УДК 517.9

АВТОНОМНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84 112, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

И. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We obtain constructive conditions for existence of solutions of an autonomous Noether weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case, and construct a modified iteration procedure for finding the solutions.

Одержано конструктивні умови існування та побудовано модифіковану ітераційну процедуру для знаходження розв'язків автономної нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t,\varepsilon)\right), \quad z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию [1, 2]

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) = \mathrm{col}\left(z_0^{(1)}(t), \ldots, z_0^{(n)}(t)\right), \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in C^1[a, b^*], \quad b^* = b(0),$$

порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Здесь $A-$ постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, f — постоянный вектор-столбец, $Z(z,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b(\varepsilon)] \to R^m,$$

причем второй функционал непрерывно дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Предположим, что в критическом ($P_{Q^*} \neq 0$) случае выполнено условие

$$P_{Q_d^*} \{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0;$$

при этом порождающая задача (3) имеет r-параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G\,[f; \alpha]\,(t), \quad c_r \in R^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1 \leq \min(m, n)$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$– нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3); $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $X_r(t)$ — $(n \times r)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых столбцов матрицы $X(t)$,

$$G\,[f; \alpha]\,(t) = X(t) Q^+ \{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1],

$$K[f](t) = X(t) \int\limits_a^t X^{-1}(s)\, f\, ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), I_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

Задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач [3]; в отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения самого решения; будем искать его в виде

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon\,(b^* - a)\,\beta(\varepsilon).$$

Функция $\beta(\varepsilon)$ непрерывна на отрезке $[0, \varepsilon_0]$; положим $\beta(0) = \beta^*$. Выполняя в задаче (1), (2) замену независимой переменной [4]

$$t = a + (\tau - a)\,(1 + \varepsilon \beta(\varepsilon))\,, \tag{4}$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$z(\tau, \varepsilon) = \operatorname{col}\left(z^{(1)}(\tau, \varepsilon), \ldots, z^{(n)}(\tau, \varepsilon)\right), \quad z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b^*],$$

$$z^{(i)}(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{d\tau} = Az + f + \varepsilon \left\{ \beta(\varepsilon) A \left(z(\tau, \varepsilon) + f \right) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, Z(z(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right\}, \tag{5}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) \Big(\alpha + \varepsilon \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big). \tag{6}$$

Здесь $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный и $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы

$$\ell z(\cdot, \varepsilon),\ \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b^*] \to R^m.$$

Действительно, линейный векторный функционал $\ell(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ на $C[a, b(\varepsilon)]$ представим с помощью интеграла Римана – Стильтьеса в виде

$$\ell(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \int\limits_a^{b(\varepsilon)} d\Omega(t) z(t, \varepsilon),$$

где $\Omega(t)$ — $(m \times n)$-матрица, элементы которой — функции ограниченной на $[a, b(\varepsilon)]$ вариации. Замена переменной (4) приводит последний интеграл к виду

$$\int\limits_a^{b(\varepsilon)} d\Omega(t) z(t, \varepsilon) = (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) \int\limits_a^{b^*} d\Omega(\tau) z(\tau, \varepsilon).$$

Полученное таким образом равенство

$$\ell(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, \ell z(\cdot, \varepsilon)$$

определяет вид краевого условия (6). Решение

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon)$$

задачи (5), (6) ищем в окрестности решения $z_0(\tau, c_r)$ порождающей задачи (3). Для нахождения возмущения $x(\tau, \varepsilon)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + \varepsilon \left\{ \beta(\varepsilon)(A(z_0 + x) + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) Z(z_0 + x, \varepsilon) \right\}, \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon) + \varepsilon[1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)] \tilde{J}(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{8}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (7), (8) имеет вид

$$P_{Q_d^*} \Big\{ \alpha\beta(\varepsilon) + [1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)] \tilde{J}(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K \left\{ \beta(\varepsilon)[A(z_0 + x) + f] + [1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)]\, Z(z_0 + x, \varepsilon) \right\} (\cdot) \Big\} = 0. \tag{9}$$

Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0), \quad f_0(s, c^*) = \beta^* \left[Az_0(s, c_r^*) + f\right] + Z(z_0(s, c_r^*), 0),$$

аналогично [4] приходим к необходимому условию разрешимости задачи (7), (8).

