

## ОПТИМІЗАЦІЯ КОМПОНУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У БАГАТОГРАННІЙ ОБЛАСТІ

**Вступ.** Задачі компоунвання нерівних сферичних об'єктів виникають у багатьох галузях людської діяльності. Зокрема, важливі застосування таких задач є в адитивному виробництві (3D-друку) під час оптимізації топології деталей [1] та для визначення пропорцій між різними фракціями порошку [2]. Огляд підходів до моделювання багатокомпонентних сумішей із сферичними елементами наведено в [3]. Відомі застосування задачі в медицині під час лікування онкологічних пухлин гамма-променями [4, 5] та діабетичної ретинопатії за допомогою лазерної коагуляції сітківки ока [6]. Застосування у космічній техніці досліджено у [7, 8]. Найвідоміші моделі та методи для задач компоунвання сферичних об'єктів у просторах різної вимірності наведено в [9].

На цей час розроблено різноманітні методи й алгоритми розв'язання задач розміщення сферичних об'єктів у областях різної просторової форми, наприклад [10–14]. Як область розміщення переважно вибирають кубоїд, циліндр, куля.

Задачу розміщення куль у контейнері, який має просторову форму багатогранника, сформульовану як задача про рюкзак, розглянуто в [15]. Проте загалом контейнер – це зв'язна множина. Незв'язність контейнера вимагає інших підходів до розв'язання поставленої задачі.

В цьому дослідженні розглядається задача, в якій область розміщення – незв'язна обмежена багатогранна множина. Пропонується підхід, який ґрунтується на декомпозиції задачі на підзадачі компоунвання сферичних об'єктів змінних радіусів із змінними параметрами розміщення в опуклих багатогранних компонентах зв'язності із урахуванням обмежень на допустиму мінімальну відстань між сферичними об'єктами з метою максимізації сумарного об'єму розміщуваних об'єктів.

**Математична модель.** Нехай  $\Omega$  – кубоїд із заданими метричними характеристиками,  $S_q = S_q(v_q) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|v - v_q\|^2 \leq r_q^2\}$  – сферичний об'єкт, де  $v_q = (x_q, y_q, z_q)$  – змінний вектор трансляції,  $r_q$  – змінний радіус сферичного об'єкта  $S_q$ ,

*Розглянуто задачу компоунвання сферичних об'єктів змінних радіусів із змінними параметрами розміщення у обмеженій багатогранній області із урахуванням обмежень на допустимі мінімальні відстані з метою максимізації сумарного об'єму розміщуваних об'єктів.*

**Ключові слова:** компоунвання, сферичний об'єкт, багатогранна область,  $\rho$ -функція.

$q \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $0 < r_q^- < r_q < r_q^+$ ,  $r_q^-$ ,  $r_q^+$  – верхнє та нижнє допустимі значення радіуса сферичного об'єкта  $S_q$  відповідно.

Задано незв'язну область із компонентами зв'язності:

$$C = \bigcup_{l \in I_p} P_l \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

де  $P_l = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_{ml}(x, y, z) \geq 0\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M_l$ ,  $l \in I_p = \{1, 2, \dots, n_p\}$ , – опуклі багатогранники,  $P_i \cap P_j$ ,  $i, j \in I_p$ ,  $i \neq j$ ;  $\varphi_{ml}(x, y, z) = a_{ml}x + b_{ml}y + c_{ml}z + d_{ml} = 0$  – нормальні рівняння граней багатогранника  $P_l$ ,  $l \in I_p$ .

