УДК 517.5

В. В. Савчук

Найкращі наближення деяких класів голоморфних функцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. І. Степанцем)

We construct the best linear methods of approximation in the Hardy and Bergman spaces of the classes of functions holomorphic in a unit disk, which are the convolutions of unit balls of the Hardy and Bergman spaces with certain reproducing kernel. We obtain the exact values for the n-widths, the best polynomial approximations, and the best linear approximations of the mentioned functional classes. We find the necessary and sufficient conditions, under which the generalized Bernstein inequalities for algebraic polynomials are hold true in the metrics of the Hardy and Bergman spaces.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ і $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ — відповідно одиничний круг та його межа в комплексній площині $\mathbb{C}$. Через ν і σ будемо позначати міри Лебега, задані відповідно в $\mathbb{D}$ і на $\mathbb{T}$ так, що $\nu(\mathbb{D}) = \sigma(\mathbb{T}) = 1$. Для $1 \leqslant p < \infty$ будемо розглядати простори $L_p(\mathbb{D})$ і $L_p(\mathbb{T})$ функцій, визначених відповідно в $\mathbb{D}$ і на $\mathbb{T}$ з нормами

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{D})} := \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |f|^p d\nu\right)^{1/p} < \infty \qquad \text{і} \qquad \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p} < \infty.$$

Через $C(\mathbb{T})$ будемо позначати простір неперервних на колі $\mathbb{T}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{C(\mathbb{T})} := \max_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|.$$

Нехай далі $\mathcal{H}$ — множина всіх функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$. Для $1 \leqslant p < \infty$ позначимо $A_p := L_p(\mathbb{D}) \bigcap \mathcal{H}$ — простір Бергмана з нормою $\|\cdot\|_{A_p} = \|\cdot\|_{L_p(\mathbb{D})}$ і

$$H_p := \left\{ f \in \mathcal{H}\colon \|f\|_{H_p} := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w)\right)^{1/p} < \infty \right\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \text{ —}$$

простір Гарді. При $p = \infty$ покладаємо $A_\infty = H_\infty$ і розуміємо під цим простір обмежених голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f з нормою $\|f\|_{H_\infty} := \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.

Позначимо $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді ряд Тейлора функції $f \in \mathcal{H}$ матиме вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Для формального степеневого ряду

$$\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k \in \mathcal{H}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

в якому $\psi := \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел і ряду Тейлора функції $f \in \mathcal{H}$, суму ряду

$$(f * \Psi)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{f}_k z^k$$

називають згорткою за Адамаром функцій f та Ψ.

Якщо для заданої послідовності ψ функцію $f \in \mathcal{H}$ можна зобразити у вигляді згортки $g * \Psi$ з деякою функцією $g \in \mathcal{H}$, то кажуть [1], що f є ψ-інтегралом функції g. У свою чергу, функцію g називають ψ-похідною функції f і використовують при цьому позначення f^{ψ}.

Позначивши через UA_p і UH_p одиничні кулі відповідно в просторах A_p і H_p, для даної послідовності $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначимо класи A_p^{ψ} і H_p^{ψ}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, таким чином:

$$A_p^{\psi} := \{f \in \mathcal{H} \colon f^{\psi} \in UA_p\}, \qquad H_p^{\psi} := \{f \in \mathcal{H} \colon f^{\psi} \in UH_p\}.$$

При цьому будемо казати, що функція $\Psi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k \in \mathcal{H}$ є твірним ядром класу A_p^{ψ} або H_p^{ψ}, якщо $\varlimsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|\psi_k|} \leqslant 1$ і $|\psi_k| > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$.

Зрозуміло, якщо Ψ є твірним ядром і функція $f \in A_p^{\psi} \vee H_p^{\psi}$, то її ψ-похідна має розвинення в ряд Тейлора

$$f^{\psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} \widehat{f}_k z^k, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Нехай далі $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n-1}$, — нескінченна нижньотрикутна функціональна матриця, елементами якої є функції $\lambda_{k,n}(\cdot)$, визначені на відрізку $[0, 1]$, і $\{U_n\}_0^{\infty}$ — послідовність лінійних операторів, заданих на $\mathcal{H}$ правилом

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n}(|z|) \widehat{f}_k z^k. \tag{1}$$

Кажуть, що матриця Λ за допомогою (1) породжує лінійний метод наближення голоморфних функцій. Надалі під терміном "лінійний метод наближення голоморфних функцій" ми будемо розуміти оператор $U_{n,\Lambda}$. Якщо ж оператор $U_{n,\Lambda}$ відображає $\mathcal{H}$ в простір $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраїчних многочленів степеня не більше $n-1$, то кажемо, що матриця Λ породжує поліноміальний лінійний метод наближення голоморфних функцій.

