УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ*

Г. П. Пелюх, О. А. Сівак

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

We find conditions for existence of continuous solutions to a system of linear functional-difference equations with linearly transformed argument, and develop a method to construct such solutions.

Установлены условия существования непрерывных решений систем линейных функционально-разностных уравнений с линейно преобразованным аргументом и разработан метод их построения.

Статтю присвячено дослідженню систем лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in R$, $A(t)$, $B(t)$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, q — деяка дійсна стала. При різних припущеннях відносно матриць $A(t)$, $B(t)$ і вектора $F(t)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–10] і наведену в них бібліографію), і на сьогодні ряд питань їх теорії досить детально вивчено. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних та ін.) розв'язків і дослідження їх властивостей. У цій статті також вивчаються питання існування розв'язків (в основному неперервних і обмежених) і досліджується структура їх множини. При цьому основною метою є встановлення умов існування неперервних розв'язків і розробка методу їх побудови.

Спочатку розглянемо систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2}$$

де A, B — дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — дійсна стала, і покажемо, що при певних умовах вона має неперервні розв'язки, які можна побудувати. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad |\lambda_i| \neq 0, 1, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді, як відомо, існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

* Частково підтримано проектом Ф 25.1/021.

де C — деяка стала неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(qt), \tag{3}$$

де $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\widetilde{B} = C^{-1}BC$. В залежності від умов, які задовольняють числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриця $\widetilde{B}$ і стала q, далі розглянемо ряд випадків, коли вдається не тільки дати відповідь на питання про існування неперервних розв'язків системи рівнянь (3), але й побудувати їх у вигляді деяких функціональних рядів.

1. Дослідимо спочатку систему рівнянь (3) у випадку, коли $t \in R^+$ і виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\triangle = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, де $\widetilde{b} = |\widetilde{B}| = \max\limits_i \sum\limits_j |b_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Має місце наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{4}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції.

Дійсно, підставляючи (4) у (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \widetilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = \Lambda y_0(t), \tag{5_0}$$

$$y_i(t+1) = \Lambda y_i(t) + \widetilde{B} y_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5_i}$$

то ряд (4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (5_0) має множину неперервних при $t \geq 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \Lambda^t \omega(t), \tag{6_0}$$

де $\Lambda^t = \mathrm{diag}\,(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — довільні неперервні 1-періодичні функції. Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведемо, що вони також мають неперервні при $t \geq 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)}\, \widetilde{B}\, y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6_i}$$

є формальними розв'язками послідовності систем рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, то для цього достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i \lambda^{*qt}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де $M = \max\limits_t |\omega(t)|$. Далі, оскільки $|y_0(t)| \leq M\lambda^{*t}$, то з огляду на (6_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\widetilde{B}|\, |y_0(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)}\, \widetilde{b}\, M\lambda^{*q(t+j)} \leq$$

$$\leq M\, \widetilde{b}\, \lambda_*^{-1} \lambda^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq M \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}}\, \lambda^{*qt} \leq M\Delta\, \lambda^{*qt},$$

тобто оцінка (7) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (7) доведено для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Згідно з (6_{k+1}) і (7) маємо

$$|y_{k+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1}\, |\widetilde{B}|\, |y_k(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)}\, \widetilde{b}\, M\Delta^k \lambda^{*q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq M\, \Delta^k\, \widetilde{b} \lambda_*^{-1} \lambda^{*q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q^2})^j \leq M\Delta^k\, \widetilde{b}\lambda_*^{-1}\lambda^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^k \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}}\, \lambda^{*qt} \leq M\Delta^{k+1}\, \lambda^{*qt}.$$

Отже, оцінки (7) мають місце при всіх $i \geq 1$. Цим ми довели, що ряди (6_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінки (7). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4), в якому вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються співвідношеннями (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай $\gamma(t)$ — довільний неперервний і обмежений при $t \in R^+$ розв'язок системи рівнянь (3) і виконуються умови 1, 2 леми 1. Тоді при всіх $t \in R^+$ виконується оцінка*

$$|\gamma(t)| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}\lambda^{*t}, \tag{8}$$

де $\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}$ — деяка додатна стала.

