

К ДИНАМИКЕ СТРУННОГО ГЕНЕРАТОРА: ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ*

Д. Г. Корневский, А. М. Пилькевич

Ин-т математики НАН Украины

Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

e-mail: koren@imath.kiev.ua

We study the way a delay in the feedback influences oscillating properties (the amplitude and the frequency) of a string generator that, as it is well-known, works in a self-induced oscillation mode and is a part of an acceleration string meter, which is a device for measuring the acceleration of ballistic missiles and carriers for space apparatus and other moving objects. The mathematical dependent model for the dynamics of the string generator is taken in the form of a quasilinear second order hyperbolic equation with a constant delay in one of the variables, the time variable. In order to analyze the mathematical model, we use the one-frequency asymptotic method for Krylov–Bogolyubov–Mitropol'sky nonlinear mechanics, its first and second order approximations. In the paper we show the following. An increase of the delay in the nonlinear feedback amplifier results in a decrease of the frequency of the self-induced oscillations, which makes the string generator a low-frequency device.

Досліджено вплив запізнення у зворотному зв'язку на коливальні характеристики (амплітуду і частоту) струнного генератора, який, як відомо, працює в автоколивальному режимі і входить до складу струнного акселерометра — приладу, призначеного для вимірювання прискорень балістичних ракет і ракет-носіїв космічних апаратів та інших об'єктів, що рухаються. Математичну модель динаміки струнного генератора подано у вигляді квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку із сталим запізненням по одній із незалежних змінних (часу). Для аналізу математичної моделі використано одночастотний асимптотичний метод нелінійної механіки Крилова–Боголюбова–Митропольського (його 1- та 2-е наближення). Показано, що збільшення запізнення в підсилювачі нелінійного зворотного зв'язку знижує частоту автоколивань і через це перетворює струнний генератор в низькочастотний прилад.

1. Применение струнных генераторов. Струнные акселерометры. Струнный генератор (частотный датчик) — прибор, использующий струнный метод измерения силы и основанный на измерении собственной частоты струны при изменении силы натяжения. Струнный метод измерения применяется для определения гравитационных полей (см., например, [1]), для определения поля перегрузок и линейных ускорений (см., например, [2–19]). В последнем случае струнные генераторы комбинируются парами (для получения линейной зависимости), и такая пара называется струнным акселерометром.

С учетом современного состояния и дальнейшего роста возможностей средств цифровой вычислительной техники струнные акселерометры являются перспективными датчиками первичной информации о движении. Реализуя прямое преобразование ускорений движущегося объекта в частоту, эти акселерометры оптимально вписываются в микропроцессорные системы измерения и обработки информации, что позволяет обес-

* Виконано за часткової фінансової підтримки НДР „Сучасні математичні моделі динаміки та стійкості фізичних процесів у складних механічних, гідродинамічних та біомеханічних структурах”. Замовник — Президія НАН України.

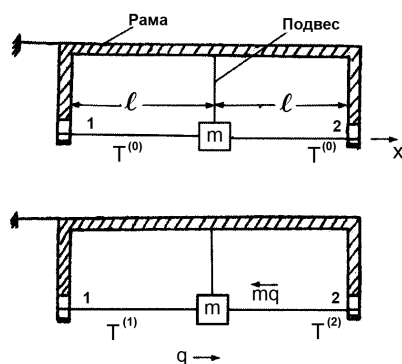


Рис. 1

печить достаточно рациональное соотношение точности, эксплуатационных характеристик и себестоимости.

Частотные датчики в области сил и давлений являются в настоящее время — в сравнении с другими типами датчиков — наиболее точными приборами. В связи с этим они, в основном, применялись и сейчас применяются для специальных измерений в инерциальной навигации и инерциальном наведении баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов. Это накладывало свой отпечаток на характер публикаций (в основном закрытых до начала 90-х годов XX века). Хотя количество публикаций по струнным акселерометрам к настоящему времени велико, все эти публикации до середины 90-х годов имели рекламный или патентный характер и технические данные об устройстве и достигнутой точности в них не приводились. В последние пятнадцать лет появились некоторые аналитические обзоры (см., например, [6, 12]) и статьи (см., например, [16, 19]). Такие акселерометры способны работать в промежутке ускорений от $1g$ до $20g$ (g — ускорение земного тяготения) и в последнее время до $100g$. Требования к точности измерения инерционной силы, развиваемой инерционной массой, в этих областях их применения очень велики. При измерении на уровне $1g$ чувствительность приборов находится на уровне $0,001g$. Допустимая нечувствительность составляет 10^{-4} от диапазона измерения.

Чувствительный элемент струнного акселерометра состоит из массы m и двух струн одинаковой длины l , имеющих одно и то же натяжение $T^{(0)}$ при нулевом ускорении (рис. 1), каждая из которых своим свободным концом закреплена в корпусе акселерометра.

Эти струны расположены на одной прямой, которая является осью чувствительности акселерометра (ось x). Для предохранения струн от поперечного прогиба инерционная масса m установлена в упругом подвесе, имеющем малую жесткость в направлении оси чувствительности.

В этих условиях частота ω каждой струны выражается формулой

$$\omega = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T^{(0)}}{\rho S}}, \tag{1.1}$$

где ρ — удельный вес, S — площадь сечения струны.

При наличии ускорения q к инерционной массе m прибора приложена сила инерции mq , приводящая к удлинению одной из струн и укорочению на ту же величину другой. При этом натяжение струн будет не $T^{(0)}$, а соответственно $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ (последние связаны с mq с помощью уравнения сил $T^{(2)} = T^{(1)} + 2mq$). Частоты $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ поперечных колебаний струн определяются соответственно выражениями

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T^{(1)}}{\rho S}}, \quad \omega^{(2)} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T^{(2)}}{\rho S}}. \quad (1.2)$$

Тогда можно записать

$$(\omega^{(2)})^2 - (\omega^{(1)})^2 = \frac{1}{4l^2 \rho S} (T^{(2)} - T^{(1)}) = \frac{mq}{2l^2 \rho S}. \quad (1.3)$$

Из соотношения (1.3) следует, что, измеряя частоты $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ собственных колебаний струн, можно определить ускорение q .

Для практической реализации идеи струнного акселерометра удобно поддерживать сумму частот $\omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ постоянной. В этом случае разность частот $\omega^{(2)} - \omega^{(1)}$ будет пропорциональна величине q (линейная зависимость):

$$\omega^{(2)} - \omega^{(1)} = \frac{mq}{2l^2 \rho S [\omega^{(1)} + \omega^{(2)}]}. \quad (1.4)$$

По своему принципу струнные акселерометры, как и вообще все струнные датчики, могут обеспечить высокую собственную частоту измерительной системы и, следовательно, высокую вибро- и ударопрочность. Выходной сигнал в виде частоты является потенциально более точным, так как эталонные значения частот или интервалов времени доступны нам с наибольшей точностью. Кроме того, это позволяет легко сопрягать его с цифровыми вычислительными устройствами. В частности, простой цифровой сумматор, на вход которого подаются импульсы с частотами $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, дает возможность получить интеграл по времени от разности частот $\omega^{(2)} - \omega^{(1)}$, который пропорционален интегралу по времени от измеряемого ускорения, $\int q dt$.

