KN)$ та будь-якому t справедлива наступна оцінка знизу:

$$V_N(C_L, s, t) \ge LC_1 s^{1/2} h,$$

де $C_1 = \frac{C_2}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(\eta)| d\eta$, C_2 – деяка константа, що залежить від $\psi(x)$.

Теорема 3 [9]. Нехай $f(x) \in C_L$, $\psi(x)$ має компактний носій $[-K, K]$. Тоді при $s > 1/(2KN)$ та будь-яких t квадратурна формула

$$R_1(s, p) = s^{1/2} \sum_{m=-q+1}^{q-1} C_m f(m+p),$$

де

$$C_m = \int\limits_0^{h/2s} \psi\left(\eta + \frac{mh}{s}\right) d\eta \text{ при } m = -p,\ C_m = \int\limits_{-h/2s}^{h/s} \psi\left(\eta + \frac{mh}{s}\right) d\eta \text{ при } m = N - p - 1 \text{ та}$$

$$C_m = \int\limits_{-h/2s}^{h/2s} \psi\left(\eta + \frac{mh}{s}\right) d\eta \text{ при } m \ne -p \text{ та } m \ne N - p - 1,$$

$$q = \begin{cases} Ks/h, & \text{якщо } Ks/h \text{ ціле}, \\ [Ks/h] + 1, & \text{якщо } Ks/h \text{ неціле}, \end{cases}$$

є оптимальною за порядком точності, причому

$$V(C_L, s, t, R_1) \le LC_3 s^{1/2} h,$$

де

$$C_3 = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(\eta)| d\eta.$$

4º. Перетворення Бесселя

Розглянемо тепер як підінтегральну функцію – функцію Бесселя 1-го роду [10], яка при великих значеннях параметрів є швидкоосцилюючою.

Перетворення Бесселя широко використовується в практиці математичного моделювання та при розв'язанні задач цифрової обробки сигналів та зображень. Зокрема, можна навести цілу низку задач математичної фізики, астрономії, теорії пружності, теорії потенціалів, розповсюдження електромагнітнх хвиль, теплопровідності, прикладної статистики тощо.

Розглянемо обчислення інтеграла вигляду

$$I_m(\alpha, f) = \int\limits_0^1 f(x) J_m(\alpha x) dx, \tag{13}$$

де

$$J_m(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{m+2k}$$

– функція Бесселя першого роду порядку m, m – невід`ємне ціле число. Тут

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx$$

– гамма-функція (для цілих невід'ємних n гамма-функція $\Gamma(n)=(n-1)!$).

Припустимо, що $f(x)\in F$, F – множина функцій, визначених на відрізку $[0,1]$ та заданих не більш ніж N значеннями $f(x_\nu)=f_\nu$ у вузлових точках x_ν, $\nu=\overline{0,N-1}$, $x_\nu\in[0,1]$. Нехай L_N – множина всіх квадратурних формул $L_N(f)$, що використовують інформацію про значення функції $f(x)$ не більше, ніж в N точках. Через $R=R(f,l_N,\alpha,m)$ позначимо результат наближеного обчислення $I_m(\alpha,f)$ за допомогою квадратурної формули $L_N(f)$.

Квадратурну формулу, на якій досягається оптимальна оцінка V_N:

$$V_N=V(F,\alpha,m)=\inf_{l_N\in L_N}\sup_{f\in F}\rho(I_m(\alpha,f),R),$$

де $\rho(I_m(\alpha,f),R)$ – похибка чисельного інтегрування: $\rho(I_m(\alpha,f),R)=\left|I_m(\alpha,f)-R\right|$, будемо називати оптимальною за точністю квадратурною формулою. Якщо $V(F,\alpha,m,\bar{l}_N)\le V_N+\eta$, $\eta>0$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за точністю формулою обчислення $I_m(\alpha,f)$ з точністю до η. Якщо $\eta=o(V_N)$ або $\eta=O(V_N)$, то $\bar{l}_N$ називається відповідно асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності.

Для спрощення викладок припустимо, що $f(x)$ визначена на відрізку $[0,1]$ у вузлах рівномірної сітки $\left\{x_\nu=\nu h,\ \nu=\overline{0,N-1},\ h=1/N\right\}$ точно.

Мають місце теореми 4, 5 [11].

Теорема 4. Нехай $f(x)\in C_L$, m – невід`ємне ціле число. Тоді для оптимальної оцінки похибки V_N при великих значеннях α має місце оцінка знизу:

$$V_N(C_L,\alpha,m)\ge LC_4\frac{1}{\alpha N}, \tag{14}$$

де $C_4=\dfrac{C_5}{4}\int_0^\alpha\left|J_m(\eta)\right|d\eta$, C_5 – деяка константа, що залежить від α та m.