Умови розміщення сферичних об'єктів  $S_q$ ,  $q \in I_N$ , в області  $C$  визначають у такий спосіб:

- умови включення –

$$S_q(v_q) \subset C \Leftrightarrow \text{int } S_q(v_q) \cap C^* = \emptyset, \quad q \in I_N, \quad (1)$$

де  $C^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } C$ ;

- умови розміщення сферичних об'єктів  $S_q(v_q)$  та  $S_g(v_g)$  на мінімально допустимій відстані  $\rho > 0$  –

$$\text{dist}(S_q(v_q), S_g(v_g)) \geq \rho, \quad (q, g) \in \Xi_l, \quad l \in I_p, \quad (2)$$

де

$$\text{dist}(S_q(v_q), S_g(v_g)) = \min_{a \in S_q(v_q), b \in S_g(v_g)} \rho(a, b),$$

$\rho(a, b)$  – евклідова відстань між точками  $a \in \mathbb{R}^3$  та  $b \in \mathbb{R}^3$ ;

$$\Xi_l = \{(q, g) : S_q(v_q) \subset P_l, S_g(v_g) \subset P_l, q > g\}.$$

Задачу компоновання сферичних об'єктів у незв'язних багатогранних областях можна сформулювати так.

Розмістити сферичні об'єкти  $S_q(v_q)$ ,  $q \in I_N$ , в області  $C$  так, щоб за включення  $\tau_l$  сферичних об'єктів до багатогранника  $P_l$ ,  $l \in I_p$ ,  $\sum_{l \in I_p} \tau_l = N$ , і обмеження на мінімально допустиму відстань  $\rho$  між сферичними об'єктами  $S_q(v_q)$  та  $S_g(v_g)$ ,  $(q, g) \in \Xi_l$ , коефіцієнт заповнення (packing factor) області  $C$  був максимальним.

Для аналітичного опису умов розміщення (1), (2) застосовується метод  $\rho$ -функцій [16, 17], який дозволяє побудувати математичну модель поставленої задачі як наступну задачу нелінійного програмування:

$$\max_{\omega \in W \subset \mathbb{R}^{4n}} \kappa(\omega), \quad (3)$$

де  $\omega = (v, r)$  – вектор змінних;  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  – вектор змінних параметрів розміщення сферичних об'єктів;  $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$  – вектор змінних радіусів сферичних об'єктів;

$$\kappa(\omega) = \frac{4}{3} \pi \sum_{q \in I_N} r_q^3 - \text{функція цілі}; \quad (4)$$

$$W = \{\omega \in \mathbb{R}^{4N} : \widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, r_q, r_g) \geq 0, (q, g) \in \Xi_l, l \in I_p, \Phi_q(v_q, r_q) \geq 0, q \in I_N, \quad (5)$$

$$r_q - r_q^- \geq 0, q \in I_N, -r_q + r_q^+ \geq 0, q \in I_N\};$$

$\widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, r_q, r_g) \geq 0$  – умова (2) на розміщення сферичних об'єктів  $S_q$  та  $S_g$ ,  $(q, g) \in \Xi_l$ , на мінімально допустимій відстані  $\rho$ ;

$$\widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, r_q, r_g) = \|v_q - v_g\|^2 - (r_q + r_g + \rho)^2$$

– псевдонормалізована  $\phi$ -функція сферичних об'єктів  $S_q$  та  $S_g$ ,  $(q, g) \in \Xi_l$ ;  $\Phi_q(v_q, r_q) \geq 0$  – умова (1) на розміщення сферичного об'єкта  $S_q$  у контейнері  $C$ ;  $\Phi_q(v_q, r_q)$  –  $\phi$ -функція сферичного об'єкта  $S_q$  та множини  $C^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } C$ ;

$$\Phi_q(v_q, r_q) = \max_{l \in I_p} \{ \min_{m=1,2,\dots,M_l} \{ \varphi_{ml}(v_q) - r_q \} \}, q \in I_N,$$

$\varphi_{ml}(x, y, z) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M_l$ , – нормальні рівняння площин, на яких лежать грані багатогранника  $P_l$ ,  $l \in I_p = \{1, 2, \dots, n_p\}$ .