Колебания струны из немагнитного материала возбуждаются проходящим по ней током в поле постоянного магнита (магнитоэлектрическое возбуждение (рис. 2)). Струны 1 и 2 включены в схемы автогенераторов 3 и 4, выходное напряжение которых подается на смеситель 5. Разность $\omega^{(2)} - \omega^{(1)}$ является выходным сигналом прибора. Для стабилизации суммарной частоты $\omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ предназначена обратная связь, включающая схему сложения частот 6, детектор 7 и усилитель 8. Последний управляет исполнительным элементом 9. Суммарная частота $\omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ сравнивается с эталонной частотой $\omega_{\text{эт}}$. Разность этих частот $\omega^{(1)} + \omega^{(2)} - \omega_{\text{эт}}$ с учетом знака преобразуется в постоянный ток и регулирует с помощью исполнительного элемента натяжения струн до совпадения частот $\omega_{\text{эт}} = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ [2, 4].

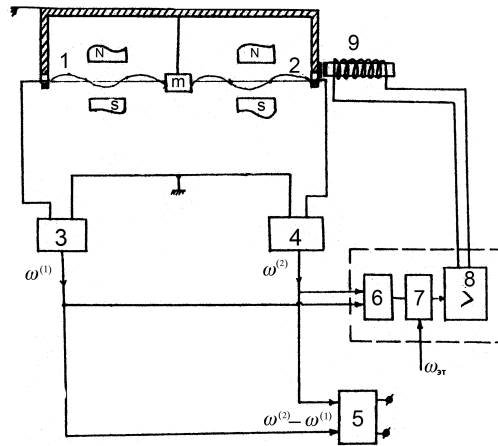


Рис. 2

2. Уравнения движения струнного генератора. Случай одной пары магнитов. Уравнения, описывающие процессы в струнном генераторе без учета запаздывания в усилителе, могут быть сведены к виду [11]

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{h}{\rho} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \varepsilon \frac{F}{\rho}, \quad (2.1)$$

$$U(t, 0) = U(t, l) = 0, \quad t_0 \leq t < \infty, \quad U(t_0, x) = u(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.2)$$

$$F = B(x) J(t), \quad (2.3)$$

$$B(x) = \begin{cases} B_0 & \text{при } \frac{l}{2} - b \leq x \leq \frac{l}{2} + b, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x < \frac{l}{2} - b, \quad \frac{l}{2} + b < x \leq l, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$J(t) = 2h_1 E(t) - \frac{2}{3} h_2 E^3(t), \quad h_1, h_2 > 0, \quad (2.5)$$

$$E(t) = \int_0^l B(x) \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} dx. \quad (2.6)$$

Здесь уравнение (2.1) описывает плоские поперечные колебания гибкой струны длиной l и плотностью ρ в кусочно-постоянном магнитном поле под действием пондеромоторной силы εF , возникающей в струне при прохождении тока $J(t)$. Удельный коэффициент демпфирования материала струны обозначен через $2\varepsilon h$, ε — малый параметр.

Магнитная индукция $B(x)$ в зазоре между подошвами магнита шириной $2b$ определяется формулой (2.4). Характеристика нелинейного усилителя в соответствии с формулой (2.5) предполагается мягкой. Электродвижущая сила, наводимая в струне при ее колебаниях, подсчитывается по формуле (2.6). Через c_1 обозначена скорость распространения возмущений в струне; она связана с силой натяжения струны $T^{(0)}$ соотношением $T^{(0)} = c_1^2 \rho$.

Если учесть постоянное запаздывание τ , вносимое усилителем, то характеристика (2.5) принимает вид

$$J(t) = 2h_1 E(t - \tau) - \frac{2}{3} h_2 E^3(t - \tau). \quad (2.7)$$

Поскольку мы задались целью изучить влияние запаздывания усилителя на работу струнного генератора, в дальнейшем в системе уравнений (2.1)–(2.6) вместо уравнения (2.5) будем рассматривать уравнение (2.7).

Величина τ в случае применения магнитных усилителей может достигать 10 миллисекунд [20]. Хотя τ , как видно, очень малое, однако оно в большинстве случаев сравнимо с периодом собственных колебаний струны.

Наличие малого параметра ε при нелинейности F позволяет для анализа математической модели (2.1)–(2.4), (2.6), (2.7) применить один из методов малого параметра, в частности одночастотный асимптотический метод нелинейной механики Крылова–Боголюбова–Митропольского, развитый применительно к гиперболическим уравнениям в частных производных и с запаздыванием в работе Ю. А. Митропольского и Д. Г. Коренецкого [21].

3. Редукция исходной нелинейной задачи к асимптотическим представлениям Крылова–Боголюбова–Митропольского. При $\varepsilon = 0$ система уравнений (2.1)–(2.4), (2.6), (2.7) является линейной и при граничных условиях (2.2) допускает решение $U(t, x)$, которое может быть найдено методом разделения переменных, т. е. в виде

$$U(t, x) = X(x)T(t),$$

где функции $X(x)$ и $T(t)$ подлежат определению. При этом задача сводится к решению обычной краевой задачи (задачи Штурма–Лиувилля) по пространственной переменной x , по которой нет отклонения аргумента, и к решению начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием по независимой переменной t .

Разделяя переменные, приходим к представлению решения $U(t, x)$ в виде

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (3.1)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, и $\sin \lambda_n x$ — соответственно собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля, которые определяют формы динамического равновесия (первую, вторую и т. д.), а функции $T_n(t)$ являются решением следующих дифференциальных уравнений (уравнений осцилляторов)

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 c_1^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

с соответствующими начальными условиями.

Тогда частное решение из семейства (3.1), соответствующее первой форме ($n = 1$) динамического равновесия, с учетом (3.2) определяется выражением

$$U(t, x) = a \cos(\omega t + \varphi) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \omega = \frac{\pi}{l} c_1, \quad (3.3)$$

и, как видно, является двухпараметрическим, колебательным по времени t ; здесь через a и φ обозначены постоянные параметры — амплитуда и фаза колебаний соответственно ($da/dt = 0, d\varphi/dt = 0$).

Для определения колебательного решения нелинейной задачи ($\varepsilon \neq 0$), возникающего из колебательного решения (3.3) линейной задачи ($\varepsilon = 0$), применим одночастотный асимптотический метод нелинейной механики Крылова – Боголюбова – Митропольского [21]. При решении нелинейной задачи ограничимся лишь 2-м приближением метода. Это означает, что колебательное решение вида (3.3) для нелинейной системы ищется в виде

$$U(t, x) = a \cos \psi \sin \frac{\pi x}{l} + \varepsilon W_1(a, \psi, x), \quad \psi = \omega t + \varphi, \quad (3.4)$$

где амплитуда a и фазовый угол φ не являются постоянными, а зависят от времени и определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon P_1(a) + \varepsilon^2 P_2(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon Q_1(a) + \varepsilon^2 Q_2(a). \quad (3.5)$$

Неизвестные функции $P_1(a), P_2(a), Q_1(a), Q_2(a), W_1(a, \psi, x)$ подлежат определению в процессе построения решения (3.4).

В соответствии с [21] процедура определения входящей в (3.4) неизвестной функции $W_1(a, \psi, x)$ и входящих в (3.5) неизвестных функций $P_1(a), P_2(a), Q_1(a), Q_2(a)$ состоит в том, что, подставляя (3.4) в краевую задачу (2.1)–(2.4), (2.6), (2.7), получаем краевую задачу для определения W_1 . Решая затем краевую задачу для W_1 методом разделения переменных с последующим разложением W_1 в ряд Фурье, из условия отсутствия в ряде Фурье „резонансных” коэффициентов получаем искомые алгебраические уравнения для определения неизвестных функций $P_1(a), P_2(a), Q_1(a), Q_2(a)$.