Для обчислення інтегралу (13) на класі C_L побудуємо квадратурну формулу, що базується на апроксимації функції $f(x)\in C_L$ кусково-постійною функцією $f_3^*(x)$, яка на відрізках $x\in\left[x_{\nu-1/2},x_{\nu+1/2}\right]$, $\nu=\overline{0,N-1}$, дорівнює $f_{3,\nu}^*(x)=f_\nu$. Тут

$$x_{\nu-1/2}=x_\nu-\Delta x_\nu/2,\ \nu=\overline{1,N-1},\ x_{-1/2}=x_0,$$
$$x_{\nu+1/2}=x_\nu+\Delta x_\nu/2,\ \nu=\overline{0,N-2},\ x_{N-1/2}=x_N.$$

Підставимо $f_3^*(x)$ у формулу (13) і отримаємо:

$$R_1(\alpha,m)=\int_0^1 f_3^*(x)J_m(\alpha x)dx=\sum_{\nu=0}^{N-1}f_\nu\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}J_m(\alpha x)dx. \tag{15}$$

Теорема 5. Нехай $f(x) \in C_L$, m – невід`ємне ціле число. Тоді при великих значеннях α квадратурна формула (6) є оптимальною за порядком точності, причому

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le LC_6 \frac{1}{\alpha N}, \text{ де } C_6 = \frac{1}{2}\int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta .$$

Зауваження 1. Оскільки $|J_m(y)| \le 1 \ \ \forall y$ і $|J_m(y)| \le C_7 y^{-1/3} \ \ \forall y \ge 1$ [12], $\forall m$, де C_7 – константа, незалежна від y і m, то для $\alpha > 1$

$$\int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le \int_0^1 |J_m(\eta)| d\eta + \int_1^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le 1 + C_7 \int_1^\alpha \eta^{-1/3} d\eta = 1 + \frac{3}{2} C_7 \left(\alpha^{2/3} - 1\right).$$

Отже, знайдеться така константа C_8, незалежна від α та m, що $\int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le C_8 \alpha^{2/3}$, і

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le L \frac{1}{2\alpha N} \int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le C_8 \frac{L}{2N\sqrt[3]{\alpha}} .$$

Зауваження 2. Враховуючи асимптотичне наближення [13] при $z \to \infty$

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-3/2}\right)$$

для будь-якого фіксованого m та великих значень α, отримаємо

$$\int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le \int_0^{\sqrt{\alpha}} |J_m(\eta)| d\eta + \int_{\sqrt{\alpha}}^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le$$

$$\le \sqrt{\alpha} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\sqrt{\alpha}}^\alpha \eta^{-1/2} d\eta + C_9 \left| \int_{\sqrt{\alpha}}^\alpha \eta^{-3/2} dx \right| .$$

Отже, знайдеться така константа C_{10}, незалежна від α та m, що $\int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le C_{10}\sqrt{\alpha}$, і

$$V(C_L, \alpha, m, R_1) \le L \frac{1}{2\alpha N} \int_0^\alpha |J_m(\eta)| d\eta \le LC_{10} \frac{1}{2N\sqrt{\alpha}} .$$

Таким чином, ми продемонстрували, як метод «капелюхів» та метод граничних функцій працюють для побудови оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій.

Для побудованих квадратурних формул отримані оцінки їх повних похибок [14], які дають гарантію якості обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій.

Ми розглянули результати для класів C_L, $C_{L,N}$. В наробку авторів є також відповідні результати для класів гладких функцій W_r $(r > 1), W_{r,N}, W_{2,N}, W_{2,N,\varepsilon}$ та інших. Всього для 45 класів підінтегральних функцій.

5º. Тестування якості алгоритмів-програм обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій

5.1. Елементи теорії. Можна виділити два аспекти у проблемі якості програмного забезпечення: створення алгоритмів розв'язку задач і програм їх реалізації з заданими або необхідними показниками якості, ефективне використання цих програм. Для цього треба вміння отримувати точні оцінки характеристик, які використовуються для опису якості роботи обчислювальних алгоритмів (о. а.) (програм) при розв'язанні задач певного класу. Зазвичай це похибка чисельного розв'язку (E), процесорний час (T), пам'ять комп'ютера (M) та ін.

Розглядають два види тестування:

– тестування програм з метою виявлення помилок їх проектування і кодування о. а. розв'язання задач;

– тестування о. а., реалізованих конкретними програмами, з метою дослідження їх функціональних можливостей при розв'язанні задач з даного класу.

