

Таким образом, решение краевых задач связанной термоупругости сведено к нахождению метагармонических $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ функций с учетом граничных условий на боковой поверхности пластины.

Полученные однородные решения могут быть использованы для построения приближенных теорий тонких пластинок [5] и позволяют исследовать волноводные свойства трансропных толстых плит.

1. Алтухов Е. В., Панченко Ю. В. Колебания трансропных пластин в случае смешанных граничных условий // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 52–62.
2. Алтухов Е. В., Панченко Ю. В. Колебания трансропных пластин с граничными условиями типа плоского торца или диафрагмы // Динамич. системы. – 1999. – Вып. 15. – С. 104–109.
3. Космодамианский А. С., Сторожнев В. И., Шалдырван В. А. Вынужденные колебания многосвязных трансропных толстых пластин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – С. 1088–1092.
4. Ворovich И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, № 2. – С. 230–241.
5. Швец Р. Н. Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 84–92.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 27.07.2006

УДК 539.3

© 2007

Я. О. Жук, О. П. Червінко, Л. Я. Васильєва

Уточнена модель структурних перетворень в тонкому сталевому циліндрі при тепловому опроміненні торця

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Phase transformations in a steel thin cylinder under thermal pulse irradiation of the cylinder end are studied. The statement of a dynamic problem of coupled thermomechanics along with a thermodynamically consistent theory of the inelastic behavior of a material is used. The model is refined to take account for temperature-induced phase transformations. The residual stress-strain and structural states of the steel cylinder are studied by the numerical simulation.

Розробка лазерних та імпульсних систем для мікро- і нанообробки вимагає детального дослідження зв'язаних термомеханічних процесів, які відбуваються при опроміненні і подальшому охолодженні матеріалу. Зокрема для матеріалів типу сталей такі історії зміни температури можуть супроводжуватись структурними перетвореннями, що роблять відповідний внесок у формування залишкового напружено-деформованого стану. В даній роботі розв'язується модельна задача про опромінення лазерним імпульсом або пучком заряджених часток торця тонкого кругового циліндра (стержня) з мартенситної сталі 35ХМ. Мета такої обробки полягає у підвищенні міцнісних і втомних характеристик приповерхневих шарів матеріалу, тому дослідження і коректне описання структурних перетворень в околі дії імпульсу є важливим при оцінці довговічності сталевих елементів конструкцій [1, 2].

Розглядається круговий циліндр радіусом R , довжина якого дорівнює L . На торці $z = 0$ діє короткочасний тепловий імпульс, який задається тепловим потоком через границю і моделює лазерне або пучкове опромінення. Бічна поверхня стержня і торці вважаються теплоізольованими і вільними від напружень. Досліджується модельна задача при $R \ll L$ (випадок довгого тонкого кругового циліндра, стержня).

Для описання поведінки матеріалу в умовах підвищених температур при великих швидкостях деформування використовується модель фізично нелінійного тіла, узагальнена на випадок зв'язаних термомеханічних процесів [3]. Коротке зведення формул моделі наводиться нижче

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad \varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta') d\theta', \quad (1)$$

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta), \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0, \quad (3)$$

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[- \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right], \quad (4)$$

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}_p, \quad K(0) = K_0, \quad (5)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2(D_1 u_{ij} - \beta_{ij})\dot{W}_p, \quad \beta_{ij}(0) = 0, \quad (6)$$

$$ij \leftrightarrow rr, zz, rz, \varphi\varphi.$$

Тут (1) — представлення повної деформації ε_{ij} через суму пружної ε_{ij}^e , непружної ε_{ij}^p і температурної ε_{ij}^θ складових і вираз для температурної частини деформації; (2) — закон Гука; (3) — закон течії і умова непружної нестисливості; (4) — кінетичне рівняння моделі Боднера–Партома [3]; (5) і (6) — еволюційні рівняння для параметрів ізотропного і направленого зміцнення.

У співвідношеннях (1)–(6) σ_{ij} , s_{ij} і e_{ij} — тензор напруження і девіатори напруження і деформації відповідно; θ і θ_0 — поточна і відлікова температури; α — коефіцієнт лінійного теплового розширення; G і K_V — модулі зсуву і об'ємного стискання відповідно; δ_{ij} — дельта Кронекера; крапкою зверху позначається похідна за часом і $Z = K + D$, $D_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2$, $J_2 = s_{ij} s_{ij} / 2$, $\lambda^2 = D_2^p / J_2$, $D = \beta_{ij} u_{ij}$, $u_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_{ij} \sigma_{ij})^{1/2}$, $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$.