Доведення. Дійсно, оскільки

$$\gamma(t+1) = \Lambda\gamma(t) + \widetilde{B}\gamma(qt), \tag{9}$$

то, виконуючи в (9) взаємно однозначну заміну змінних

$$\gamma(t) = \Lambda^t v(t), \tag{10}$$

де $\Lambda^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$, отримуємо систему рівнянь для вектор-функції $v(t)$:

$$v(t+1) = v(t) + \Lambda^{-(t+1)}\widetilde{B}\Lambda^{qt}v(qt). \tag{11}$$

Оскільки довільний неперервний обмежений при $t \geq 0$ розв'язок системи рівнянь (11) задовольняє систему рівнянь

$$v(t) = \widetilde{\omega}(t) - \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^{-(t+1+j)}\widetilde{B}\Lambda^{q(t+j)}v(q(t+j)), \tag{12}$$

де $\widetilde{\omega}(t)$ — деяка неперервна 1-періодична вектор-функція, то для доведення леми достатньо встановити, що система рівнянь (12) має єдиний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $v(t)$. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які побудуємо за допомогою співвідношень

$$v_0(t) = \widetilde{\omega}(t),$$

$$v_m(t) = \widetilde{\omega}(t) - \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^{-(t+1+j)}\widetilde{B}\Lambda^{q(t+j)}v_{m-1}(q(t+j)), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Покажемо спочатку, що вектор-функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \geq 0$. Справді, $|v_0(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| \leq \widetilde{M}$, де $\widetilde{M}$ — деяка додатна стала. Тоді згідно з (13) і умовами леми отримуємо

$$|v_1(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| + \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda^{-1}|^{t+1+j}|\widetilde{B}||\Lambda|^{q(t+j)}|v_0(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{M} + \widetilde{b}\,\widetilde{M}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_*^{-(t+1+j)}\lambda^{*q(t+j)} \leq \widetilde{M} + \widetilde{b}\,\widetilde{M}\lambda_*^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq \widetilde{M}\left(1 + \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}}\right) \leq \frac{\widetilde{M}}{1-\Delta} = \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку

$$|v_m(t)| \leq \widetilde{\widetilde{M}} \tag{14}$$

доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, на підставі (13), умов леми і (14) знаходимо

$$|v_{m+1}(t)| \leq |\widetilde{\omega}(t)| + \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+1+j} |\widetilde{B}||\Lambda|^{q(t+j)} |v_m(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{M} + \widetilde{b}\,\widetilde{\widetilde{M}} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(t+1+j)} \lambda^{*q(t+j)} \leq \widetilde{M} + \widetilde{b}\,\widetilde{\widetilde{M}} \lambda_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{M}} \left(\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{\widetilde{M}}} + \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \right) = \widetilde{\widetilde{M}}(1 - \Delta + \Delta) = \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Отже, всі вектор-функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними й обмеженими при $t \geq 0$.

Доведемо тепер, що послідовність вектор-функцій $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної й обмеженої вектор-функції $v(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|v_m(t) - v_{m-1}(t)| \leq \widetilde{M}\Delta^m. \tag{15}$$

Справді, з огляду на (13) при $m = 1$ отримуємо

$$|v_1(t) - v_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+1+j} |\widetilde{B}||\Lambda|^{q(t+j)} |v_0(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{b}\,\widetilde{M} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(t+1+j)} \lambda^{*q(t+j)} \leq \widetilde{b}\,\widetilde{M} \lambda_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq \widetilde{M} \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} = \widetilde{M}\Delta,$$

тобто в цьому випадку оцінка (15) має місце. Припустимо, що вона виконується для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$. Дійсно, беручи до уваги (13), (15) і умови леми, знаходимо

$$|v_{m+1}(t) - v_m(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+1+j} |\widetilde{B}||\Lambda|^{q(t+j)} |v_m(q(t+j)) - v_{m-1}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{b}\widetilde{M}\Delta^m \lambda_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq \widetilde{M}\Delta^m \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} = \widetilde{M}\Delta^{m+1}.$$

Таким чином, оцінка (15) має місце при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$.

Безпосередньо з (15) випливає, що послідовність $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $v(t) = \lim\limits_{m \to +\infty} v_m(t)$, яка (внаслідок (14)) задовольняє умову

$$|v(t)| \leq \widetilde{\widetilde{M}}.$$

Переходячи в (13) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що вектор-функція $v(t) = \lim\limits_{m \to +\infty} v_m(t)$ є розв'язком системи рівнянь (12).