Надалі буде розглядатись другий вид тестування. Сюди відноситься:

– визначення набору характеристик о. а.;
– складання тестових наборів;
– розв'язання тестових задач, обчислення значень характеристик та їх оцінок;
– обробка, інтерпретація і використання результатів тестування.

Нам важливо знати, чи здатна дана програма видавати розв'язок необхідної якості, якщо в о. а. така можливість закладена, тобто чи успадкувала програма всі кращі якості алгоритму.

Предметом тестування є о. а. Під тестуванням о. а. мається на увазі експериментальне дослідження тієї частини функціональних можливостей програми (зазвичай, відлагодженої), які визначаються о. а. Надалі будемо використовувати термін тестування програми, розуміючи при цьому тестування відповідного о. а.

Таблиці значень характеристик, отримані в результаті тестування о. а., можуть використовуватися при вирішенні різних питань з якості програмного забезпечення класів задач. До характерних ситуацій, де використовуються ці дані, відносяться:

– формування бібліотеки програм для розв'язання задач деякого класу;
– розробка алгоритмів із заданими властивостями;
– вибір придатної програми та її параметрів для розв'язання задачі або серії однотипних задач.

5.2. Тестування алгоритмів інтегрування швидкоосцилюючих функцій. Розглянемо задачу (3). Предметом тестування будуть оптимальні за точністю (або близькі до них) о. а. у випадку, коли $|\omega| \geq 2\pi/(b-a)$, інформація про $f(x) \in F$ задається в N вузлових точках на $[a,b]$, $F \equiv C_{L,\alpha}, C_L, C_{L,N}, C_{L,N,\varepsilon}, W_{2,L}, W_{2,L,N}$.

Мета тестування о. а. – перевірка та виявлення на наборі тестових задач як їх функціональних можливостей, так і областей диференційованої поведінки їх якості стосовно характеристик E (точності), T (процесорного часу), M (необхідної пам'яті комп'ютера).

Метод тестування полягає у проведенні обчислювального експерименту для досягнення вищезгаданої мети з використанням відповідних програм (як об'єктів тестування) на множині відповідних значень вхідних даних та керуючих параметрів програм, які досліджуються.

Створення тестових наборів. Враховуючи апріорну інформацію про клас функцій, властивості та структуру вхідних даних, можна виділити деякі підкласи, наприклад, класи сталих, лінійних функцій, кусково-лінійних функцій, множина точок зламу яких має міру «нуль», гладких функцій і т. п. Можна розглядати підкласи функцій, які відрізняються вибором точок x_ν, $\nu = \overline{0, N-1}$, (зокрема, рівномірна або нерівномірна сітка), обсягом вхідної інформації N, діапазоном змінювання константи Ліпшиця (L), параметра осциляції (ω).

Враховуючи, що вірогідність висновків про функціональні можливості та якість досліджуваних о. а. суттєво залежать від того, наскільки повно відображає тестовий набір властивості класу, набір тестових задач може містити характерних представників виділених підкласів. При цьому передбачається, що їх розв'язки – точні або наближені (з достатньо високою точністю) відомі.

Набір тестових задач з перевірки якості розв'язку задачі (3) може включати наступні задачі: задачі, які перевіряють працездатність програми; «важкі» задачі, що не розв'язуються іншими програмами; «погані» задачі класів; «типові» задачі класів; «великі» задачі з параметрами на межі області зміни параметрів і т. п.

Набір тестових задач може містити також тестові задачі для програм обчислення апріорних оцінок характеристик E, T, M з метою виявлення впливу змін вхідних даних та параметрів о. а. на точність розв'язку задачі (3). Він може містити такі задачі: задачі на з'ясування того, що оцінки не можуть бути покращені (сюди можуть увійти «погані» задачі класу); задачі на знаходження найкращих керуючих параметрів програми; задачі на визначення області допустимих значень параметрів і т. п.

Проведення обчислювального експерименту. Для тестування о. а. розв'язання задачі (3) для вищевказаних класів F розглядався наступний набір тестових задач: $f(x)=\text{const}$, $f(x)$ – «погані» функції класів F, $f^*(x)$ – чебишовські центри класів F, $f(x)=Ax+B$, $f(x)$ – кусково-лінійна функція (для $F \equiv C_L, C_{L,N}, C_{L,N,\varepsilon}$): $f(x)=1$ при $a \le x \le (b-a)/4; f(x)=-1$ при $(b-a)/4 \le x \le b$ (приклад «важкої» задачі при великих a і b); $f(x)=x^2$ (для $F \equiv W_{2,N,L}$), тестова задача

Винограда [15].