Чтобы не было в дальнейшем неясностей, заметим, что в теории асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского понимается: под 1-м приближением метода — отсутствие члена $\varepsilon W_1(a, \psi, x)$ в формуле (3.4) и отсутствие членов $\varepsilon^2 P_2(a)$ и $\varepsilon^2 Q_2(a)$ в формуле (3.5); под 1-м *улучшенным* приближением — отсутствие членов $\varepsilon^2 P_2(a)$ и $\varepsilon^2 Q_2(a)$ в формуле (3.5).

В конечном итоге нас интересует зависимость амплитуды a и фазы φ от времени. Эту зависимость можно определить, проинтегрировав уравнения (3.5), но для этого необходимо найти неизвестную пока функцию W_1 .

Нелинейная краевая задача (2.1)–(2.4), (2.6), (2.7) после подстановки выражения (3.4)

редуцируется к линейной краевой задаче для искомой функции $W_1(a, \psi, x)$:

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 W_1(a, \psi, x)}{\partial \psi^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 W_1(a, \psi, x)}{\partial x^2} + \left[2\omega (P_1 \sin \psi + a Q_1 \cos \psi) + \right. \\ \left. + 2 \frac{h}{\rho} a \omega \sin n\psi \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{\rho} B(x) \left[-\frac{4l}{\pi} B_0 h_1 a \omega \sin \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) + \right. \\ \left. + \frac{4l^3}{3\pi^3} h_2 B_0^3 a^3 \omega^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin^3(\psi - \omega\tau) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$W_1(a, \psi, 0) = W_1(a, \psi, l) = 0.$$

4. Алгоритм решения (второе приближение). Ищем решение $W_1(a, \psi, x)$ краевой задачи (3.6) в виде ряда по собственным функциям линейной краевой задачи ($\varepsilon = 0$):

$$W_1(a, \psi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1n}(a, \psi) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4.1)$$

где

$$W_{1n}(a, \psi) = \int_0^l W_1(a, \psi, x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

В свою очередь, коэффициенты W_{1n} представим в виде ряда Фурье по ψ :

$$W_{1n}(a, \psi) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left[W_{1n}^{(\sigma)s}(a) \sin \sigma\psi + W_{1n}^{(\sigma)c}(a) \cos \sigma\psi \right],$$

где

$$W_{1n}^{(\sigma)s}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_{1n}(a, \psi) \sin \sigma\psi d\psi, \quad W_{1n}^{(\sigma)c}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_{1n}(a, \psi) \cos \sigma\psi d\psi.$$

Обозначим известную составляющую правой части уравнения (3.6) через $\Phi_1(a, \psi, x)$. Тогда, учитывая, что на промежутке $(0, l)$ функция $B(x)$ представима в виде ряда по собственным функциям линейной краевой задачи,

$$\begin{aligned} B(x) = \frac{4}{\pi} B_0 \left(\sin \frac{\pi b}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi b}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi b}{l} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) = \\ = \frac{4}{\pi} B_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi b}{l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}, \end{aligned}$$

для $\Phi_1(a, \psi, x)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \Phi_1(a, \psi, x) = & 2 \frac{h}{\rho} a \omega \sin \psi \sin \frac{\pi x}{l} + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{4 B_0}{\pi} \left[- \frac{4 l}{\pi} B_0 h_1 a \omega \sin \frac{\pi b}{l} \left(\sin \psi \cos \omega \tau - \cos \psi \sin \omega \tau \right) + \right. \\ & + \frac{4}{3} h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} a^3 \omega^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \left(3 \sin \psi \cos \omega \tau - 3 \cos \psi \sin \omega \tau - \sin 3 \psi \cos 3 \omega \tau + \right. \\ & \left. \left. + \cos 3 \psi \sin 3 \omega \tau \right) \right] \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1) \pi b}{l} \sin \frac{(2n-1) \pi x}{l} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разлагая $\Phi_1(a, \psi, x)$ в ряд Фурье по собственным функциям линейной задачи ($\varepsilon = 0$),

$$\Phi_1(a, \psi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1n}(a, \psi) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

где

$$\Phi_{1n}(a, \psi) = \frac{1}{l} \int_0^l \Phi_1(a, \psi, x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx,$$

а коэффициенты $\Phi_{1n}(a, \psi)$ в ряд Фурье по переменной ψ ,

$$\Phi_{1n}(a, \psi) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left[\Phi_{1n}^{(\sigma)s}(a) \sin \sigma \psi + \Phi_{1n}^{(\sigma)c}(a) \cos \sigma \psi \right],$$

где

$$\Phi_{1n}^{(\sigma)s}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}(a, \psi) \sin \sigma \psi d\psi,$$

$$\Phi_{1n}^{(\sigma)c}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}(a, \psi) \cos \sigma \psi d\psi,$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(a, \psi) = & 2 \frac{h}{\rho} a \omega \sin \psi + \frac{1}{\rho} \frac{4 B_0}{\pi} \left[- \frac{4 l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} \left(\sin \psi \cos \omega \tau - \cos \psi \sin \omega \tau \right) + \right. \\ & + \frac{4}{3} a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \left(3 \sin \psi \cos \omega \tau - 3 \cos \psi \sin \omega \tau - \right. \\ & \left. \left. - \sin 3 \psi \cos 3 \omega \tau + \cos 3 \psi \sin 3 \omega \tau \right) \right] \sin \frac{\pi b}{l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}(a, \psi) = & \frac{1}{\rho} \frac{4B_0}{\pi} \left[-\frac{4l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} \left(\sin \psi \cos \omega \tau - \cos \psi \sin \omega \tau \right) + \right. \\ & + \frac{4}{3} a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \left(3 \sin \psi \cos \omega \tau - 3 \cos \psi \sin \omega \tau - \right. \\ & \left. \left. - \sin 3\psi \cos 3\omega \tau + \cos 3\psi \sin 3\omega \tau \right) \right] \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi b}{l}, \quad n = 3, 5, \dots, \end{aligned}$$

$$\Phi_{1n}(a, \psi) \equiv 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{(1)s}(a) = & 2 \frac{h}{\rho} a \omega + \frac{1}{\rho} \frac{4B_0}{\pi} \left[-\frac{4l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} + \right. \\ & \left. + 4a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \right] \sin \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}^{(1)s}(a) = & \frac{1}{\rho} \left[-\frac{4l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} + \right. \\ & \left. + 4a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \right] \frac{4B_0}{n \pi} \sin \frac{n \pi b}{l} \cos \omega \tau, \quad n = 3, 5, 7, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}^{(1)c}(a) = & \frac{1}{\rho} \left[\frac{4l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} - \right. \\ & \left. - 4a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \right] \frac{4B_0}{n \pi} \sin \frac{n \pi b}{l} \sin \omega \tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\Phi_{1n}^{(3)s}(a) = -\frac{16}{3} \frac{B_0^4}{n \pi^4} \frac{1}{\rho} a^3 \omega^3 h_2 l^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin \frac{n \pi b}{l} \cos 3\omega \tau,$$

$$\Phi_{1n}^{(3)c}(a) = \frac{16}{3} \frac{B_0^4}{n \pi^4} \frac{1}{\rho} a^3 \omega^3 h_2 l^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin \frac{n \pi b}{l} \sin 3\omega \tau,$$

$$\Phi_{1n}^{(\sigma)s}(a) = \Phi_{1n}^{(\sigma)c}(a) = 0, \quad \sigma = 4, 5, 6, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Для неизвестных $W_{1n}^{(\sigma)s}(a)$, $W_{1n}^{(\sigma)c}(a)$, $P_1(a)$ и $Q_1(a)$ получаем формулы

$$W_{1n}^{(\sigma)s}(a) = \frac{\Phi_{1n}^{(\sigma)s}(a)}{\omega^2 \sigma^2 + c_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}, \quad W_{1n}^{(\sigma)c}(a) = \frac{\Phi_{1n}^{(\sigma)c}(a)}{\omega^2 \sigma^2 + c_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}, \quad (4.3)$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots & \text{при } n \neq 1, \\ 2, 3, 4, \dots & \text{при } n = 1, \end{cases}$$

$$P_1(a) = -\frac{1}{2\omega}\Phi_{11}^{(1)s}(a); \quad Q_1(a) = -\frac{1}{2\omega a}\Phi_{11}^{(1)c}(a). \quad (4.4)$$