Зауважимо, що для всіх $z \in \mathbb{T}_{\varrho} := \{z \colon |z| = \varrho\}$ при фіксованому $\varrho \in [0, 1)$ $\lambda_{k,n}(|z|) = \mathrm{const}$. Тому метод $U_{n,\Lambda}$ на кожному концентричному колі $\mathbb{T}_{\varrho}$ можна трактувати як поліноміальний лінійний метод наближення, породжений числовою матрицею $\Lambda_{\varrho} := \{\lambda(\varrho)_{k,n}\}$.

Нехай X — нормований лінійний простір функцій, визначених на деякому компакті в $\mathbb{D}$, і $\mathfrak{A}$ — підмножина в $\mathcal{H}$.

Величина

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{A}} \|f - U_{n,\Lambda}(f)\|_X, \qquad n \in \mathbb{N},$$

де нижня межа береться по множині всіх нижньотрикутних функціональних матриць Λ, називається найкращим лінійним наближенням класу $\mathfrak{A}$ в просторі X. Якщо існує матриця Λ^*, яка породжує послідовність операторів $\{U_{n,\Lambda^*}\}_0^\infty$ таких, що

$$\sup_{f\in\mathfrak{A}}\|f-U_{n,\Lambda^*}(f)\|_X=\mathcal{L}_n(\mathfrak{A};X),\qquad n=\overline{0,\infty},\tag{2}$$

то матриця Λ^* називається найкращим лінійним методом наближення класу $\mathfrak{A}$ в просторі X.

Величина

$$E_n(\mathfrak{A};X):=\sup_{f\in\mathfrak{A}}\inf_{P_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}}\|f-P_{n-1}\|_X,\qquad n\in\mathbb{N},$$

називається найкращим многочленним наближенням порядку n класу $\mathfrak{A}$ у просторі X.

Нескладно показати, що для будь-якої послідовності ψ і натурального n

$$|\psi_n|\leqslant E_n(H_\infty^\psi;C(\mathbb{T}))\leqslant\mathcal{L}_n(H_\infty^\psi;C(\mathbb{T})).\tag{3}$$

Метою нашого дослідження є знаходження точних значень величин $E_n(\mathfrak{A};X)$ і $\mathcal{L}_n(\mathfrak{A};X)$ у контексті співвідношення (3), коли $\mathfrak{A}$ набуває значень H_p^ψ і A_p^ψ, а X — це простір неперервних функцій, або ж L_p-простір на концентричному колі $\mathbb{T}_\varrho:=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=\varrho\}$ чи в крузі $\mathbb{D}_\varrho:=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leqslant\varrho\}$, $0\leqslant\varrho\leqslant1$, до того ж ми прагнемо побудувати найкращий лінійний метод наближення, тобто вказати явний вигляд $\lambda_{k,n}(\cdot)$, для яких виконується (2).

Раніше така задача розглядалася в [2–8] за умови, що послідовність ψ є дійсною, опуклою і спадною до нуля (за таких умов співвідношення (3) перетворюється в низку рівностей). На цей час залишалося нез'ясованим питання про те, чи будуть наведені умови необхідними. З огляду на це актуальною є задача про знаходження необхідних і достатніх умов на послідовність ψ, за яких співвідношення (3) перетворюється в рівність.

2. Найкращі лінійні методи наближення класів A_p^ψ і H_p^ψ. Розглянемо на класах A_p^ψ і H_p^ψ лінійний метод наближення U_{n,Λ^*}, породжений числовою матрицею

$$\Lambda^*=\{\lambda_{k,n}^*\}\colon \lambda_{k,n}^*=1-\frac{\overline{\psi_{2n-k}}}{\psi_k}e^{2i\arg\psi_n}\varrho^{2(n-k)},\qquad k=\overline{0,n-1},\qquad n\in\mathbb{N}.\tag{4}$$

Основний результат цього пункту говорить, зокрема, про те, що метод U_{n,Λ^*} є найкращим лінійним методом наближення одночасно на класах H_p^ψ і A_p^ψ в метриках просторів $L_p(\mathbb{T}_\varrho)$ і $L_p(\mathbb{D}_\varrho)$ відповідно і до того ж він є найкращим поліноміальним методом наближення.