Даний набір тестових задач є відкритим для поповнення.

Для програм обчислення апріорних оцінок характеристик досліджуваних о. а. розглядалась задача визначення областей допустимих значень керуючих параметрів програм обчислення інтегралу (3) з потрібною точністю, а також найкращих їх значень для обчислення (3) з мінімально можливою похибкою.

Обчислювальний експеримент здійснювався таким чином.

На відрізку $[a,b]$ визначення функції $f(x)$ вибиралась рівномірна сітка з кроком h, у вузлах якої $x_i = a+(i-1)h$, $h=1/N$, $i=\overline{1,N}$, визначались значення $f(x_i)$; за отриманою інформацією обчислювались апріорні оцінки E – точності розв'язку тестових задач, а також абсолютна похибка обчислення E за формулою $E=|R(f)-R(\omega)|$, де $R(f)$ – точне значення інтегралу (3), $R(\omega)$ – обчислене за допомогою досліджуваного о. а.

Була досліджена поведінка значень інтегралу (3) та оцінок E в залежності від зміни кроку сітки h, константи Ліпшиця L, від посилення осциляції підінтегральної функції, а також від «занурення» $f(x)$ у різні класи F.

Відповідно до наведеної методики розглядались діапазони варіювання параметрів квадратурних формул (на підставі, наприклад, потреб задач цифрової обробки сигналів):

$$\varepsilon:[10^{-4},\ 5\times10^{-1}];\ N:[5,\ 5\times10^{4}];\ \omega:[2\pi, \pi\times10^{3}];$$
$$0 \le a < b \le 10^4;\ L:\left[10^{-2},10^{3}\right];\alpha:\left[10^{-1},1\right].$$

Відповідні фрагменти таблиці тестування наведені в [16].

За результатами тестування в класах $C_L, C_{L,N}$ можна зробити наступні висновки:

– із збільшенням L збільшується значення апріорних оцінок V, оскільки в цьому випадку $f(x)$ «занурюється» у більш широкий клас;

– при збільшенні числа вузлів вибірки точність спочатку зростає, але з досягненням деякого N_0 починає погіршуватися за рахунок накопичення похибки заокруглення;

– із збільшенням ω в деяких випадках точність погіршується;

– вклад похибки методу приблизно на порядок (іноді на декілька порядків) більша за похибку заокруглення;

– точність на практичних задачах менша в середньому на порядок у порівнянні з точністю на «поганій» задачі класу;

– була підтверджена теоретична оцінка похибки методу, якість квадратурної формули та програми, що її реалізує.

В роботі [16] наведені також фрагменти тестування відповідних о. а. та оцінок їх характеристик E, T, M для класів $C_{L,N,\varepsilon}, W_{2,L}, W_{2,L,N}$.

Висновки

1. В роботі наведені теоретичні передумови оптимального чисельного інтегрування.
2. Побудовані оптимальні за точністю та близькі до них квадратурні формули наближеного обчислення перетворення Фур'є, вейвлет-перетворень, перетворення Бесселя для деяких класів підінтегральних функцій різної степені гладкості.
3. Наведені результати застосування теорії тестування якості прикладного програмного забезпечення до визначення якості квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій (ІШОФ) та оцінки їх характеристик.
4. Отримання якісної апріорної інформації має важливе значення при розв'язанні прикладних задач:

• чим якісніша інформація про задачу, тим якісніший наближений розв'язок, на який можемо розраховувати;

• максимальне використання усієї наявної інформації про задачу дає змогу звузити клас задач, що розв'язується і тим самим підвищує потенційну спроможність чисельного методу; чим точніша вхідна інформація, тим точніші оцінки похибки і менша область невизначеності наближеного розв'язку задачі.

5. Важливим є питання дослідження інших джерел похибок (крім метода) – неусувні та заокруглення. Тільки врахування повної похибки дає змогу дати гарантію якості наближеного обчислення ІШОФ.
6. Теорія тестування застосована до визначення якості квадратурних формул обчислення ІШОФ та оцінок їх характеристик.
7. Отримані результати дають можливість обґрунтовано вибрати та ефективно використовувати обчислювальні ресурси для знаходження ε-значень ІШОФ.
8. Результати, викладені в роботі, можуть знайти застосування при розв'язанні задач прикладної математики, математичної фізики, астрономії, фізики, цифрової обробки сигналів та ін.