Лемма. *Если краевая задача (1), (2) в критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *имеет решение*

$$z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,\left(z^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t, \varepsilon)\right), \quad z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$, *то вектор* $c^* = \mathrm{col}\,(c_r^*, \beta^*) \in \in R^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_0(c^*) = P_{Q_d^*}\left\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\right\} = 0. \tag{10}$$

Первые r компонент $c_r^* \in R^r$ корня $c^* \in R^{r+1}$ уравнения (10) определяют амплитуду порождающего решения $z_0(t, c_r^*)$, в малой окрестности которого может существовать искомое решение исходной задачи (1), (2). Кроме того, из уравнения (10) может быть найдена величина $\beta^* \in R^1$, определяющая первое приближение $b_1(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta^*$ к длине отрезка $b(\varepsilon)$, на котором определено искомое решение. Если же уравнение (10) не имеет действительных корней, то исходная задача (1), (2) не имеет искомых решений. Предположим, что уравнение (10) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c^* \in R^{r+1}$ уравнения (10), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1), (2)

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения

$$z_0(\tau, c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G[f; \alpha](\tau).$$

Используя непрерывную дифференцируемость функции $Z(z, \varepsilon)$ по первому аргументу в окрестности порождающего решения и по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = Z(z_0(\tau, c_r^*), 0) +$$
$$+ A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

где

$$A_1(\tau) = \left.\frac{\partial Z(z, \varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}},$$

$$A_2(z_0(\tau, c_r^*)) = \left. \frac{\partial Z(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*), \\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$\left. R_1(z, \varepsilon) \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial R_1(z, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\left. \frac{\partial R_1(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по первому и второму аргументам, выделяем линейные части этого функционала

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \left. \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}},$$

$$\varepsilon\, \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) = \varepsilon \left. \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}}$$

и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (11)$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем два первых члена разложения, поэтому

$$\left. J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0(\tau, c_r^*) \\ \varepsilon=0}} = 0.$$

С учетом разложений нелинейностей задача (7), (8) принимает вид

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* Ax(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \bar\beta(\varepsilon)\left[A(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)) + f\right] + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) +$$
$$+ R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{12}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{\varphi_0(c^*) + \alpha\bar\beta(\varepsilon) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) +\right.$$
$$\left.+ J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}. \tag{13}$$

Здесь $\bar\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ — неизвестная непрерывная скалярная функция.

Решение задачи (12), (13) представимо в виде

$$x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

где

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* Ax(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \bar\beta(\varepsilon)[A(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)) + f] + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) +$$
$$+ R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varphi_0(c^*) + \alpha\bar\beta(\varepsilon) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) +$$
$$+ J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\}(\tau).$$

Неизвестная $c_r = c_r(\varepsilon) \in R^r$ — непрерывная в малой положительной окрестности нуля вектор-функция малого параметра. Используя представление решения задачи (12), (13), преобразуем эту задачу к виду

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\left\{f_0(\tau,c^*) + \bar A_1(z_0(\tau,c_r^*))c(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right\}, \tag{14}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{\varphi_0(c^*) + \bar\ell_1(z_0(\cdot,c_r^*))c(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}. \tag{15}$$

Здесь

$$\bar A_1(z_0(\tau,c_r^*)) = \{[\beta^* A + A_1(s)]\, X_r(s);\ Az_0(\tau,c_r^*) + f\},$$

$$\bar{\ell_1}\,(z_0(\cdot,c_r^*)) = [\ell_1 X_r(\cdot);\alpha]$$

— $(n\times(r+1))$- и $(m\times(r+1))$-мерные матрицы и остатки

$$R_5(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = \beta^* Ax^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \bar\beta(\varepsilon)Ax(\tau,\varepsilon) + A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon A_2(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\, \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) +$$
$$+ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Условие разрешимости задачи (14), (15)

$$P_{Q_d^*}\left\{\varphi_0(c^*) + \bar{\ell}_1\,(z_0(\cdot, c_r^*))\, c(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -\right.$$
$$\left. - \ell K\left[f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1\,(z_0(\tau, c_r^*))\, c(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0$$

упрощает равенство $F_0(c^*) = 0$:

$$P_{Q_d^*}\left\{\bar{\ell}_1\,(z_0(\cdot, c_r^*))\, c(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -\right.$$
$$\left. - \ell K\left[\bar{A}_1\,(z_0(\tau, c_r^*))\, c(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0.$$

Обозначая $(d \times (r+1))$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{\bar{\ell}_1\,(z_0(\cdot, c_r^*)) - \ell K\left[\bar{A}_1\,(z_0(\tau, c_r^*))\right](\cdot)\right\},$$

приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений системы (7), удовлетворяющих краевому условию (8):

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$B_0\, c(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\left[R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\}, \qquad (16)$$

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\left\{f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1\,(z_0(\tau, c_r^*))\, c(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\,;\right.$$
$$\left.\varphi_0(c^*) + \bar{\ell}_1\,(z_0(\cdot, c_r^*))\, c(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right\}(\tau).$$

Здесь $I_1 = \operatorname{col}(I_r, 0)$ — постоянная $(r \times (r+1))$-мерная матрица.