После этого имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2(a, \psi, x) = & - \left(P_1 \frac{dP_1}{da} \cos \psi - 2P_1Q_1 \sin \psi - aP_1 \frac{dQ_1}{da} \sin \psi - aQ_1^2 \cos \psi \right) \sin \frac{\pi x}{l} - \\ & - 2\omega \left(P_1 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \psi} + Q_1 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) W_1(a, \psi, x) - \frac{2h}{\rho} \left[(P_1 \cos \psi - aQ_1 \sin \psi) \sin \frac{\pi x}{l} + \right. \\ & \left. + \omega \frac{\partial W_1(a, \psi, x)}{\partial \psi} \right] + \frac{B(x)}{\rho} \left[2h_1 - 8h_2 B_0^2 a^2 \omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin^2(\psi - \omega\tau) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{2B_0 l}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \cos(\psi - \omega\tau) + (\omega\tau P_1 - aQ_1) \sin(\psi - \omega\tau)] + \right. \\ & \left. + B_0 \omega \int_{l/2-b}^{l/2+b} \frac{\partial W_1(a, \psi - \omega\tau, x)}{\partial \psi} dx \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(a, \psi) = & -P_1 \frac{dP_1}{da} \cos \psi + 2P_1Q_1 \sin \psi - aP_1 \frac{dQ_1}{da} \sin \psi + aQ_1^2 \cos \psi - \\ & - 2\omega \left(P_1 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \psi} + Q_1 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) W_{11}(a, \psi) - \frac{2h}{\rho} [P_1 \cos \psi - aQ_1 \sin \psi + \\ & + \omega W_{11}(a, \psi)] + \frac{1}{\rho} \left[2h_1 - 8h_2 B_0^2 a^2 \omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\pi b}{l} \right) \sin^2(\psi - \omega\tau) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{2B_0 l}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \cos(\psi - \omega\tau) + (\omega\tau P_1 - aQ_1) \sin(\psi - \omega\tau)] + \right. \\ & \left. + B_0 \omega \int_{l/2-b}^{l/2+b} \frac{\partial W_1(a, \psi - \omega\tau, x)}{\partial \psi} dx \right\} \frac{4B_0}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}^{(1)s}(a) = & 2P_1Q_1 + aP_1 \frac{dQ_1}{da} + \frac{2h}{\rho} aQ_1 + \\ & + \frac{4B_0}{\pi\rho} \sin \frac{\pi b}{l} \left(2h_1 \left\{ 2B_0 \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \sin \omega\tau + (\omega\tau P_1 - aQ_1) \cos \omega\tau] + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2B_0 \omega \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} \left(W_{1k}^{(1)s} \cos \omega\tau + W_{1k}^{(1)c} \sin \omega\tau \right) \right\} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8h_2 B_0^2 a^2 \omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \left\{ \frac{l}{2B_0 \pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \sin \omega\tau + 3(\omega\tau P_1 - aQ_1) \cos \omega\tau] + \right. \\
& + \frac{B_0 \omega l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} \left[W_{1k}^{(1)s} \left(\cos \omega\tau + \frac{1}{2} \cos 3\omega\tau \right) + \frac{1}{2} W_{1k}^{(1)c} \sin \omega\tau - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} W_{1k}^{(3)s} \cos 5\omega\tau - \frac{1}{2} W_{1k}^{(3)c} \sin \omega\tau \right] \right\} \Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}^{(1)c}(a) = & aQ_1^2 - P_1 \frac{dP_1}{da} - \frac{2h}{\rho} P_1 + \\
& + \frac{4B_0}{\pi\rho} \sin \frac{\pi b}{l} \left(2h_1 \left\{ 2B_0 \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \cos \omega\tau - (\omega\tau P_1 - aQ_1) \sin \omega\tau] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2B_0 \omega l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} \left(W_{1k}^{(1)c} \cos \omega\tau - W_{1k}^{(1)s} \sin \omega\tau \right) \right\} - \right. \\
& - 8h_2 B_0^2 a^2 \omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \left\{ \frac{B_0 l}{2\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(a\omega\tau Q_1 + P_1) \cos \omega\tau - 3(\omega\tau P_1 - aQ_1) \sin \omega\tau] + \right. \\
& + \frac{B_0 \omega l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} \left[W_{1k}^{(1)s} \left(-\sin \omega\tau + \frac{1}{2} \sin 3\omega\tau \right) + \right. \\
& \left. \left. + W_{1k}^{(1)c} \left(\cos \omega\tau - \frac{1}{2} \cos 3\omega\tau \right) + \frac{1}{2} W_{1k}^{(3)s} \sin 5\omega\tau - \frac{1}{2} W_{1k}^{(3)c} \cos 5\omega\tau \right] \right\} \Bigg),
\end{aligned}$$

и тогда

$$P_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \Phi_{21}^{(1)s}(a), \quad Q_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \Phi_{21}^{(1)c}(a). \quad (4.5)$$

5. Стационарные режимы (первое приближение). Решая уравнение $P_1(a) = 0$, заключаем, что в струнном генераторе возможны стационарные режимы (решения), соответствующие или положению равновесия $a = a_1 = 0$ или автоколебаниям с амплитудой $a = a_2$,

$$a_2 = \sqrt{\frac{\frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau - h}{\frac{8l^3}{\pi^4} \omega^2 h_2 B_0^4 \sin^4 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau}}. \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что при малом τ автоколебания возникают лишь при

$$\frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau > h. \quad (5.2)$$

Частота автоколебаний ω_{CT} в первом приближении определяется согласно формуле

$$\begin{aligned} \omega_{\text{CT}} &= \omega + \varepsilon Q_1(a_2) = \\ &= \left(\omega - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{8B_0^2 l h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{8B_0^4 l^3 \omega^2 h_2}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau \cdot a_2^2 = \omega - \frac{\varepsilon h}{\rho} \operatorname{tg} \omega \tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

6. Устойчивость стационарных режимов. Исследуем устойчивость стационарных режимов, используя уравнения в вариациях. Полагая последовательно $a = a_1 + \delta a$ и $a = a_2 + \delta a$, где δa — вариация амплитуды, из уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon P_1(a) \quad (6.1)$$

с учетом (4.4) получаем следующие дифференциальные уравнения для вариаций δa :

$$\frac{d\delta a}{dt} = \frac{\varepsilon}{\rho} \left[-h + \left(\frac{2l}{\pi} B_0 h_1 - 6 a_i^2 \omega^2 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \right) \frac{4B_0}{l} \cos \omega \tau \sin^2 \frac{\pi b}{l} \right] \delta a, \quad i = 1, 2, \quad (6.2)$$

соответствующие стационарным решениям (амплитудам) a_1 и a_2 .