Нагадаємо, що норми в просторах $L_p(\mathbb{T}_\varrho)$, $L_p(\mathbb{D}_\varrho)$ і $C(\mathbb{T}_\varrho)$ задаються таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}_\varrho)}=\|f(\varrho\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})},\qquad \|f\|_{L_p(\mathbb{D}_\varrho)}=\varrho^{2/p}\|f(\varrho\cdot)\|_{L_p(\mathbb{D})},\qquad \|f\|_{C(\mathbb{T}_\varrho)}=\|f(\varrho\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Теорема 1. *Нехай функція* $\Psi(z):=\sum\limits_{k=0}^\infty\psi_kz^k$ *— твірне ядро класу* H_p^ψ, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

1. Для даного натурального n *і будь-якого* $\varrho\in[0,1]$ *рівність*

$$E_n(H_\infty^\psi;C(\mathbb{T}_\varrho))=\mathcal{L}_n(H_\infty^\psi;C(\mathbb{T}_\varrho))=|\psi_n|\varrho^n\tag{5}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\psi_n}\sum_{k=0}^\infty\psi_{k+n}z^k\right)\geqslant1\qquad\forall z\in\mathbb{D}.\tag{6}$$

При цьому метод (4) *є єдиним найкращим лінійним методом наближення класу* H_∞^ψ.

2. Якщо Ψ задовольняє умову (6), *то для кожного фіксованого $\varrho \in [0,1]$ і кожного натурального n при всіх $p \in [1,\infty)$*

$$E_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = \mathcal{L}_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = \sup_{f\in H_p^\psi} \|f - U_{n,\Lambda^*}(f)\|_{L_p(\mathbb{T}_\varrho)} = |\psi_n|\varrho^n; \tag{7}$$

$$E_n(A_p^\psi; L_p(\mathbb{D}_\varrho)) = \mathcal{L}_n(A_p^\psi; L_p(\mathbb{D}_\varrho)) = \sup_{f\in A_p^\psi} \|f - U_{n,\Lambda^*}(f)\|_{L_p(\mathbb{D}_\varrho)} = |\psi_n|\varrho^{n+2/p}. \tag{8}$$

Зауваження 1. Умова (6) є рівносильною такій: для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує додатна борелівська міра μ_n на $\mathbb{T}$ така, що

$$\frac{\psi_{k+n}}{\psi_n} = \int\limits_{\mathbb{T}} w^{-k} d\mu_n(w), \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Зауваження 2. Якщо числа ψ_k, $k = 0,1,2,\ldots$, є дійсними, то умову (6) можна переписати у вигляді: для кожного натурального n гармонічна функція

$$\frac{1}{2}\psi_n + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \psi_{k+n} z^k \tag{9}$$

є знакосталою в крузі $\mathbb{D}$.

За таких обмежень на функцію Ψ імплікацію (6) $\Rightarrow \mathcal{L}_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = |\psi_n|\varrho^n$ доведено в роботі [7], в якій також побудовано найкращий лінійний метод наближення у вигляді (4). За цих же обмежень на Ψ імплікація (6) $\Rightarrow E_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = |\psi_n|\varrho^n$ випливає з результатів робіт [2, 5].

Нескладно перевірити, що умова (9) виконується для кожного натурального n, коли послідовність ψ є додатною, опуклою і спадною до нуля або ж коли ψ є сталою.

У випадку наближення класу H_p^ψ в метриці простору $L_p(\mathbb{D}_\varrho)$ має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай функція $\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ — твірне ядро класу H_p^ψ, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ і*

$$\Lambda^* = \{\lambda_{k,n}(|z|)\}\colon \lambda_{k,n}(|z|) = 1 - \frac{\overline{\psi_{2n-k}}}{\psi_k} e^{2i\arg\psi_n} |\varrho z|^{2(n-k)}, \quad k = \overline{0,n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Якщо Ψ задовольняє умову (6), *то*

$$\mathcal{L}_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{D}_\varrho)) = \sup_{f\in H_p^\psi} \|f - U_{n,\Lambda^*}(f)\|_{L_p(\mathbb{D}_\varrho)} = |\psi_n| \frac{\varrho^{n+2/p}}{\left(\dfrac{p}{2}n + 1\right)^{1/p}}. \tag{11}$$

3. n-Поперечники класів A_p^ψ і H_p^ψ. Покажемо, що найкращий лінійний метод наближення Λ^* на класах A_p^ψ і H_p^ψ є найкращим агрегатом наближення серед усіх елементів усіх n-вимірних підпросторів H_p і A_p відповідно. У такому випадку прийнято казати, що метод Λ^* реалізує n-поперечник за Колмогоровим.

Нагадаємо необхідні означення.