При условии $P_{B_0^*} = 0$ общее решение второго уравнения операторной системы (16) имеет вид

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\left[R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\} + P_{B_0}\bar{c},$$

где $\bar{c} \in R^{r+1}$ — произвольный вектор.

Пусть $\operatorname{rank} P_{B_0} = \rho$, $P_{B_0} : R^{r+1} \to N(B_0)$ — $((r+1) \times (r+1))$-матрица-ортопроектор, $P_{B_0^*}$ — $((r+1) \times (r+1))$-мерная матрица-ортопроектор: $R^{r+1} \to N(B_0^*)$. Обозначим через P_ρ $((r+1) \times \rho)$-матрицу, составленную из ρ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{B_0}; при этом вектор-функция

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\left[R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\} + P_\rho\, c_\rho$$

зависит от произвольного вектора

$$c_\rho = \mathrm{col}\left(c_\rho^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_\rho^{(\rho)}(\varepsilon)\right), \quad c_\rho^{(i)}(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0^*], \quad c_\rho^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Таким образом, при условии $P_{B_0^*} = 0$ общее решение краевой задачи (7), (8) определяет операторная система

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\} + P_\rho c_\rho,$$
$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G \left\{f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*)\right) c(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\,;\right.$$
$$\left.\varphi_0(c^*) + \bar{\ell}_1 \left(z_0(\cdot, c_r^*)\right) c(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right\}(\tau), \tag{17}$$

эквивалентная задаче о построении решения системы уравнений (7), удовлетворяющих краевому условию (8). Операторная система (17) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [1, 2]. Этот метод отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. Целью данной работы является построение приближенных решений краевой задачи (7), (8) аналогично [6] с использованием модифицированной итерационной процедуры.

Первое приближение $x_1(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon)$ к решению

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_1 + \xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon)$$

операторной системы (17) ищем, как решение краевой задачи первого приближения к задаче (7), (8):

$$\frac{dx_1}{d\tau} = A x_1 + \varepsilon f_0(\tau, c^*),$$
$$\ell x_1(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \varphi_0(c^*). \tag{18}$$

Здесь

$$\xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G \left[f_0(s, c^*); \varphi_0(c^*)\right](\tau).$$

Решение краевой задачи первого приближения существует в силу выбора вектора c^*, являющегося корнем уравнения (10).

Второе приближение

$$x_2(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon)$$

к решению

$$\xi_2(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_2(\varepsilon) + \xi_2^{(1)}(\tau, \varepsilon)$$

операторной системы (17) ищем, как решение краевой задачи второго приближения к задаче (7), (8):

$$\frac{dx_2}{d\tau} = Ax_2 + \varepsilon\left\{f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1\left(z_0(\tau, c_r^*)\right)c_1(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right\},$$

$$\ell x_2(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\left\{\varphi_0(c^*) + \bar{\ell}_1\left(z_0(\cdot, c_r^*)\right)c_1(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right\}.$$

С учетом задачи первого приближения приходим к краевой задаче

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = A\xi_2 + \varepsilon\left\{\bar{A}_1\left(z_0(\tau, c_r^*)\right)c_1(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right\},$$

$$\ell\xi_2(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\left\{\bar{\ell}_1\left(z_0(\cdot, c_r^*)\right)c_1(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right\}.$$

Здесь

$$\xi_2^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G\Big[\bar{A}_1(s)c_{r_1} + R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon);$$

$$\bar{\ell}_1\left(z_0(\cdot, c_r^*)\right)c_1(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big](\tau).$$

Условие разрешимости краевой задачи второго приближения приводит к уравнению

$$B_0\, c_1(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K\left[R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\},$$

разрешимому при условии $P_{B_0^*} = 0$; при этом последнее уравнение имеет по меньшей мере одно решение

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell\, K\left[R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\right\} + P_\rho c_\rho.$$

Третье приближение

$$x_3(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon) + \xi_3(\tau, \varepsilon)$$

к решению операторной системы (17) ищем, как решение краевой задачи третьего приближения к задаче (7), (8):

$$\frac{dx_3}{d\tau} = Ax_3 + \varepsilon\left\{f_0(\tau, c^*) + \bar{A}_1\left(z_0(\tau, c_r^*)\right)c_2(\varepsilon) + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right\},$$

$$\ell x_2(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\left\{\varphi_0(c^*) + \bar{\ell}_1\left(z_0(\cdot, c_r^*)\right)c_2(\varepsilon) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\right\}.$$

С учетом задачи первого и второго приближений вектор $\xi_3(\tau, \varepsilon)$ ищем, как решение

$$\xi_3(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau)I_1c_3(\varepsilon) + \xi_3^{(1)}(\tau, \varepsilon)$$