Розглянемо особливості задачі (3) – (5):

- задача (3) – (5) – задача нелінійного програмування;
- область допустимих розв'язків  $W$  – незв'язна множина з багатозв'язними компонентами зв'язності;
- кількість змінних задачі (3) – (5) оцінюється як  $O(N)$ , а кількість нерівностей, які описують область  $W$ , – як  $O(N^2)$ .

**Метод пошуку локально-оптимальних розв'язків.** Беручи до уваги, що  $C = \bigcup_{l \in I_p} P_l$ , та  $P_i \cap P_j = \emptyset$ ,  $i, j \in I_p$ ,  $i > j$ , розв'язування задачі (3) – (5) можна звести до послідовного розв'язування незалежних задач, в яких областю розміщення є опуклий багатогранник  $P_l$ ,  $l \in I_p$ .

Математична модель кожної  $l$ -тої підзадачі має такий вигляд:

$$\max_{\omega_l \in W \subset \mathbb{R}^{4m_l}} \kappa_l(\omega_l), l \in I_p, \quad (6)$$

де  $\omega_l = (v^{(l)}, r^{(l)})$  – вектор змінних;  $v^{(l)} = (v_{\tau_{l-1}+1}, v_{\tau_{l-1}+2}, \dots, v_{\tau_l})$  – вектор змінних параметрів розміщення сферичних об'єктів,  $\tau_0 = 0$ , якщо  $l = 1$ ;  $r^{(l)} = (r_{\tau_{l-1}+1}, r_{\tau_{l-1}+2}, \dots, r_{\tau_l})$  – вектор змінних радіусів сферичних об'єктів,

$$\kappa_l(\omega_l) = \frac{4}{3} \pi \sum_{q \in I_l} r_q^3 \quad (7)$$

– функція цілі;

$$W_l = \{\omega_l \in \mathbb{R}^{4m_l} : \widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, r_q, r_g) \geq 0, (q, g) \in \Xi_l, \quad (8)$$

$$\Phi_{q_l}(v_q, r_q) \geq 0, q \in I_l, r_q - r_q^- \geq 0, i \in I_l, -r_q + r_q^+ \geq 0, q \in I_l\},$$

– область допустимих розв'язків;  $\Xi_l = \{(q, g) \mid q < g \in \{\tau_{l-1} + 1, \tau_{l-1} + 2, \dots, \tau_l\}\}$ ;  $\Phi_{ql}(v_q, r_q)$  –  $\phi$ -функція сферичного об'єкта  $S_q$  та множини  $P_l^*$ ;

$$\Phi_{ql}(v_q, r_q) = \min_{m=1, 2, \dots, M_l} \{\Phi_{ml}(v_q, r_q) - r_q\}, \quad q \in I_l.$$

Системи нерівностей, які описують області  $W_l$ ,  $l \in I_p$ , не містять спільних змінних, а функції  $\kappa_l(\omega_l)$  – незалежні, отже  $\kappa(\omega) = \sum_{l \in I_p} \kappa_l(\omega_l)$ . Таким чином, задачі (6) – (8) можна розв'язувати незалежно для різних значень  $l \in I_p$ , що дає змогу застосовувати паралельні обчислення [18].

Початкову точку  $\omega_l^0 = (v^{(l)0}, r^{(l)0})$  для задачі (6) – (8) будують у такий спосіб.

Координати точок  $v_{\tau_{l-1}+1}^0, v_{\tau_{l-1}+2}^0, \dots, v_{\tau_l}^0$  вибирають випадково так, щоб  $v_{\tau_{l-1}+1}^0, v_{\tau_{l-1}+2}^0, \dots, v_{\tau_l}^0 \in P_l$ .

Початкові значення радіусів дорівнюють нулю:  $r^{(l)0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

Для обчислення локального максимуму кожної задачі (6) – (8) використано метод внутрішньої точки. Для зменшення обчислювальної складності алгоритму застосовано метод декомпозиції та стратегію активного набору нерівностей. Використання метода мультистарта дає змогу вибрати кращу точку локального максимуму задачі.