Припустимо тепер, що існує ще один неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $\widetilde{v}(t)$ системи рівнянь (12) такий, що $\widetilde{v}(t) \neq v(t)$. Тоді на підставі співвідношень

$$v(t) = \widetilde{\omega}(t) - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(t+1+j)} \widetilde{B} \Lambda^{q(t+j)} v(q(t+j)),$$

$$\widetilde{v}(t) = \widetilde{\omega}(t) - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(t+1+j)} \widetilde{B} \Lambda^{q(t+j)} \widetilde{v}(q(t+j))$$

і умов 1, 2 отримуємо

$$|v(t) - \widetilde{v}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+1+j} |\widetilde{B}| |\Lambda|^{q(t+j)} |v(q(t+j)) - \widetilde{v}(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \lambda_*^{-1} \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q})^j \|v(t) - \widetilde{v}(t)\| \leq \Delta \, \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|,$$

де $||v(t) - \widetilde{v}(t)|| = \sup\limits_{t} |v(t) - \widetilde{v}(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|v(t) - \widetilde{v}(t)\| \leq \Delta \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|,$$

яке може мати місце лише у випадку, коли $v(t) \equiv \widetilde{v}(t)$. Отримана суперечність завершує доведення леми 2.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $\triangle = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < \dfrac{1}{2}$.

Тоді довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *системи рівнянь (3) можна подати у вигляді ряду (4), в якому вектор-функції* $y_i(t) = y_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються співвідношеннями* (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, *а* $\omega(t)$ *— деяка неперервна 1-періодична вектор-функція.*

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що для довільного неперервного й обмеженого при $t \geq 0$ розв'язку $\gamma(t)$ системи рівнянь (3) існує неперервна 1-періодична вектор-функція $\omega(t)$ така, що виконується рівність

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t, \omega(t)).$$

Запишемо цю рівність у вигляді

$$\omega(t) = \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t, \omega(t)), \tag{16}$$

де $\Lambda^{-t} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-t}, \ldots, \lambda_n^{-t})$. Оскільки співвідношення (16) є системою рівнянь відносно $\omega(t)$, то залишається показати, що вона має неперервний 1-періодичний розв'язок. Для цього застосуємо метод послідовних наближень, які визначимо за допомогою формул

$$\omega_0(t) = \Lambda^{-t}\gamma(t), \tag{17}$$

$$\omega_m(t) = \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t, \omega_{m-1}(t)), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Покажемо, що таким чином побудовані вектор-функції $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є обмеженими при $t \geq 0$. Справді, за лемою 2 маємо

$$|\omega_0(t)| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}.$$

Тоді, беручи до уваги (18) і умови теореми, знаходимо

$$|\omega_1(t)| \leq |\Lambda^{-t}\gamma(t)| + |\Lambda^{-1}|^t \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(t, \omega_0(t))| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} + \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}\Delta}{1-\Delta} \leq \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta},$$

де $\theta = \dfrac{\Delta}{1-\Delta} < 1$. За індукцією можна показати, що оцінка

$$|\omega_m(t)| \leq \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta} \tag{19}$$

має місце при всіх $m \geq 1$ і $t \geq 0$. Справді, нехай (19) доведено для деякого $m \geq 1$. Тоді з огляду на (18), (19) і умови теореми покажемо її справедливість для $m + 1$:

$$|\omega_{m+1}(t)| \leq |\Lambda^{-t}\gamma(t)| + |\Lambda^{-1}|^t \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(t, \omega_m(t))| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} + \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta}(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} + \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta}\,\frac{\Delta}{1-\Delta} \leq \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta}(1-\theta+\theta) = \frac{\widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}}{1-\theta}.$$

Отже, оцінка (19) має місце при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$.

Доведемо тепер, що послідовність вектор-функцій $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \geq 0$ вектор-функції $\omega(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $m \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$\|\omega_m(t) - \omega_{m-1}(t)\| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}}\theta^m, \tag{20}$$

де $\|\omega_m(t) - \omega_{m-1}(t)\| = \sup\limits_t |\omega_m(t) - \omega_{m-1}(t)|$.