Из (6.2) следует, что положение равновесия $a_1 = 0$ асимптотически устойчиво, если

$$\frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau - h < 0. \quad (6.3)$$

Предельный цикл (5.1) устойчив, если

$$\frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau + \left(h - \frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau \right) \frac{3\pi}{l} - h < 0. \quad (6.4)$$

Условие (6.4) преобразуется в более простое условие

$$\frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau - h > 0, \quad (6.5)$$

которое совпадает с (5.2) — условием существования предельного цикла.

7. Условие настройки на первую моду. Из неравенства (6.5) получаем условие настройки струнного генератора с одной парой магнитов на *первую моду* :

$$\sin \frac{\pi b}{l} > \frac{\pi}{2B_0} \sqrt{\frac{h}{2lh_1 \cos \omega \tau}}. \quad (7.1)$$

Разумеется, это патологический вариант работы струнного генератора. Он никогда на практике не реализуется.

Поскольку полученные при асимптотическом подходе математические соотношения приближенные, ряд эффектов — таких как взаимодействие между модами и настройка на высшие моды, бифуркационные значения параметров, при которых осуществляется смена динамики системы — в первом приближении асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского не выявлен. Это можно обнаружить лишь при рассмотрении высших приближений асимптотического метода.

8. Закон зависимости амплитуды и фазового угла от времени. Интегрируя уравнение (6.1), получаем закон зависимости амплитуды от времени (амплитуду нестационарных колебаний). Умножая обе его части на a , имеем

$$\frac{da^2}{dt} = -2\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2 a^2)a^2. \quad (8.1)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\rho} \left(h - \frac{8lB_0^2 h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau \right),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\rho} \frac{8\omega^2 B_0^4 l^3 h_2}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau.$$

Далее

$$\frac{da^2}{(\gamma_1 + \gamma_2 a^2)a^2} = 2\varepsilon dt,$$

или

$$-\frac{\gamma_2/\gamma_1 \cdot da^2}{\gamma_1 + \gamma_2 a^2} + \frac{1/\gamma_1 \cdot da^2}{a^2} = -2\varepsilon dt,$$

откуда

$$\ln \left(\frac{a^2}{\gamma_1 + \gamma_2 a^2} \right)^{1/\gamma_1} = \ln \left(\frac{a_0^2}{\gamma_1 + \gamma_2 a_0^2} \right)^{1/\gamma_1} - 2\varepsilon t, \quad (8.2)$$

где a_0 — начальное значение амплитуды в начальный момент времени $t = 0$.

Из (8.2) окончательно находим

$$a = \frac{a_0 \exp(-\gamma_1 \varepsilon t)}{\sqrt{1 + \gamma_2/\gamma_1 \cdot a_0^2 (1 - \exp(-2\gamma_1 \varepsilon t))}}. \quad (8.3)$$

Как видно из формулы (8.3), если начальное значение амплитуды a_0 равно нулю, то амплитуда остается равной нулю для любого t , и мы получаем $U(t, x) = 0$, т. е. тривиальное решение. Это тривиальное решение, очевидно, соответствует статическому стационарному режиму, т. е. отсутствию колебаний. При $\gamma_1 > 0$ (что имеет место, если выполнено условие (6.3)) статический режим устойчив. Колебания в струнном генераторе подддерживаться не могут. Независимо от своего начального значения амплитуда монотонно убывает, стремясь к нулю, и колебания со временем затухают.

Однако, исходя из этой же формулы, нетрудно заключить, что при $\gamma_1 < 0$ (условие существования предельных циклов (6.5)) этот статический режим неустойчив. Действительно, каким бы малым не было начальное значение амплитуды, при $\gamma_1 < 0$ оно все равно будет монотонно возрастать с течением времени t , приближаясь к предельному значению, равному $\sqrt{-\gamma_1/\gamma_2}$, т. е. значению радиуса предельного цикла (5.1).

Из (8.3) также следует, что если

$$a_0 = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_2}} \equiv \sqrt{\frac{\frac{8l}{\pi^2} B_0^2 h_1 \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau - h}{\frac{8l^3}{\pi^4} \omega^2 h_2 B_0^4 \sin^4 \frac{\pi b}{l} \cos \omega \tau}},$$

то $a = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_2}}$ для любых $t \geq 0$.

В отличие от статического стационарного режима ($a = 0$) динамический стационарный режим ($a = \sqrt{-\gamma_1/\gamma_2}$) имеет при $\gamma_1 < 0$ сильную устойчивость, заключающуюся в том, что каково бы ни было начальное значение $a_0 \neq 0$, малое или большое, все равно $a(t) \rightarrow \sqrt{-\gamma_1/\gamma_2}$ при $t \rightarrow \infty$. Иначе говоря, любое колебание при увеличении t приближается к стационарному колебанию.

Эти же выводы мы получили выше, рассматривая стационарные режимы и составляя для них соответствующие уравнения в вариациях.

Интегрируя уравнение первого приближения для ψ ,

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon Q_1(a) \equiv \omega - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{8B_0^2 l h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{8B_0^4 l^3 \omega^2 h_2}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau \cdot a^2, \quad (8.4)$$

с учетом (8.3) получаем закон вращения фазового угла

$$\begin{aligned} \psi = & \left(\omega - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{8B_0^2 l h_1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau \right) t + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau \omega \cdot \ln \left[1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot a_0^2 (1 - \exp(-2\gamma_1 \varepsilon t)) \right] + \psi_0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $\psi_0 = \text{const}$ — фазовая постоянная, равная начальному значению фазы.

9. Дальнейший анализ первого приближения. Оценка эффекта запаздывания. Сравнение со случаем $\tau = 0$. Сопоставим теперь полученные нами результаты с результатом И. Н. Синицина [11], исследовавшего работу струнного генератора в случае, когда запаздывание в усилителе не учитывалось, т. е. $\tau = 0$.

Поскольку расчетным режимом при проектировании струнных генераторов является автоколебательный режим, здесь мы обсуждаем влияние τ лишь на параметры предельного цикла (a_2 и $\omega_{\text{ст}}$) и не затрагиваем влияние τ на статический стационарный режим.

Если в формулах (5.1) и (5.3) положить $\tau = 0$, то получим

$$a_2 = \sqrt{\frac{\frac{8l}{\pi^2} B_0^2 h_1 \sin^2 \frac{\pi b}{l} - h}{\frac{8l^3}{\pi^4} \omega^2 h_2 B_0^4 \sin^4 \frac{\pi b}{l}}}, \quad (9.1)$$

$$\omega_{\text{ст}} = \omega. \quad (9.2)$$

Последние две формулы совпадают с найденными в работе [11] (формула (2.1)), если при этом учесть, что в [11] длина струны считалась равной не l , а $2l$.

Из формулы (9.2) видно, что при $\tau = 0$ в первом приближении частота $\omega_{\text{ст}}$ сохраняет свое первоначальное значение ω , а фазовый угол вращается с постоянной скоростью ($\psi = \omega t + \varphi_0$). Таким образом, если при $\tau = 0$ стационарные колебания в первом приближении совершаются с собственной частотой невозмущенной системы ω , то в случае наличия запаздывания $\tau > 0$ стационарные колебания совершаются с частотой $\omega_{\text{ст}}$, отличной от ω и равной

$$\omega_{\text{ст}} = \omega - \frac{\varepsilon h}{\rho} \operatorname{tg} \omega \tau. \quad (9.3)$$

Из (9.3) видно, что увеличение запаздывания от 0 до $\frac{\pi}{4\omega}$ [сек] понижает частоту автоколебаний от ω до $(\omega - \frac{\varepsilon h}{\rho})$. Если при этом коэффициент демпфирования h выбран близким к величине $\frac{\omega \rho}{\varepsilon}$, то струнный генератор превращается в низкочастотный прибор, что в свою очередь совершенно исключает практическое использование его по назначению. При этом величина $\frac{\omega \rho}{\varepsilon}$ является критическим верхним пределом для коэффициента демпфирования h . Последнее означает, что при

$$h = h_{\text{кр}} \equiv \frac{\omega \rho}{\varepsilon} \quad (9.4)$$

струнный генератор полностью теряет колебательные свойства.