**Числові експерименти.** Наведено числові результати, що демонструють роботу запропонованого методу розв'язання задачі компонування сферичних об'єктів у багатогранних областях. Усі експерименти проведено на комп'ютері з процесором AMD FX(tm)-6100, 3.30 GHz у системі Windows 7, програмні коди – на мові C++. Для локальної оптимізації використано пакет IPOPT (<https://github.com/coin-or/Ipopt>). Для прикладу застосовано 50 стартових точок.

*Приклад.* Розміри  $w \times l \times h$  кубоїда  $\Omega$ :  $w=15$ ,  $l=25$ ,  $h=17$ ;  $C = P_1 \cup P_2$ ,  $S_{1q} \subset P_1$ ,  $q \in I_1$ ,  $S_{2q} \subset P_2$ ,  $i \in I_2$ ; обмеження на радіуси сферичних об'єктів:  $r_q^- = 0.5$ ,  $r_q^+ = 2$ ; мінімально допустима відстань між сферичними об'єктами  $\rho = 0.25$ .

Координати полюса багатогранника  $P_1$ :  $x_1 = 7.5$ ,  $y_1 = 7.5$ ,  $z_1 = 8.5$ ; багатогранника  $P_2$ :  $x_2 = 7.5$ ,  $y_2 = 11.5$ ,  $z_2 = 8.5$ . Багатогранник  $P_1$  має 6 вершин, координати яких у власній системі координат:  $V_{11} = (-7.1, 1.4, 0.1)$ ,  $V_{12} = (-2, 0.7, 8.2)$ ,  $V_{13} = (0.45, 7.25, 0.2)$ ,  $V_{14} = (7.15, 0.15, 0.25)$ ,  $V_{15} = (0.7, -8.05, 0.9)$ ,  $V_{16} = (1, 1, -7)$ . Межа  $P_1$  складається з 8-ми граней, які проходять через вершини  $V_{11}, V_{12}, V_{13}$ ;  $V_{12}, V_{14}, V_{13}$ ;  $V_{11}, V_{15}, V_{12}$ ;  $V_{12}, V_{15}, V_{14}$ ;  $V_{11}, V_{16}, V_{13}$ ;  $V_{13}, V_{16}, V_{14}$ ;  $V_{11}, V_{16}, V_{15}$  та  $V_{16}, V_{15}, V_{14}$  відповідно. Багатогранник  $P_2$  має 15 вершин, координати яких у власній системі координат:  $V_{21} = (3, -2, -7)$ ,  $V_{22} = (0, -4, -7)$ ,  $V_{23} = (3, -4, 7)$ ,  $V_{24} = (3, 0, -7)$ ,  $V_{25} = (3, 4, 0)$ ,  $V_{26} = (0, 4, -7)$ ,  $V_{27} = (-2, 4, -7)$ ,  $V_{28} = (-3, 3, -7)$ ,  $V_{29} = (-3, 4, 0)$ ,  $V_{2,10} = (0, 4, 7)$ ,  $V_{2,11} = (-3, 3, 7)$ ,  $V_{2,12} = (3, 0, 7)$ ,  $V_{2,13} = (-3, 0, 7)$ ,  $V_{2,14} = (0, -4, 7)$  та  $V_{2,15} = (-3, -4, -7)$ . Межа  $P_2$  складається з 12-ти граней, які проходять через вершини  $V_{21}, V_{22}, V_{23}$ ;  $V_{24}, V_{25}, V_{26}$ ;  $V_{27}, V_{28}, V_{29}$ ;  $V_{29}, V_{2,10}, V_{2,11}$ ;  $V_{2,13}, V_{2,14}, V_{2,15}$ ;  $V_{25}, V_{2,10}, V_{2,12}$ ;  $V_{22}, V_{2,15}, V_{2,14}, V_{23}$ ;  $V_{21}, V_{24}, V_{25}, V_{2,12}, V_{23}$ ;  $V_{25}, V_{26}, V_{27}, V_{29}, V_{2,10}$ ;  $V_{28}, V_{29}, V_{2,11}, V_{2,13}, V_{2,15}$ ;  $V_{21}, V_{24}, V_{26}, V_{27}, V_{28}, V_{2,15}, V_{22}$  та  $V_{23}, V_{2,12}, V_{2,10}, V_{2,11}, V_{2,13}, V_{2,14}$  відповідно.