Покажемо спочатку, що якщо $\widetilde{v}(t)$, $v(t)$ — неперервні обмежені при $t \geq 0$ вектор-функції, то при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_i(t, \widetilde{v}) - y_i(t, v)| \leq \Delta^i \lambda^{*qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\|, \tag{21}$$

де $\|\widetilde{v}(t) - v(t)\| = \sup\limits_t |\widetilde{v}(t) - v(t)|$. Згідно з (6_1) маємо

$$|y_1(t, \widetilde{v}(t)) - y_1(t, v(t))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\widetilde{B}| \, | \, y_0(q(t+j), \widetilde{v}(q(t+j))) -$$

$$- y_0(q(t+j), v(q(t+j)))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} \lambda^{*q(t+j)} |\widetilde{v}(q(t+j)) - v(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} \lambda^{*q(t+j)} ||\widetilde{v}(t) - v(t)|| \leq \widetilde{b} \lambda_*^{-1} \lambda^{*qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \lambda^{*qt} \, \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \leq \Delta \lambda^{*qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\|,$$

звідки випливає (21) при $i = 1$. Припустимо, що оцінку (21) доведено для деякого $i = m$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, на підставі (6_{m+1}), (21) маємо

$$|y_{m+1}(t, \widetilde{v}(t)) - y_{m+1}(t, v(t))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} \, |\widetilde{B}| \, | \, y_m(q(t+j), \widetilde{v}(q(t+j))) -$$

$$- y_m(q(t+j), v(q(t+j)))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} \, \Delta^m \lambda^{*q(q(t+j))} ||\widetilde{v}(t) - v(t)|| \leq$$

$$\leq \widetilde{b} \lambda_*^{-1} \lambda^{*q^2 t} \Delta^m \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q^2})^j \leq \widetilde{b} \lambda_*^{-1} \lambda^{*qt} \Delta^m \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \Delta^m \lambda^{*qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\| \leq \Delta^{m+1} \lambda^{*qt} \|\widetilde{v}(t) - v(t)\|.$$

Таким чином, оцінка (21) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$.

Покажемо тепер, що має місце оцінка (20). Дійсно, оскільки безпосередньо з (6_i), $i = 0, 1, \ldots$, випливає, що при всіх $i \geq 0$ виконується співвідношення

$$y_i(t, 0) \equiv 0,$$

то, беручи до уваги (7), (17) – (19), при $m = 1$ отримуємо

$$|\omega_1(t) - \omega_0(t)| \leq |\Lambda^{-1}|^t \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(t, \omega_0(t))| \leq \lambda_*^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \Delta^i \lambda^{*qt} \leq$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q})^t \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \frac{\Delta}{1 - \Delta} \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \theta,$$

і, отже, $\|\omega_1(t) - \omega_0(t)\| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \theta$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (20) доведено для деякого k, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k + 1$. Справді, на підставі співвідношень (18), (21) і $\|\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t)\| \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \theta^k$ маємо

$$|\omega_{k+1}(t) - \omega_k(t)| \leq |\Lambda^{-1}|^t \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(t, \omega_k(t)) - y_i(t, \omega_{k-1}(t))| \leq$$

$$\leq \lambda_*^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \lambda^{*qt} \|\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t)\| \leq (\lambda_*^{-1} \lambda^{*q})^t \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \theta^k \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^i \leq \widetilde{\widetilde{\widetilde{M}}} \theta^{k+1},$$

звідки випливає оцінка (20) при $k + 1$. Цим ми довели, що співвідношення (20) має місце при всіх $m \geq 1$. Отже, послідовність вектор-функцій $\omega_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $\omega(t)$. Переходячи в (18) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що вектор-функція $\omega(t) = \lim_{m \to +\infty} \omega_m(t)$ є розв'язком системи рівнянь (16).

Доведемо тепер, що вектор-функція $\omega(t)$ є 1-періодичною. Згідно з (16) маємо

$$\omega(t + 1) = \Lambda^{-(t+1)} \gamma(t + 1) - \Lambda^{-(t+1)} \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t + 1, \omega(t + 1)).$$

Оскільки $\gamma(t+1) = \Lambda\gamma(t) + \widetilde{B}\gamma(qt)$, то

$$\omega(t+1) = \Lambda^{-t}\gamma(t) + \Lambda^{-(t+1)}\widetilde{B}\gamma(qt) - \Lambda^{-(t+1)}\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t+1,\omega(t+1)) =$$

$$= \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\left(\Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t+1,\omega(t+1)) - \Lambda^{-1}\widetilde{B}\gamma(qt)\right) =$$

$$= \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t,\omega(t)) + \Lambda^{-1}\widetilde{B}\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt,\omega(qt)) - \Lambda^{-1}\widetilde{B}\gamma(qt)\right) =$$

$$= \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t,\omega(t)) + \Lambda^{-1}\widetilde{B}\gamma(qt) - \Lambda^{-1}\widetilde{B}\gamma(qt)\right) =$$

$$= \Lambda^{-t}\gamma(t) - \Lambda^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t,\omega(t)) = \omega(t).$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B}y(qt) + F(t), \tag{22}$$