краевой задачи

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = A\xi_3 + \varepsilon \left\{ \bar{A}_1 \left(z_0(\tau, c_r^*)\right) \left(c_2(\varepsilon) - c_1(\varepsilon)\right) + \right.$$

$$\left. + R_5(z_0(\tau, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - R_5 \left(z_0(\tau, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon \right) \right\},$$

$$\ell \xi_3(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \bar{\ell}_1 \left(z_0(\cdot, c_r^*)\right) \left(c_2(\varepsilon) - c_1(\varepsilon)\right) + \right.$$

$$\left. + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right\}.$$

Здесь

$$\xi_3^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon G \left[\bar{A}_1(s) \left(c_2(\varepsilon) - c_1(\varepsilon)\right) + \right.$$

$$+ R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) - R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon);$$

$$\bar{\ell}_1 \left(z_0(\cdot, c_r^*)\right) \left(c_2(\varepsilon) - c_1(\varepsilon)\right) + J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) +$$

$$\left. - J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (\tau).$$

Условие разрешимости краевой задачи третьего приближения приводит к уравнению

$$B_0 \, c_2(\varepsilon) = -P_{Q_d^*} \left\{ J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \ell \, K \left[R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) - R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\},$$

разрешимому при условии $P_{B_0^*} = 0$; при этом последнее уравнение имеет по меньшей мере одно решение

$$c_2(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*} \left\{ J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - J_5(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \ell K \left[R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_2^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) - R_5(z_0(s, c_r^*) + \xi_1^{(1)}(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} + P_\rho \, c_\rho.$$

Структура последующих приближений не отличается от структуры третьего приближения к решению операторной системы (17).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для каждого простого* ($P_{B_0^*} = 0$) *корня* $c^* = \mathrm{col}\,(c_r^*, \beta^*)$ *уравнения* $F_0(c^*) = 0$ *задача (5), (6) имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_r^*)$. *Это решение можно определить с помощью сходящегося при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *итерационного процесса*

$$x_1(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon), \quad \xi_1(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_1(\varepsilon) + \xi_1^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\left[f_0(s,c^*);\varphi_0(c^*)\right](\tau),$$

$$c_1(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{J_5(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\left[R_5(z_0(s,c_r^*)+\xi_1^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\right\} + P_\rho c_\rho,$$

. . . .

$$x_{k+2}(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon), \tag{19}$$

$$\xi_{k+2}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)I_1c_{k+2}(\varepsilon)+\xi_{k+2}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}\xi_{k+2}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\,\big[\bar{A}_1(s)\,(c_{k+1}(\varepsilon)-c_k(\varepsilon)) + {}&\\ &+ R_5(z_0(s,c_r^*)+\xi_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon) - R_5(z_0(s,c_r^*)+\xi_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon);\\ &\bar{\ell}_1\,(z_0(\cdot,c_r^*))\,(c_{k+1}(\varepsilon)-c_k(\varepsilon)) + J_5(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\ &- J_5(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\ \big]\,(\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{k+2}(\varepsilon) = -B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{&J_5(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_5(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\ &- \ell K\left[R_5(z_0(s,c_r^*)+\xi_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon) - R_5(z_0(s,c_r^*)+\xi_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} + P_\rho\, c_\rho,\end{aligned}$$

. . . .

С учетом замены независимой переменной (4) задача (1), (2) имеет по меньшей мере одно решение, которое может быть найдено с помощью итерационного процесса (19) по формуле $z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots$. Величина $\beta_k(\varepsilon)$ представляет собой последнюю компоненту вектора $c_k(\varepsilon)$.

Итерационная процедура (19) отличается от схемы [4] учетом производных $A_2(z_0(\tau, c_r^*))$ и $\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$ нелинейностей исходной краевой задачи (1), (2). Учет производных $A_2(z_0(\tau,c_r^*))$ и $\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$, вообще говоря, снимает дополнительные требования

$$\left.\frac{\partial\, Z(z,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ \varepsilon=0}} = 0,$$

используемые при построении итерационной процедуры [4]. Схема (19) использует представление искомого решения в виде суммы последовательности возмущений

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon), \quad x_2(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon), \quad x_3(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon)+\xi_3(t,\varepsilon),\ldots,$$

не является разложением искомого решения по степеням малого параметра и не предполагает разложений нелинейностей по степеням решения задачи (1), (2). Правые части уравнений итерационной процедуры (19) в отличие от традиционной схемы [4] не содержат повторяющихся слагаемых, поэтому точность приближенных вычислений возрастает. Найти оценку ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (19), можно по формуле [7].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
4. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 – 1674.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука. 1977. — 744 с.
6. *Чуйко С. М.* Модифицированный метод простых итераций для критической краевой задачи // Динам. системы. — 2008. — **25**. — С. 145 – 158.
7. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416 – 432.

Получено 28.12.08