Отримане значення функції цілі –  $\kappa^*(\omega) = 530.07$ . Радіуси та координати центрів сферичних об'єктів  $S_{1q} \subset P_1, q \in I_1, n_1 = 22$  та  $S_{2q} \subset P_2, q \in I_2, n_2 = 24$  наведено в таблиці. Ілюстрацію відповідного розміщення сферичних об'єктів показано на рисунку.

ТАБЛИЦЯ. Радіуси та координати центрів сферичних об'єктів

Номер	Радіус	Координати			Радіус	Координати		
		$x_{1q}$	$y_{1q}$	$z_{1q}$		$x_{2q}$	$y_{2q}$	$z_{2q}$
1	2	0,3579	3,8766	0,0063	1,4679	-1,5321	2,5321	-1,5752
2	1,3791	0,8348	0,8436	-4,5131	0,9894	-2,0106	3,0106	1,0462
3	1,1466	1,2579	1,707	2,4598	0,9893	2,0107	0,9638	4,1711
4	1,7074	0,82	-1,4234	-2,0651	2	1	-2	5
5	1,9661	0,1818	-3,8332	0,9645	1,0426	0,899	-2,7918	-2,4294
6	1,1331	-2,1087	-1,6215	2,0036	1,9677	1,0323	2,0323	1,31
7	0,6075	-3,4557	-1,8706	0,5594	1,845	1,155	0,3349	-2,3791
8	1,5047	-1,2613	1,3379	-2,2366	0,8675	1,0685	3,1325	-3,35
9	0,907	3,154	-3,0137	0,4664	0,7747	1,7655	-1,996	-6,2253
10	0,7566	-2,6369	3,7538	0,2427	0,6172	-2,3828	3,1406	2,8604
11	0,5713	0,8031	-3,9324	-1,7509	1,2828	1,6651	0,2527	-5,7172
12	1,114	-1,8026	-1,579	-0,4742	1,3384	-1,6616	0,0175	0,1571
13	2	-1,3246	0,6424	4,3921	0,7013	-0,7624	-2,9842	2,847
14	1,0078	-0,618	-2,478	3,7784	0,8182	1,6242	0,7618	6,1818
15	1,3555	-0,1827	0,3528	0,5454	1,9213	1,0717	-2,0787	0,83
16	2	3,6822	0,092	0,2607	1,0422	-1,9578	-0,0123	-2,5566
17	1,0144	2,8862	0,5546	-2,8712	0,8411	-2,1589	1,2772	2,1872
18	2	-3,7344	0,9732	0,5649	1,2842	-1,46	-2,3132	-1,5099
19	1,2883	1,2985	-0,9708	2,6498	2	-1	1,8249	5
20	0,7352	3,2196	3,039	0,1497	0,9271	2,0729	-1,896	-4,1994
21	0,6573	0,708	-6,6509	0,7642	1,8768	-1,1232	2,1232	-5,1232
22	0,9471	-0,6435	3,4444	3,0116	0,8946	1,848	3,1054	-1,4952
23					2	-1	-2	-5
24					1,2744	-1,5837	-0,9156	2,8623