Нехай X — комплексний нормований лінійний простір, $\mathfrak{A}$ — підмножина в X, $\mathfrak{X}_n$ — множина всіх n-вимірних підпросторів X, $\mathfrak{X}^n$ — множина всіх підпросторів X ковимірності n і $\mathfrak{L}_n$ — множина всіх неперервних лінійних операторів $L_n\colon X \to X_n$ рангу n.

Нижченаведені величини називаються відповідно бернштейнівським, колмогорівським, гельфандівським та лінійним n-поперечником множини $\mathfrak{A}$ в просторі X:

$$b_n(\mathfrak{A}; X) := \sup_{X_{n+1}\in\mathfrak{X}_{n+1}} \sup\{r\colon rUX_{n+1} \subseteqq \mathfrak{A}\},$$

$$d_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{X_n\in\mathfrak{X}_n} \sup_{f\in\mathfrak{A}} \inf_{g\in X_n} \|f+g\|_X,$$

$$d^n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{X^n\in\mathfrak{X}^n} \sup_{f\in\mathfrak{A}\cap X^n} \|f\|_X,$$

$$\delta_n(\mathfrak{A}; X) := \inf_{L_n\in\mathfrak{L}_n} \sup_{f\in\mathfrak{A}} \|f+L_n(f)\|_X.$$

Оптимальними підпросторами для перших трьох з наведених поперечників називаються підпростори, для яких досягаються відповідно верхня межа для b_n та нижні межі для d_n і d^n. Аналогічно для δ_n, оператор L_n називається оптимальним, якщо для нього досягається нижня межа.

Перераховані n-поперечники та величини E_n і $\mathcal{L}_n$ співвідносяться між собою таким чином (див., напр., [9, гл. 2]):

$$b_n(\mathfrak{A}; X) \leqslant \begin{matrix} d_n(\mathfrak{A}; X) \\ d^n(\mathfrak{A}; X) \end{matrix} \leqslant \begin{matrix} \delta_n(\mathfrak{A}; X) \\ E_n(\mathfrak{A}; X) \end{matrix} \leqslant \mathcal{L}_n(\mathfrak{A}; X). \tag{12}$$

Теорема 3. *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ — твірне ядро класу H_p^ψ, $n \in \mathbb{N}$ і D_n — один з n-поперечників b_n, d_n, d^n або ж δ_n. Якщо для Ψ одночасно виконуються умови* (6) *і* (16)*, то для будь-якого $\varrho \in [0,1]$*

$$D_n(H_p^\psi; L_p(\mathbb{T}_\varrho)) = |\psi_n|\varrho^n. \tag{13}$$

При цьому:

1) простір $\mathcal{P}_n$ є оптимальним підпростором для b_n;

2) простір $\mathcal{P}_{n-1}$ є оптимальним підпростором для d_n;

3) простір $H_p^{n-1} := \{f \in H_p\colon \widehat{f}_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ є оптимальним підпростором для d^n;

4) оператор $L_n := U_{n,\Lambda^*}$, де елементи матриці Λ^* визначаються правилом (4)*, є оптимальним для δ_n.*

Теорема 4. *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Psi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ — твірне ядро класу A_p^ψ, $n \in \mathbb{N}$ і D_n — один з n-поперечників b_n, d_n, d^n або ж δ_n. Якщо для Ψ одночасно виконуються умови* (6) *і* (16)*, то для будь-якого $\varrho \in [0,1]$*

$$D_n(A_p^\psi; L_p(\mathbb{D}_\varrho)) = |\psi_n|\varrho^{n+2/p}.$$

При цьому:

1) простір $\mathcal{P}_n$ є оптимальним підпростором для b_n;

2) простір $\mathcal{P}_{n-1}$ є оптимальним підпростором для d_n;

3) простір $A_p^{n-1} := \{f \in A_p \colon \widehat{f}_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ є оптимальним підпростором для d^n;

4) оператор $L_n := U_{n,\Lambda^*}$, де елементи матриці Λ^* визначаються правилом (4), *є оптимальним для δ_n.*

Теорема 5. *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Psi(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ — твірне ядро класу A_p^{ψ}, $n \in \mathbb{N}$ і D_n — один з n-поперечників b_n, d_n, d^n або ж δ_n. Якщо для Ψ одночасно виконуються умови* (6) *і* (16), *то для будь-якого $\varrho \in [0, 1]$*

$$D_n(H_p^{\psi}; L_p(\mathbb{D}_\varrho)) = |\psi_n| \frac{\varrho^{n+2/p}}{\left(\dfrac{pn}{2} + 1\right)^{1/p}}. \tag{14}$$

При цьому:

1) простір $\mathcal{P}_n$ є оптимальним підпростором для b_n;