При таких конструктивных параметрах даже при выполнении условия (5.2) автоколебания невозможны.

С другой стороны, пусть h фиксировано в промежутке $[0, h_{\text{кр}}]$. Рассматривая соотношение

$$\omega_{\text{ст}} = \omega - \frac{\varepsilon h}{\rho} \operatorname{tg} \omega \tau = 0 \quad (9.5)$$

как уравнение относительно τ , заключаем, что существует критическое значение запаздывания $\tau_{\text{кр}}$ такое, что при $\tau \rightarrow \tau_{\text{кр}} - 0$ струнный генератор также становится низкочастотным прибором, т. е. эффект от запаздывания аналогичен эффекту демпфирования. Критическое значение запаздывания $\tau_{\text{кр}}$ определяется с помощью формулы

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega \rho}{\varepsilon h}. \quad (9.6)$$

Допустим теперь, что запаздывание мало по сравнению с величиной $\frac{\pi}{4\omega}$ (что всегда бывает на практике), $\tau \ll \frac{\pi}{4\omega}$. В этом случае в формуле (9.3) $\operatorname{tg} \omega \tau$ можно заменить одним

или двумя первыми членами тейлоровского разложения^{*}. При сохранении, например, лишь первого члена тейлоровского разложения получим

$$\omega_{ст} = \omega \left(1 - \frac{\varepsilon h}{\rho} \tau \right). \quad (9.7)$$

Поскольку формула (9.7) содержит произведение величин h и τ , ослабить влияние запаздывания на частоту автоколебаний можно путем уменьшения коэффициента демпфирования h .

Итак, резюмируя вышеизложенное, отметим еще раз, что запаздывание усилителя является нежелательным явлением с точки зрения влияния его на частоту автоколебаний в данной динамической схеме генератора.

Перейдем теперь к анализу влияния эффекта запаздывания на амплитуду автоколебаний. Из формулы (5.1) видно, что с увеличением τ амплитуда несколько уменьшается по сравнению с амплитудой при $\tau = 0$, определяемой формулой (9.1). Увеличение демпфирования h также приводит к уменьшению амплитуды. Следовательно, эффект от запаздывания аналогичен эффекту от демпфирования (с точки зрения влияния на амплитуду автоколебаний).

Для $\tau < \frac{\pi}{4\omega}$ амплитуда практически близка к амплитуде (9.1).

Так как погрешность струнного генератора определяется нестабильностью собственной частоты автоколебаний струны и погрешностями, вызванными изменением режима автоколебаний (амплитуды a), отсюда заключаем, что запаздывание в усилителе существенно влияет на погрешность струнного генератора.

10. Сравнение с экспериментом. В экспериментальных работах Ю. М. Цодикова [17, 18] обнаружено понижение собственной частоты струны по сравнению с расчетной величиной. Была выдвинута гипотеза, что это понижение обусловлено неупругой деформацией в месте крепления струны.

Мы же выше установили, что это понижение может быть вызвано и запаздыванием обратной связи. Таким образом, постулат о запаздывании не противоречит экспериментальным данным, а наоборот, является одной из форм интерпретации и объяснения этих данных.

11. Анализ второго приближения. Взаимодействие между модами. Анализируя выражения для W_{1n} , замечаем, что все четные моды ($n = 2, 4, 6, \dots$) не влияют на первую моду. Влияние оказывают лишь нечетные моды ($n = 3, 5, \dots$), однако выбором отношения b/l с достаточной для практики точностью можно ослабить влияние соседних мод. Например, в рассматриваемом случае одной пары магнитов достаточно принять $b/l = 1/3$.

Взаимное влияние гармоник. Из выражений для $W_{11}^{(\sigma)s}$, $W_{11}^{(\sigma)c}$, $\sigma = 2, 3, \dots$, видно, что все гармоники, начиная с четвертой, не искажают колебательный процесс для первой моды (для первой формы динамического равновесия). Влияние оказывает лишь третья гармоника ($\sigma = 3$). Однако, если отношение b/l выбрано равным $1/3$, то и ее влияние полностью нейтрализуется.

^{*} Заметим при этом, что разность $\operatorname{tg} \tau\omega - \left(\tau\omega + \frac{\tau^3 \omega^3}{3} \right)$ по модулю не превысит величину 0,005792, если $\tau\omega$ принимает значения между 0 и $\frac{\pi}{6}$.

Стационарные амплитуды второго приближения. Упростим выражение для $P_2(a)$. В конструкцию $P_2(a)$ входят в качестве сомножителей бесконечные суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} W_{1k}^{(1)s},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} W_{1k}^{(1)c},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} W_{1k}^{(3)s},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi b}{l} W_{1k}^{(3)c}.$$

Если учесть выражения (4.3) и то, что $W_{11}^{(1)s}$ и $W_{11}^{(1)c}$ равны нулю (в силу метода Крылова – Боголюбова), то исследование последних рядов сводится к исследованию ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cdot \sin^2 \frac{(2k+1)\pi b}{l} / \left(\omega^2 + c_1^2 \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{l^2} \right). \quad (11.1)$$

Нетрудно видеть, что ряд (11.1) является абсолютно сходящимся, поскольку он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

В силу очень быстрой сходимости ряда (11.1) (второй член почти на порядок меньше первого) при вычислении $P_2(a)$ можно ограничиться учетом лишь первого члена ряда (11.1). Тогда получим

$$\begin{aligned} P_2(a) = & -\frac{1}{2\omega} \Psi_{21}^{(1)s} \cong -\frac{1}{2\omega} \left\{ 2P_1 Q_1 + a P_1 \frac{dQ_1}{da} + \frac{2h}{\rho} a Q_1 + \right. \\ & + \frac{4B_0}{\pi\rho} \sin \frac{\pi b}{l} \left(2h_1 \left\{ \frac{2B_0 l}{\pi} \sin \frac{\pi b}{l} [(P_1 + a\omega\tau Q_1) \sin \omega\tau + (\omega\tau P_1 - aQ_1) \cos \omega\tau] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{9} \frac{2B_0 \omega l}{\pi\rho} \frac{4B_0}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + c_1^2 \frac{9\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{3\pi b}{l} \left(-\frac{4l}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{\pi b}{l} + \right. \right. \end{aligned}$$