де матриці $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\widetilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють умови:

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$, $q > 1$;

2) $\dfrac{\widetilde{b}}{1-\lambda^*} = \widetilde{\theta} < 1$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \overline{M} < \infty$.

Для системи (22) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (22) має неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду*

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(t), \tag{23}$$

де $\overline{y}_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (23) в (22), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(t+1) = \Lambda\sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(t) + \widetilde{B}\sum_{i=0}^{\infty}\overline{y}_i(qt) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\overline{y}_0(t+1) = \Lambda\overline{y}_0(t) + F(t), \tag{24_0}$$

$$\overline{y}_i(t+1) = \Lambda\overline{y}_i(t) + \widetilde{B}\overline{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{24_i}$$

то ряд (23) є формальним розв'язком системи рівнянь (22).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$\overline{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} F(t-j) \tag{25_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (24_0) і виконується оцінка

$$|\overline{y}_0(t)| \leq \frac{\overline{M}}{1-\lambda^*} = \overline{M}'. \tag{26_0}$$

З огляду на (25_0), (26_0) можна послідовно показати, що ряди

$$\overline{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B}\overline{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{25_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (24_i), $i = 1, 2, \ldots,$ і виконуються оцінки

$$|\overline{y}_i(t)| \leq \overline{M}'\widetilde{\theta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{26_i}$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ що визначаються за допомогою співвідношень (25_i), $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють умови (26_i), $i = 0, 1, \ldots,$ то ряд (23) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\overline{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (22) і задовольняє умову

$$|\overline{y}(t)| \leq \frac{\overline{M}'}{1-\widetilde{\theta}}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Виконавши в (22) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t), \tag{27}$$

отримаємо систему рівнянь (3) відносно вектор-функції $z(t)$. Оскільки для цієї системи рівнянь має місце теорема 1, то, зважаючи на заміну змінних (27), умови 1, 3 теореми 2 і припускаючи виконаною умову

$$\max\left\{\frac{\widetilde{b}}{1-\lambda^*}, \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}}\right\} < \frac{1}{2},$$

можна описати структуру множини неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків системи рівнянь (22).

Зауваження 2. Теорема 2 має місце також у випадку, коли замість умови 1 виконується умова $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \ldots, n, q > 0$.

Дослідимо тепер структуру множини неперервних розв'язків системи рівнянь (22) у випадку, коли $\widetilde{B} = \widetilde{B}(t)$. Розглянемо, наприклад, систему рівнянь

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B}(t)y(qt) + \widetilde{F}(t), \tag{28}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, q — деяка стала, $\widetilde{B}(t) : R \to R^{n^2}$, $\widetilde{F}(t) : R \to R^n$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \ldots, n, q > 1$;

2) всі елементи матриці $\widetilde{B}(t)$ *і вектор-функції* $\widetilde{F}(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in R$ *функціями і* $\sup\limits_t |\widetilde{B}(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |\widetilde{F}(t)| = \widehat{M}$;

3) $\dfrac{b^*}{1-\lambda^*} = \widetilde{\Delta} < 1$.

Тоді система рівнянь (28) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t), \tag{29}$$

де $\widetilde{y}_i(t), i = 0, 1, \ldots,$ — *деякі неперервні й обмежені при* $t \in R$ *вектор-функції.*

Доведення. Дійсно, підставляючи (29) в (28), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{B}(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(qt) + \widetilde{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\widetilde{y}_i(t), i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\widetilde{y}_0(t+1) = \Lambda \widetilde{y}_0(t) + \widetilde{F}(t), \tag{30_0}$$

$$\widetilde{y}_i(t+1) = \Lambda \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{B}(t)\widetilde{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{30_i}$$

то ряд (29) є формальним розв'язком системи рівнянь (28).