Величини D_0 , D_1 , K_0 , K_1 , m_1 , m_2 і n є параметрами моделі [3]. Для більшості металів параметри D_0 , D_1 і m_2 слабо залежать від температури. Їх можна вважати сталими в широкому інтервалі температур. Параметри K_0 , K_1 , m_1 і n є температурозалежними.

Для описання структурних перетворень модель (1)–(6) модифікувалася таким чином.

Повна деформація записується у вигляді суми пружної, непружної і термоструктурної $\varepsilon_{ij}^{\theta s}$ складових аналогічно (1) [4]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{\theta s}. \quad (7)$$

Для напруження і непружної деформації після деяких перетворень отримаємо

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{\theta s}) + \lambda(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta s})\delta_{ij}, \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{D_0 \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2}\right]^n\right\}}{J_2^{1/2}}, \quad \varepsilon_{ij}^p(0) = 0, \quad (9)$$

$$\dot{K} = m_1(\bar{K}_1 - K)\dot{W}^p, \quad K(0) = 0, \quad (10)$$

де \bar{K}_0 і \bar{K}_1 визначаються формулами $\bar{K}_0 = C^\xi K_0^\xi$, $\bar{K}_1 = C^\xi K_1^\xi$ (є додавання за повторюваним індексом); λ , μ – параметри Ламе; C^ξ – об'ємні концентрації фаз, $\xi = \varphi, p, b, m$, відповідно, фериту, перліту, бейніту і мартенситу.

Деформація $\varepsilon_{ij}^{\theta s}$ визначається через питомі об'єми фаз V_ξ за формулами

$$\varepsilon_{ij}^{\theta s}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V_\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V_\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{3V_\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}. \quad (11)$$

Тут θ_r – відрахункова температура. В рівнянні (11) відбувається додавання за повторюваним індексом ξ .

Температурні залежності питомих об'ємів $V_\xi(\theta)$ в м³/кг, віднесені до $\theta_r = 20$ °С, вибираються у вигляді [6]

$$\begin{aligned} V_a(\theta, C_p) \cdot 10^3 &= 0,13282 + 8,56 \cdot 18^{-6}(\theta - 20) + 2,15 \cdot 10^{-3}C_p; \\ V_{\varphi,p,b}(\theta, I_p) \cdot 10^3 &= 0,02708 + 5,521 \cdot 10^{-6}(\theta - 20); \\ V_m(\theta, C_p) \cdot 10^3 &= 0,12708 + 4,444 \cdot 10^{-6}(\theta - 40) + 2,79 \cdot 80^{-3}C_p, \end{aligned} \quad (12)$$

де C_p – концентрація вуглецю у відсотках.

Для формулювання постановки зв'язаної задачі термомеханіки до вищенаведених рівнянь необхідно додати співвідношення Коші, рівняння руху (13), рівняння теплопровідності (14)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z, \quad (13)$$

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V(\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}) - D' - k\Delta\theta = r_s, \quad (14)$$

де u_r і u_z – компоненти переміщення; ρ – густина матеріалу; c_v і k – коефіцієнти об'ємної теплоємності і теплопровідності відповідно; D' – швидкість дисипації механічної енергії і r_s – внутрішні джерела тепла, $\Delta = \partial^2(\cdot)/\partial r^2 + \partial(\cdot)/r\partial z^2$.

Вираз для швидкості дисипації вибирається аналогічно [3].

Початкові і граничні умови мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned} u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{на} \quad S, \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi t}{t_p}, & 0 \leq t \leq t_p, \\ 0, & t > t_p, \end{cases} \quad z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0; \quad z = L, \quad r = R, \end{aligned} \quad (15)$$

де q_0 – параметр теплового потоку; t_p – час дії імпульсу.

Параметри моделі Боднера–Партома для сталі 35ХМ наведено в роботі [4]. Розрахунки проведено для таких геометричних розмірів циліндра: $R = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $L = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тривалість теплового імпульсу $t_p = 10^{-7}$ с, параметр теплового потоку $q_0 = 0,75 \cdot 10^8$ кВт/м².