2) простір $\operatorname{span}\left\{(1 - (\overline{\psi_{2n-k}}/\psi_k) e^{2i \arg \psi_n} |\varrho z|^{2(n-k)}) z^k\right\}_{k=0}^{n-1}$ є оптимальним підпростором для d_n;

3) простір A_p^{n-1} є оптимальним підпростором для d^n;

4) оператор $L_n := U_{n,\Lambda^*}$, де елементи матриці Λ^* визначаються правилом (10), *є оптимальним для δ_n.*

Зауваження 3. Теореми 3 і 4 залишаються в силі, якщо в них замість $L_p(\mathbb{T}_\varrho)$ і $L_p(\mathbb{D}_\varrho)$ розглядати простори $H_p(\mathbb{D}_\varrho)$ і $A_p(\mathbb{D}_\varrho)$ — простори Гарді та Бергмана, визначені відповідним чином в крузі $\mathbb{D}_\varrho$. Рівність (14) в теоремі 5 при цьому залишається правильною тільки для поперечників b_n і d^n.

Теорему 3 у випадку, коли послідовність ψ задовольняє умову (9) і умову (16) зі значеннями $c_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, доведено в [8]. Теореми 4 і 5 у випадку, коли $\psi_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, доведено в [9, с. 254–257].

Доведення наведених тверджень згідно зі співвідношенням (12) зводиться по суті до доведення відповідних оцінок зверху поперечника δ_n та оцінок знизу поперечника b_n.

Оцінки для δ_n випливають з результатів, наведених у п. 2 даної роботи.

Оцінки для b_n проводяться за відомою методикою, яка грунтується на використанні нерівності типу Бернштейна.

4. Нерівність типу Бернштейна для алгебраїчних многочленів. У цьому пункті знайдено необхідні та достатні умови на функцію Ψ, за яких виконується нерівність Бернштейна в термінах ψ-похідних для алгебраїчних многочленів у крузі $\overline{\mathbb{D}}$.

Теорема 6. *Нехай $\psi := \{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — набір комплексних чисел, відмінних від нуля.*

1. Для того щоб для будь-якого алгебраїчного многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконувалася узагальнена нерівність Бернштейна

$$\|P_n^{\psi}\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{|\psi_n|} \|P_n\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{15}$$

необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ така, що

$$2 \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}} z^k + z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right) \geqslant 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{16}$$

2. Якщо виконується (16), *то для будь-якого алгебраїчного многочлена* $P_n \in \mathcal{P}_n$ *при кожному* $p \in [1, \infty)$ *і будь-якому* $\varrho \in [0, 1]$

$$\|P_n^\psi\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{|\psi_n|\varrho^n}\|P_n\|_{L_p(\mathbb{T}_\varrho)}, \tag{17}$$

$$\|P_n^\psi\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{|\psi_n|\varrho^{n+2/p}}\left(\frac{p}{2}n+1\right)^{1/p}\|P_n\|_{A_p(\mathbb{D}_\varrho)}, \tag{18}$$

$$\|P_n^\psi\|_{L_p(\mathbb{D})} \leqslant \frac{1}{|\psi_n|\varrho^{n+2/p}}\|P_n\|_{A_p(\mathbb{D}_\varrho)}. \tag{19}$$

Рівність у співвідношеннях (17)–(19) *досягається для многочлена* $P_n(z) = e^{i\alpha}z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Зауваження 4. Умова (16) є рівносильною кожній з таких умов:

1) існує додатна борелівська міра μ на $\mathbb{T}$ така, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}} w^{-k} d\mu(w) = \frac{\psi_n}{\psi_{n-k}}, \qquad k = 0, \ldots, n;$$

2) для кожного натурального m і будь-яких комплексних чисел λ_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\gamma_{k-l}\lambda_k\overline{\lambda_l} \geqslant 0, \tag{20}$$

де

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\psi_n}{\psi_{n-k}}, & k = 0, \ldots, n, \\ c_k, & k = n+1, \ldots \end{cases}$$

і $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}$, $k \geqslant 1$.

У випадку, коли числа ψ_k є такими, що умова (16) виконується при $c_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, імплікація (16) $\Rightarrow$ (15) доведена Г. Сеге (див. посилання в [10, с. 173]) і передоведена в [8].

1. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706–740.
2. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631–640.
3. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81–120.
4. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183–189.
5. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238–1243.
6. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 155–162.
7. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – Т. 5. – С. 37–54.
8. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285–295.
9. *Pincus* A. n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 291 p.
10. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 2. – Москва: Изд-во АН СССР, 1954. – 630 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 24.10.2006