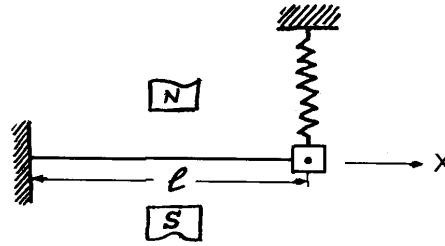


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 & + 4 a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{\pi b}{l} \cos 2\omega\tau \left\{ - 8 h_2 B_0^2 a^2 \omega^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \left\{ \frac{l}{2 B_0 \pi} \sin \frac{\pi b}{l} \cdot (a \omega \tau Q_1 + \right. \right. \\
 & + P_1) \sin \omega\tau + 3(\omega\tau P_1 - a Q_1) \cos \omega\tau \left. \right\} + B_0 \omega \frac{l}{\pi \rho} \left(-\frac{1}{9} \right) \frac{4 B_0}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + c_1^2 \frac{9\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{3\pi b}{l} \times \\
 & \times \left(-\frac{4 B_0}{\pi} a \omega B_0 h_1 \sin \frac{3\pi b}{l} + 4 a^3 \omega^3 h_2 B_0^3 \frac{l^3}{\pi^3} \sin^3 \frac{3\pi b}{l} \right) \left(\cos^2 \omega\tau - \frac{1}{2} \cos \omega\tau \cos 3\omega\tau - \right. \\
 & - \left. \frac{1}{2} \sin^2 \omega\tau \right) + B_0 \omega \frac{l}{\pi \rho} \left(-\frac{1}{9} \right) \frac{1}{\omega^2 + c_1^2 \frac{9\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{3\pi b}{l} \left(\frac{16 B_0^4}{3\pi^4} a^3 \omega^3 h_2 l^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin \frac{3\pi b}{l} \right) \times \\
 & \times \frac{1}{2} \left(\cos \omega\tau \cos 5\omega\tau - \sin \omega\tau \sin \omega\tau \right) + B_0 \omega \frac{l}{\pi \rho} \frac{1}{9\omega^2 + c_1^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \times \\
 & \times \left(\frac{16 B_0^4}{3\pi^4} a^3 \omega^3 h_2 l^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin \frac{\pi b}{l} \right) \frac{1}{2} \left(\cos 3\omega\tau \cos 5\omega\tau - \sin 3\omega\tau \sin \omega\tau \right) \left. \right\} \left. \right\}. \quad (11.2)
 \end{aligned}$$

Теперь стационарные амплитуды определяются из алгебраического уравнения 5-го порядка относительно a :

$$P_1(a) + \varepsilon P_2(a) = 0. \quad (11.3)$$

Здесь вместо $P_2(a)$ нужно подставить приближенное значение (11.2).

Произведя вычисление амплитуд, полученных из уравнения первого приближения (5.1) и уравнения второго приближения (11.3) для числовых параметров l, b, B_0, \dots , можно убедиться, что амплитуда второго приближения почти сохраняет значение амплитуды первого приближения (5.1). Результаты вычислений свидетельствуют о целесообразности изучения и учета лишь 1-го улучшенного приближения.

12. Влияние резонансного вибрационного граничного режима. Физические комментарии. Предположим теперь, что основание, на котором установлен струнный генератор, совершает перпендикулярное к оси чувствительности прибора малое вибрационное движение $\varepsilon\beta \cos \nu t$ с частотой ν , близкой или равной собственной частоте ω , т. е. рассмотрим случай основного резонанса. Из-за наличия упругого подвеса это вибрационное движение будет влиять на работу струнного генератора посредством изменения граничного режима на правой границе (рис. 3).

В этом случае нулевое граничное условие $U(t, l) = 0$ должно быть заменено неоднородным условием

$$U(t, l) = \varepsilon\beta \cos \theta, \quad \theta = \nu t.$$

Изучим влияние таких вибраций на автоколебательные свойства струнного генератора при наличии запаздывания в усилителе.

Математические соотношения. Ограничимся I-м улучшенным приближением. Тогда решение $U(t, x)$ для первой моды будем искать согласно [21] в виде

$$U(t, x) = a \cos \psi \sin \frac{\pi x}{l} + \varepsilon W_1(a, \psi, \theta, x),$$

где зависящие от времени амплитуда a и разность фаз η определяются из дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon P_1(a, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon Q_1(a, \eta), \quad \eta = \psi - \theta.$$

Приходим к линейной краевой задаче для функции W_1 с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2\omega\nu \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) W_1(a, \psi, \theta, x) &= c_1^2 \frac{\partial^2 W_1(a, \psi, \theta, x)}{\partial x^2} + \\ &+ \left[2\omega \left(P_1 \sin \psi + a Q_1 \cos \psi \right) + 2 \frac{h}{\rho} a \omega \sin \psi \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \\ &+ B(x) \frac{1}{\rho} \left[-\frac{4l}{\pi} B_0 h_1 a \omega \sin \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) + \frac{4l^3}{3\pi^3} h_2 B_0^3 a^3 \omega^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) \right], \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$W_1(a, \psi, \theta, 0) = 0, \quad W_1(a, \psi, \theta, l) = \beta \cos \nu t.$$

Путем замены переменных

$$W_1(a, \psi, \theta, x) = W_1^*(a, \psi, \theta, x) + \frac{x}{l} \beta \cos \nu t$$

линейную краевую задачу (12.1) с неоднородными граничными условиями приводим к краевой задаче с однородными граничными условиями для функции $W_1^*(a, \psi, \theta, x)$,

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2\omega\nu \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) W_1^*(a, \psi, \theta, x) &= c_1^2 \frac{\partial^2 W_1^*(a, \psi, \theta, x)}{\partial x^2} + \\ &+ \left[2\omega \left(P_1 \sin \psi + a Q_1 \cos \psi \right) + 2 \frac{h}{\rho} a \omega \sin \psi \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \\ &+ B(x) \frac{1}{\rho} \left[-\frac{4l}{\pi} B_0 h_1 a \omega \sin \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) + \frac{4l^3}{3\pi^3} h_2 B_0^3 a^3 \omega^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) \right] + \\ &+ \frac{x}{l} \nu^2 \beta \cos \theta, \quad W_1^*(a, \psi, \theta, 0) = W_1^*(a, \psi, \theta, l) = 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Тогда, разыскивая решение W_1^* краевой задачи (12.2) в виде ряда по собственным функциям невозмущенной краевой задачи

$$W_1^*(a, \psi, \theta, x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1n}^*(a, \psi, \theta) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где искомые коэффициенты W_{1n}^* представлены в виде рядов Фурье

$$W_{1n}^*(a, \psi, \theta) = \sum_{\sigma, \mu=0}^{\infty} \left[W_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}(a) \sin(\sigma\psi + \mu\theta) + W_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}(a) \cos(\sigma\psi + \mu\theta) \right],$$

и учитывая то, что для ограниченности решений $W_1^*(a, \psi, \theta, x)$ необходимо, чтобы $W_{11}^{*(1,0)s} = W_{11}^{*(1,0)c} = W_{11}^{*(0,1)s} = W_{11}^{*(0,1)c} = 0$, после промежуточных операций, свойственных методу неопределенных коэффициентов, получаем выражения для неизвестных коэффициентов $W_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}$, $W_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}$:

$$W_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}(a) = \frac{\Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}(a)}{\sigma^2\omega^2 + 2\sigma\mu\omega\nu + \mu^2\nu^2 + c_1^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2}},$$

$$W_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}(a) = \frac{\Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}(a)}{\sigma^2\omega^2 + 2\sigma\mu\omega\nu + \mu^2\nu^2 + c_1^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2}}$$

$$(\sigma + \mu \neq 1 \quad \text{при} \quad n = 1).$$

Здесь $\Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}$ и $\Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}$ — известные величины, получающиеся вследствие разложения известной функции

$$\begin{aligned} \Phi_1^*(a, \psi, \theta, x) \equiv & 2\frac{h}{\rho} a \omega \sin \psi \sin \frac{\pi x}{l} + B(x) \frac{1}{\rho} \left[-\frac{4l}{\pi} B_0 h_1 a \omega \sin \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{4l^3}{3\pi^3} h_2 B_0^3 a^3 \omega^3 \sin^3 \frac{\pi b}{l} \sin(\psi - \omega\tau) \right] + \frac{1}{l} \nu^2 \beta x \cos \theta \end{aligned}$$