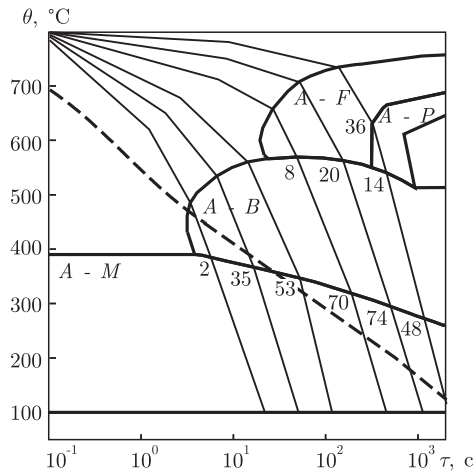


Рис. 1

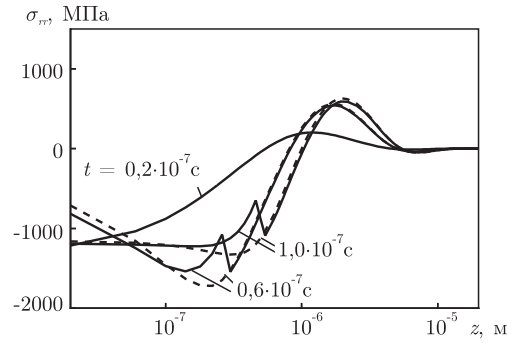


Рис. 2

Початкова температура циліндра θ_0 дорівнює 20°C . Початковою структурою сталі вважається бейніт.

Задача є суттєво нелінійною. Вона розв'язується чисельно з використанням схеми Кренка–Ніколсона для інтегрування за часом, ітераційного методу і методу скінченних елементів. Розрахунок концентрації фаз розпаду переохолодженого аустеніту виконується за допомогою термокінетичних діаграм [7] і співвідношень для питомих об'ємів фаз (12).

На рис. 1 зображено термокінетичну діаграму для сталі 35ХМ. По осі абсцис відкладається відносний час $\tau = t - t_a$, де t_a — час перетину кривою охолодження температури початку розпаду аустеніту $\theta = A_{C1} = 790^\circ\text{C}$. Суцільні жирні лінії обмежують області фазових перетворень (ОФП): А-*F* — аустеніт → ферит; А-*P* — аустеніт → перліт; А-*B* — аустеніт → бейніт; А-*M* — аустеніт → мартенсит. Тонкі лінії відповідають експериментальним траекторіям охолодження зразків (ТКД-траекторії). Штриховою лінією показана деяка довільна траекторія охолодження. Цифрами позначені відсотки фаз фериту p_{fe} , перліту p_{pe} і бейніту p_{be} , які відповідають ТКД-траекторіям на виході з ОФП.

Закон накопичення нової фази p_ξ вздовж відрізків ТКД-траекторій, що лежать в ОФП (крім А-*M*), апроксимується виразом [8]

$$p_\xi = \left[1 - \exp\left(-k_p \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e}\right) \right] p_{\xi e}, \quad (16)$$

де k_p вибирається рівним 3, θ_s і θ_e — температури початку і кінця перетворення, $p_{\xi e}$ — максимальне значення нової фази для даної траекторії. Оскільки реальні криві охолодження (див. рис. 1) при умові їх монотонності мало відрізняються від ТКД-траекторій, вважають [8], що фазові перетворення відбуваються лише тоді, коли точки кривої охолодження потрапляють у ОФП, показані на рис. 1. Методика розрахунку фаз ґрунтується на такому припущенні: відсоток нової фази визначається за формулою

$$p_\xi = p_{as} y_\xi, \quad (17)$$

де величина p_{as} — відсоток аустеніту при вході кривої охолодження у ОФП, а $y_\xi = p_\xi / p_{as}$ — величина поточного значення відносної фази. Значення y_ξ визначається за відповідними

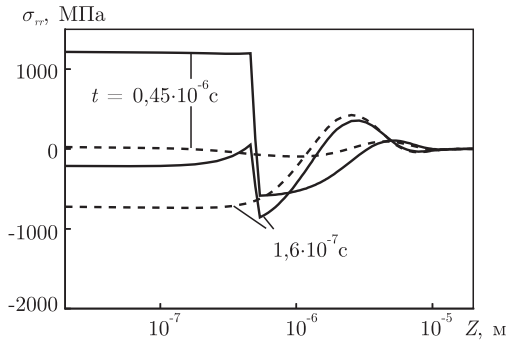


Рис. 3

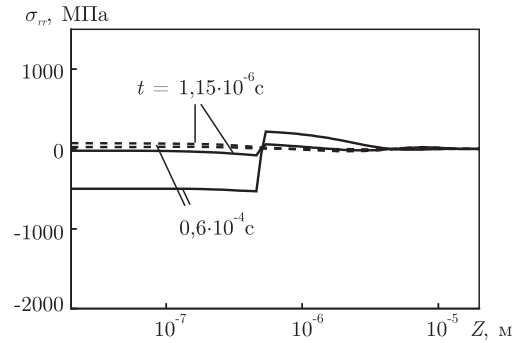


Рис. 4

ТКД-траєкторіями, а закон набору відносної фази аналогічний закону (16)

$$y_{\xi} = \left[1 - \exp\left(-k_p \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e}\right) \right] y_{\xi e}. \quad (18)$$

Тут $y_{\xi e}$ — відсоток нової фази на виході з ОФП, віднесений до відсотку аустеніту, що не розпався, на вході до неї.