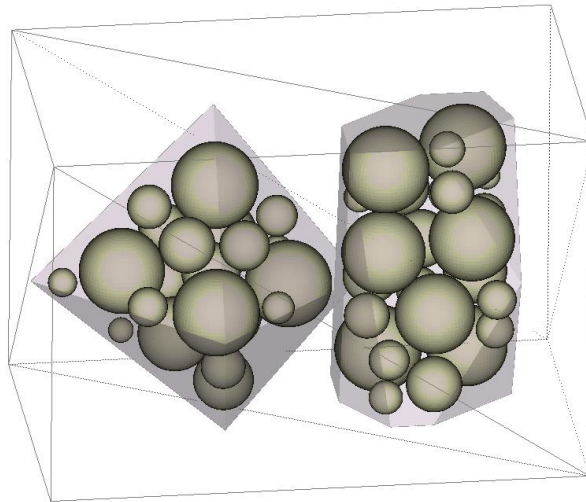


РИСУНОК. Розміщення сферичних об'єктів, що відповідає локальному максимуму в прикладі 1

**Результати.** Розглянуто принципово нову постановку задачі компоновання сферичних об'єктів у багатогранній області, в якій змінними є як параметри розміщення, так і радіуси розміщуваних сферичних об'єктів. Розроблено метод розв'язання задачі, який ґрунтується на методі декомпозиції.

Наведено результати числових експериментів та графічну ілюстрацію отриманих результатів.

**Висновок.** Новий підхід до моделювання задач компоновання сферичних об'єктів дає змогу розглядати багатогранні області та отримувати варіанти компоновання з великим коефіцієнтом заповнення, поліпшуючи використання наявного об'єму області.

**Подяка.** Дослідження проведено за підтримки Національного фонду досліджень України (грант № 02.2020/167).

#### Список літератури

1. Liu J., Ma Y. A survey of manufacturing oriented topology optimization methods, *Advances in Engineering Software*. 2016. **100**. P. 161–175. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.07.017>
2. Duriagina Z., Lemishka I., Litvinchev I., Marmolejo J.A., Pankratov A., Romanova T., Yaskov G. Optimized filling of a given cuboid with spherical powders for additive manufacturing. *Journal of the Operations Research Society of China*. 2020. <https://doi.org/10.1007/s40305-020-00314-9>
3. Burtseva L., Valdez Salas B., Romero R., Werner F. Recent advances on modelling of structures of multi-component mixtures using a sphere packing approach. *International Journal of Nanotechnology*. 2016. **13**. P. 44–59. <https://doi.org/10.1504/IJNT.2016.074522>
4. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal Placement of Irradiation Sources in the Planning of Radiotherapy : Mathematical Models and Methods of Solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Article ID 142987. <https://doi.org/10.1155/2015/142987>
5. Adler J.R., Schweikard A., Achkire Y., Blanck O., Bodduluri R.M, Ma L., Zhang H. Treatment Planning for Self-Shielded Radiosurgery. *Cureus*. 2017. **9** (9): e1663. <https://doi.org/10.7759/cureus.1663>
6. Пясова Н., Широкаев А., Кирш Д., Парингер Р., Куприянов А., Замыцкий Е. Development of coagulate map formation algorithms to carry out treatment by laser coagulation. *Procedia Engineering*. 2017. **201**. P. 271–279. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.623>

7. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pinter J.D., Stoian Y.E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications : Part I. *Modeling and Optimization in Space Engineering* : book / eds. G. Fasano and J. Pinter. Cham : Springer, 2019. **144**. P. 395–437. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15)
8. Stoyan Y., Grebennik I., Romanova T., Kovalenko A. Optimized packings in space engineering applications : Part II. *Modeling and Optimization in Space Engineering* : book / eds. G. Fasano and J. Pinter. Cham : Springer, 2019. **144**. P. 439–457. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15)
9. Stoyan Y., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I., Yakovlev S., Cantú J.M.V. Optimized packing multidimensional hyperspheres: a unified approach. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2020. **17** (6). P. 6601–6630. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020344>
10. Birgin E.G., Sobral F.N.C. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & Operations Research*. 2008. **35**. P. 2357–2375. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.11.002>
11. Martínez J.M., Martínez L. Packing optimization for automated generation of complex system's initial configurations for molecular dynamics and docking. *Journal of Computational Chemistry*. 2003. **24**. P. 819–825. <https://doi.org/10.1002/jcc.10216>
12. Hifi M., Yousef L. A local search-based method for sphere packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2019. **274**. P. 482–500. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.10.016>
13. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal Spheres into Various Containers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**. P. 419–426. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9842-1>
14. Zeng Z.Z., Huang W.Q., Xu R.C., Fu Z.H. An algorithm to packing unequal spheres in a larger sphere. *Advanced Materials Research*. 2012. **546–547**. P. 1464–1469. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.546-547.1464>
15. Stoyan Y., Yaskov G. Optimised packing unequal spheres into a multiconnected domain: mixed-integer non-linear programming approach. *International Journal of Computer Mathematics : Computer Systems Theory*. 2020. <https://doi.org/10.1080/23799927.2020.1861105>
16. Stoyan Y., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation : two- and three-dimensional problems and applications. *Modeling and Optimization in Space Engineering* : book / eds. G. Fasano and J. Pinter. New York : Springer, 2012. **73**. P. 363–388. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5\\_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5_15)
17. Scheithauer G., Stoyan Yu.G., Romanova T.Ye. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. **41**. P. 332–342. <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0067-y>
18. Romanova T.E., Stetsyuk P.I., Chugay A.M., Shekhovtsov S.B. Parallel Computing Technologies for Solving Optimization Problems of Geometric Design. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **V. 55**. P. 894–904. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00199-4>

Одержано 18.11.2020

**Романова Тетяна Євгенівна,**

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник  
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,  
<https://orcid.org/0000-0002-8618-4917>  
[tarom27@yahoo.com](mailto:tarom27@yahoo.com)

**Яськов Георгій Миколайович,**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник  
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,  
<https://orcid.org/0000-0002-1476-1818>

**Чугай Андрій Михайлович,**

доктор технічних наук, провідний науковий співробітник  
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків,  
<https://orcid.org/0000-0002-4079-5632>

**Стоян Юрій Євгенович,**

кандидат технічних наук, провідний інженер  
Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків.  
<https://orcid.org/0000-0002-9716-3193>

UDC 519.85

T. Romanova, G. Yaskov, A. Chugay, Y. Stoian

## Optimized Layout of Spherical Objects in a Polyhedral Domain

*A.M. Pidgorny Institute of Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine, Kharkiv*

*Correspondence: [tarom27@yahoo.com](mailto:tarom27@yahoo.com)*

**Introduction.** The article studies the problem of arranging spherical objects in a bounded polyhedral domain in order to maximize the packing factor. The spherical objects have variable placement parameters and variable radii within the given upper and lower bounds. The constraints on the allowable distance between each pair of spherical objects are taken into account.

The phi-function technique is used for analytical description of the placement constraints, involving object non-overlapping and containment conditions.

The problem is considered as a nonlinear programming problem. The feasible region is described by a system of inequalities with differentiable functions.

To find the local maximum of the problem the decomposition algorithm is used. We employ the strategy of active set of inequalities for reducing the computational complexity of the algorithm. IPOPT solver for solving nonlinear programming subproblems is used.

The multistart strategy allows selecting the best local maximum point.

Numerical results and the appropriate graphic illustration are given.

**The purpose** of the article is presenting a mathematical model and developing a solution algorithm for arranging spherical objects in a polyhedral region with the maximum packing factor. It allows obtaining a locally optimal solution in a reasonable time.

**Results.** A new formulation of the problem of arranging spherical objects in a polyhedral domain is considered, where both the placement parameters and the radii of the spherical objects are variable. A mathematical model in the form of nonlinear programming problem is derived. A solution approach based on the decomposition algorithm and multistart strategy is developed. The numerical results combined with the graphical illustration are given.

**Conclusions.** The proposed approach allows modeling optimized layouts of spherical objects into a polyhedral domain.

**Keywords:** layout, spherical objects, polyhedral domain, phi-function.