Список літератури

1. Сергієнко І.В., Литвин О.М. Нові інформаційні оператори в математичному моделюванні. К.: Наукова думка, 2018. 550 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 1. 632 с.
3. Задирака В.К., Иванов В.В. Вопросы оптимизации вычислений. К.: Общество «Знание» Украинской ССР, 1979. 36 с.

4. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. К.: Наук. думка, 1986. 584 с.
5. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1971. **11** (4). С. 1014–1018. http://mi.mathnet.ru/eng/zvmmf/v11/i4/p1014
6. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania. 1992. 357 p. https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611970104
7. Dremin I.M., Ivanov O.V., Nechitailo V.A. Wavelets and their uses. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk and Russian Academy of Sciences*. 2001. **44** (5). P. 447–478. http://dx.doi.org/10.1070/PU2001v044n05ABEH000918
8. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-Р, 2002. 448 с. https://www.studmed.ru/dyakonov-vp-veyvlety-ot-teorii-k-praktike_3fd5e176555.html
9. Zadiraka V.K., Melnikova S.S., Luts L.V. Optimal Quadrature Formulas for Computation of Continuous Wavelet Transforms of Functions in Certain Classes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. **42** (5). P. 30–44. http://dx.doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i5.40
10. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, 1995. 814 p.
11. Задірака В.К., Луц Л.В. Оптимальні за точністю квадратурні формули обчислення перетворення Бесселя для деяких класів підінтегральних функцій. *Кибернетика и системный анализ*. 2021. **57** (2). С. 81–95.
12. Stein E. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press. Princeton, NJ, 1993. 695 p. https://doi.org/10.1515/9781400883929-004
13. Зубов В.И. Функции Бесселя: Учебно-методическое пособие. М.: Московский физико-технический институт, 2007. 51 с. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/0a5/Posobie_Zubov.pdf
14. Луц Л.В. Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. *Штучний інтелект*. 2008. 4. С. 671–682. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/7665
15. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. К.: Наукова думка, 1983. 215 с.
16. Сергієнко І.В, Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. К.: Наукова думка, 2011. Т. 2. 348 с.

Одержано 10.12.2020

Задірака Валерій Костянтинович,
академік НАН України, завідувач відділу
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
https://orcid.org/0000-0001-9628-0454
zvk140@ukr.net

Луц Лілія Володимирівна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
https://orcid.org/0000-0003-0746-9701
lv1@ukr.net

Швідченко Інна Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ.
https://orcid.org/0000-0002-5434-2845
inetsheva@gmail.com

UDC 519.6:519

V. Zadiraka, L. Luts, I. Shvidchenko

Optimal Numerical Integration

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv
Correspondence: zvk140@ukr.net, lv1@ukr.net

Introduction. In many applied problems, such as statistical data processing, digital filtering, computed tomography, pattern recognition, and many others, there is a need for numerical integration, moreover, with a given (often quite high) accuracy. Classical quadrature formulas cannot always provide the required accuracy, since, as a rule, they do not take into account the oscillation of the integrand. In this regard, the development of methods for constructing optimal in accuracy (and close to them) quadrature formulas for the integration of rapidly oscillating functions is rather important and topical problem of computational mathematics.

The purpose of the article is to use the example of constructing optimal in accuracy (and close to them) quadrature formulas for calculating integrals for integrands of various degrees of smoothness and for oscillating factors of different types and constructing a priori estimates of their total error, as well as applying to them of the theory of testing the quality of algorithms-programs to create a theory of optimal numerical integration.

Results. The optimal in accuracy (and close to them) quadrature formulas for calculating the Fourier transform, wavelet transforms, and Bessel transform were constructed both in the classical formulation of the problem and for interpolation classes of functions corresponding to the case when the information operator about the integrand is given by a fixed table of its values. The paper considers a passive pure minimax strategy for solving the problem. Within the framework of this strategy, we used the method of “caps” by N.S. Bakhvalov and the method of boundary functions developed at the V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine. Great attention is paid to the quality of the error estimates and the methods to obtain them.

The article describes some aspects of the theory of algorithms-programs testing and presents the results of testing the constructed quadrature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions and estimates of their characteristics. The problem of determining the ranges of admissible values of control parameters of programs for calculating integrals with the required accuracy, as well as their best values for integration with the minimum possible error, is considered for programs calculating a priori estimates of characteristics.

Conclusions. The results obtained make it possible to create a theory of optimal integration, which makes it possible to reasonably choose and efficiently use computational resources to find the value of the integral with a given accuracy or with the minimum possible error.

Keywords: quadrature formula, optimal algorithm, interpolation class, rapidly oscillating function, quality testing.