Процес охолодження розбивається на кроки за часом $\Delta\tau_i$. При першому потраплянні точки кривої охолодження в ОФП фіксується величина p_{as} аустенітної фази. Далі набір фази відбувається вздовж інтерпольованих ТКД-траєкторій на кожному кроці за часом. На горизонтальних відрізках траєкторій фаза не набирається.

Зростання мартенситної фази при попаданні в ОФП А-М також визначається законом (16), але температура закінчення перетворення однакова для всіх траєкторій охолодження $\theta_e = 100$ °С, а кінцеве значення мартенситної фази p_{me} дорівнює фазі аустеніту, яка залишилась після проходження решти ОФП

$$p_{me} = 100 - p_{\varphi} - p_p - p_b.$$

Температура початку перетворення θ_s визначається точкою входу кривої охолодження в мартенситну область. Для малих часів перетворення $\tau \leq 6$ с: $\theta_s = 390$ °С, а якщо $\tau > 6$ с, то θ_{sm} мартенситної області збігається з θ_{be} бейнітної.

На рис. 2–4 суцільними лініями показано розподіли напруження σ_{rr} вздовж осі Oz для декількох моментів часу. Штрихові лінії відповідають розрахунку без урахування фазових перетворень в матеріалі. Температура в торцевій частині циліндра змінюється в межах 20 °С — 1500 °С. В початковій стадії розігріву ($t = 0,2 \cdot 10^{-7}$ с, рис. 2), коли температура в торцевій частині циліндра не перевищує $A_{C1} = 790$ °С температури переходу до аустенітного стану, штрихова і суцільна лінії збігаються. Злами кривих (див. рис. 2) відповідають фронту $\theta = A_{C1}$, який рухається зліва направо, і його координата z відповідає границі переходу бейніту в аустеніт. Злами на кривих, які відповідають $t = 0,6 \cdot 10^{-7}$ с і $t = 1 \cdot 10^{-7}$ с, зумовлені тим, що аустеніт, який виникає в приторцевій зоні, має менший питомий об'єм, ніж початкова фаза — бейніт при тій же температурі. Після закінчення дії імпульсу на початковій стадії охолодження (див. рис. 3) злам на кривих зберігається до досягнення температурою області мартенситного перетворення (≈ 300 °С).

Після проходження цієї області внаслідок дуже швидкого охолодження весь аустеніт переходить в мартенсит, який має більший об'єм. Це призводить до виникнення стискаючих

напружень і “перевертанню” злама на кривій (див. рис. 4). Як результат такий залишковий напружено-деформований стан підвищує міцність і втомну витривалість елемента конструкції. На осьове напруження σ_{zz} структурні перетворення практично не впливають.

1. Qin Y., Zou J., Dong C. et al. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. and Meth. In Phys. Research. Part B. – 2004. – **225**. – P. 544–554.
2. Коваленко В. С. Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – № 4. – С. 4–14.
3. Сенченков И. К., Жук Я. А. Термомеханический анализ одной модели термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 2. – С. 41–48.
4. Сенченков И. К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Там же. – 2005. – **41**, № 9. – С. 118–126.
5. Leblond J. B., Mottet G., Devaux J. C. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – **34**, No 4. – P. 395–409.
6. Юрьев С. Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – Москва: Металлургиздат, 1950. – 48 с.
7. Попов А. А., Попова Л. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – Москва: ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
8. Махненко В. И., Великоиваненко Е. А., Кравцов Т. Г., Севрюков В. В. Численное исследование термомеханических процессов при наплавке валов судовых механизмов и устройств // Автомат. сварка. – 2001. – № 1. – С. 3–10.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Миколаївський державний університет

Надійшло до редакції 05.09.2006

УДК 532.528

© 2007

Академик НАН Украины В. Д. Кубенко

Нестационарное вдавливание затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя

The nonstationary indentation for a blunted rigid body affecting the elastic layer is studied. The general problem formulation includes different boundary conditions on the free surface and contact region. A simplified nonmixed problem that is valid during early times and can serve as a rateable one for a later period is solved exactly.

Нестационарная контактная задача теории упругости достаточно интенсивно развивается в последние два — три десятилетия благодаря практической актуальности, присущим особенностям физического процесса и интересным особенностям поиска решений соответствующих краевых задач. Современное состояние вопроса освещено в работах [1, 2, 5]. В общем случае современная задача удара тела об упругую среду или элемент конструкции формулируется как нестационарная смешанная начально-краевая задача теории упругости с неизвестной изменяющейся во времени границей. Последняя определяется в ходе решения задачи. Постановка задачи включает уравнения упругого деформирования ударяемого