На підставі умов теореми ряд

$$\widetilde{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{F}(t-j) \tag{31_0}$$

рівномірно збігається при $t \in R$ до деякого неперервного розв'язку системи рівнянь (30_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (31_0) в (30_0)), який задовольняє умову

$$|\widetilde{y}_0(t)| \leq \frac{\widehat{M}}{1-\lambda^*} = \widehat{M}'. \tag{32_0}$$

Беручи до уваги (30_i), $i = 1, 2, \ldots$, умови теореми і співвідношення (31_0), (32_0), можна послідовно показати, що ряди

$$\widetilde{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B}(t-j) \widetilde{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{31_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які є розв'язками відповідних систем рівнянь (30_i), $i = 1, 2, \ldots$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (31_i) в (30_i)) і задовольняють умови

$$|\widetilde{y}_i(t)| \leq \widehat{M}' \widetilde{\Delta}^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{32_i}$$

З огляду на співвідношення (32_i), $i = 0, 1, \ldots$, і умови теореми приходимо до висновку, що ряд (29) рівномірно збігається до деякої неперервної при всіх $t \in R$ вектор-функції $\widetilde{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (28) і задовольняє умову

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \frac{\widehat{M}'}{1 - \widetilde{\Delta}}.$$

Теорему 3 доведено.

Виконуючи в (28) взаємно однозначну заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \widetilde{y}(t), \tag{33}$$

отримуємо систему рівнянь

$$z(t+1) = \Lambda z(t) + \widetilde{B}(t) z(qt), \tag{34}$$

для якої вважатимемо виконаними умови 1, 2 теореми 3 і умову

3) $\dfrac{b^*}{\lambda_* - \lambda^{*q}} = \Delta^* < \dfrac{1}{2}$.

Тоді, як і при доведенні теореми 1, можна довести, що довільний неперервний і обмежений при $t \geq 0$ розв'язок системи рівнянь (34) можна зобразити у вигляді ряду

$$z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t), \tag{35}$$

в якому вектор-функції $z_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються за допомогою співвідношень

$$z_0(t) = \Lambda^t \omega(t), \tag{36_0}$$

$$z_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \widetilde{B}(t+j) z_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{36_i}$$

де $\omega(t)$ — деяка неперервна 1-періодична вектор-функція. Отже, зважаючи на (29), (33), (35), можна описати структуру множини неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків системи рівнянь (28).

Зауваження 3. Теорема 3 має місце також у випадку, коли замість умови 1 виконується умова $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \ldots, n, q > 0$.

2. Розглянемо тепер систему рівнянь (3) у випадку, коли $t \leq 0$. Має місце наступна лема.

Лема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1, i = 1, \ldots, n, q > 1$;

2) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $\triangle = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*} < 1$, *де* $\widetilde{b} = |\widetilde{B}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має сім'ю розв'язків у вигляді функціонального ряду (4). Для цього, очевидно, достатньо показати, що вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, і задовольняють оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i \lambda_*^{qt}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

де $M = \max\limits_t |\,\omega(t)|$.

Справді, безпосередньою підстановкою в (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, можна переконатися, що вектор-функції

$$y_0(t) = \Lambda^t \omega(t), \tag{38_0}$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B} y_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{38_i}$$

де $\Lambda^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$, $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична вектор-функція, є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$.

Покажемо тепер, що ряди (38_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$ виконуються оцінки (37). Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq M\lambda_*^t$, то на підставі (38_1) маємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda|^{j-1} |\widetilde{B}| |y_0(q(t-j))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{*j-1} \lambda_*^{q(t-j)} M \leq$$

$$\leq M\widetilde{b}\lambda^{*-1}\lambda_*^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* \lambda_*^{-q})^j \leq M \frac{\widetilde{b}\lambda^*\, \lambda_*^{-q}}{\lambda^*(1 - \lambda^* \lambda_*^{-q})}\, \lambda_*^{qt} \leq M \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*} \lambda_*^{qt} \leq M\Delta \lambda_*^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (37) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (37), (38_{i+1}) отримуємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda|^{j-1} |\widetilde{B}| |y_i(q(t-j))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{*j-1} M \Delta^i \lambda_*^{q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq M\Delta^i \widetilde{b} \lambda^{*-1} \lambda_*^{q^2 t} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* \lambda_*^{-q^2})^j \leq M\Delta^i \widetilde{b} \lambda^{*-1} \lambda_*^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* \lambda_*^{-q})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^i \frac{\widetilde{b} \lambda^* \lambda_*^{-q}}{\lambda^* (1 - \lambda^* \lambda_*^{-q})} \lambda_*^{qt} \leq M\Delta^{i+1} \lambda_*^{qt}.$$