в ряды

$$\Phi_1^*(a, \psi, \theta, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{1n}^*(a, \psi, \theta) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\left(\Phi_{1n}^*(a, \psi, \theta) = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi_1^*(a, \psi, \theta, x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right),$$

$$\Phi_{1n}^*(a, \psi, \theta) = \sum_{\sigma, \mu=0}^{\infty} \left[\Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)s}(a) \sin(\sigma\psi + \mu\theta) + \Phi_{1n}^{*(\sigma, \mu)c}(a) \cos(\sigma\psi + \mu\theta) \right]$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{1n}^{*(\sigma,\mu)s}(a) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}^*(a, \psi, \theta) \sin(\sigma\psi + \mu\theta) d\psi d\theta, \\ \Phi_{1n}^{*(\sigma,\mu)c}(a) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}^*(a, \psi, \theta) \cos(\sigma\psi + \mu\theta) d\psi d\theta \end{pmatrix}.$$

Искомые функции $P_1(a, \eta)$ и $Q_1(a, \eta)$ имеют вид

$$P_1(a, \eta) = - \left\{ \frac{h}{\rho} a + \frac{1}{\rho} \left[-h_1 + a^2 \omega^2 h_2 B_0^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \right] \frac{8B_0^2 l}{\pi^2} a \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau + \frac{\omega\beta}{l} \sin \eta \right\},$$

$$Q_1(a, \eta) = -\frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[h_1 - a^2 \omega^2 h_2 B_0^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \right] \frac{8B_0^2 l}{\pi^2} a \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega\tau + \frac{\omega\beta}{l} \sin \eta \right\}.$$

Стационарные решения. Рассматривая систему уравнений

$$P_1(a, \eta) = 0,$$

$$Q_1(a, \eta) = 0,$$

после исключения переменной η получаем алгебраическое уравнение 3-го порядка относительно a^2 для определения стационарных значений амплитуды:

$$a^6 + \alpha_1 a^4 + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 = 0, \quad (12.3)$$

где обозначено

$$\alpha_1 = \operatorname{tg}^2 \tau\omega - 2 \frac{h - h_1 \frac{8B_0^2 l}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau}{\omega^2 h_2 \frac{8B_0^4 l^3}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau},$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{h - h_1 \frac{8B_0^2 l}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau}{\omega^2 h_2 \frac{8B_0^4 l^3}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau} \right)^2 - 2 \operatorname{tg}^2 \tau\omega \frac{h_1}{h_2 \omega^2 B_0^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l}},$$

$$\alpha_3 = \operatorname{tg}^2 \tau\omega \left(\frac{h_1}{h_2 \omega^2 B_0^2 \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi b}{l}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\omega^2 h_2 \frac{8B_0^4 l^3}{\pi^4} \sin^4 \frac{\pi b}{l} \cos \omega\tau} \right)^2 \frac{\omega^2 \beta^2 \rho^2}{l^2}.$$

Анализируя (12.3), можно заключить, что при

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 > 0,$$

стационарные амплитуды отсутствуют.

Пусть интенсивность вибрационного граничного режима β такова:

$$\beta = \frac{8h_1 l^2 B_0^2}{\pi \omega \rho} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau$$

и $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < \alpha_1^2/4$. Тогда существуют три стационарных значения амплитуды:

- 1) тривиальное $a = 0$,
- 2) предельный цикл радиуса

$$a = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_2}},$$

- 3) предельный цикл радиуса

$$a = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - \alpha_2}}.$$

При $\beta > \frac{8h_1 l^2 B_0^2}{\pi \omega \rho} \sin^2 \frac{\pi b}{l} \sin \omega \tau$ может быть либо три, либо два, либо одно, либо ни одного (в зависимости от значений параметров α_1 и α_2) стационарных значений амплитуды.

* * *

Эта работа отражает неопубликованные ранее исследования, выполненные авторами в Институте математики НАН Украины в рамках хоздоговора с КБ электроприборостроения (сейчас НПО „Хартрон”, г. Харьков).

1. Акселерометр с вибрирующей нитью // Экспресс-информация (По материалам иностранной печати). Сер. Испытательные приборы и стенды. — М.: ВИНТИ, 1965. — Вып. 22.
2. Акселерометр со струнным датчиком // Там же. — Вып. 47.
3. Акселерометр (с преобразователем струнного типа) // Там же. — 1966. — Вып. 25.
4. Вильке В. Г. Исследование автоколебательных режимов в струнном генераторе // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 3. — С. 170–174.
5. Горенштейн И. А., Шульман И. А., Сафарян А. С. Инерциальная навигация. — М.: Сов. радио, 1962. — 248 с.
6. Евстигнеев М. И. Состояние разработок и перспективы развития микромеханических датчиков // Навигация и управление движением: Сб. докл. II науч.-техн. конф. мол. ученых. — СПб.: ЦНИИ „Электроприбор”, 2000. — С. 54–71.
7. Инерциальные системы управления / Под ред. Д. Питтмана. Пер. с англ. — М.: Воениздат, 1964. — 454 с.
8. Карпачев Ю. А., Корневский Д. Г. Некоторые задачи инерциального управления. — Киев: Наук. думка, 1977. — 152 с.
9. Лозинская А. М. Струнный гравиметр для измерения силы тяжести на море // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. — 1959. — № 3. — С. 398–402.
10. Светлицкий В. А. Колебания струны с учетом изменения натяжения // Изв. АН СССР. ОНТ. — 1958. — № 11. — С. 31–36.

11. *Синицин И. Н.* Автоколебания струнного генератора при аддитивной помехе // Автоматика и телемеханика. — 1967. — № 12. — С. 173–176.
12. *Снигур А. К.* Анализ современного состояния и перспектив развития акселерометров // Зб. наук. праць. — Севастополь: Севастопол. військ.-мор. ін-т ім. Нахімова. — 2004. — Вип. I(4). — С. 178–186.
13. *Струнный акселерометр* // Экспресс-информация (По материалам иностранной печати). Сер. Испытательные приборы и стенды. — М.: ВИНТИ, 1968. — Вып. 35.
14. *Струнный инерциальный акселерометр* // Экспресс-информация (По материалам иностранной печати). Сер. Приборы и элементы автоматики. — М.: ВИНТИ, 1964. — Вып. 17.
15. *Усовершенствование акселерометров с вибрирующей нитью* // Там же. Сер. Испытательные приборы и стенды. — М.: ВИНТИ, 1965. — Вып. 25.
16. *Харьков И. А., Шустров А. Д., Селиванова Л. М.* Трехкомпонентный дифференциальный вибрационно-струнный акселерометр // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2003. — № 4. — С. 120–126.
17. *Цодиков Ю. М.* Исследование струнного автогенератора // Автоматика и телемеханика. — 1965. — № 3. — С. 558–562.
18. *Цодиков Ю. М.* Исследование струнных преобразователей в режиме автоколебаний: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1965.
19. *Чичинадзе М., Ильин В., Новгородский А., Бабур Н.* Конструкции и области применения акселерометров // III Санкт-Петербург. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. — СПб., 1996. — С. 115–169.
20. *Розенблат М. А., Субботин Г. В.* Устойчивость многокаскадных магнитных усилителей, охваченных отрицательной обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 1961. — № 1. — С. 97–106.
21. *Митропольский Ю. А., Корневский Д. Г.* Исследование нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами и запаздыванием // Мат. физика. — 1968. — Вып. 4. — С. 93–145.

Получено 03.01.07