Отже, ми довели, що ряди (38_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють оцінки (37). Цим самим ми показали, що ряд (4) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}$$

і є розв'язком системи рівнянь (3).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай виконуються умови леми 3 і $\gamma(t)$—довільний неперервний і обмежений при всіх $t \leq 0$ розв'язок системи рівнянь (3). Тоді при всіх $t \leq 0$ виконується умова*

$$|\gamma(t)| \leq \widehat{M} \lambda_*^t,$$

де $\widehat{M} = \mathrm{const} > 0$.

Доведення леми 4 проводиться за тією ж схемою, що і доведення леми 2.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*} < \dfrac{1}{2}$.

Тоді довільний неперервний і обмежений при $t \leq 0$ розв'язок системи рівнянь (3) можна подати у вигляді ряду (4), в якому вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, визначаються співвідношеннями (38_i), $i = 0, 1, \ldots$, а $\omega(t)$ — деяка неперервна 1-періодична вектор-функція.

Для доведення теореми 4 достатньо показати, що для довільного неперервного й обмеженого при $t \leq 0$ розв'язку $\gamma(t)$ системи рівнянь (3) існує неперервна 1-періодична вектор-функція $\omega(t)$ така, що

$$\omega(t) = \Lambda^{-t} \gamma(t) - \Lambda^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t, \omega(t)), \tag{39}$$

де вектор-функції $y_i(t) = y_i(t, \omega(t))$, $i = 1, 2, \ldots$, визначаються співвідношеннями (38_i), $i = 1, 2, \ldots$. Це можна зробити аналогічно тому, як було доведено існування та єдиність неперервного 1-періодичного розв'язку системи рівнянь (16).

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(qt) + \widehat{F}(t), \tag{40}$$

у випадку, коли виконуються умови:

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $\dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - 1} = \theta < 1$;

3) всі елементи вектор-функції $\widehat{F}(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup\limits_t |\widehat{F}(t)| = \widehat{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (40) має неперервний і обмежений при всіх $t \in R$ розв'язок*

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t), \tag{41}$$

де $\widehat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при всіх $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (41) в (40), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(t) + \widetilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{y}_i(qt) + \widehat{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\widehat{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\widehat{y}_0(t+1) = \Lambda \widehat{y}_0(t) + \widehat{F}(t), \tag{42_0}$$

$$\widehat{y}_i(t+1) = \Lambda \widehat{y}_i(t) + \widetilde{B} \widehat{y}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{42_i}$$

то ряд (41) є формальним розв'язком системи рівнянь (40).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\widehat{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \widehat{F}(t+j) \tag{43_0}$$

рівномірно збігається при $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (42_0) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою в (42_0)) і виконується оцінка

$$|\widehat{y}_0(t)| \le \frac{\lambda_*^{-1} \widehat{M}}{1 - \lambda_*^{-1}} = \frac{\widehat{M}}{\lambda_* - 1} = \widehat{M}_*. \tag{44_0}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (42_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна за індукцією довести, що ряди

$$\widehat{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \widetilde{B} \widehat{y}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (43_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють системи рівнянь (42_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються оцінки

$$|\widehat{y}_i(t)| \leq \widehat{M}_* \, \theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (44_i)$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (41) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\widehat{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\widehat{y}(t)| \leq \frac{\widehat{M}_*}{1-\theta}$$

і є розв'язком системи рівнянь (40).

Зауваження 4. За допомогою заміни змінних

$$y(t) = z(t) + \widehat{y}(t)$$

дослідження структури множини неперервних і обмежених розв'язків системи рівнянь (40) можна звести до дослідження структури множини неперервних і обмежених розв'язків системи рівнянь (3), для якої має місце теорема 4.

Зауваження 5. Теорема 5 має місце також у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 0$.

Розглянемо тепер систему рівнянь (28), яка є природним узагальненням системи рівнянь (40) на випадок, коли $\widetilde{B}$ є деякою дійсною матрицею дійсної змінної t.

Для системи рівнянь (28) має місце наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) всі елементи матриці $\widetilde{B}(t)$ *і вектор-функції* $\widetilde{F}(t)$ *є неперервними й обмеженими при* $t \in R$ *функціями і* $\sup\limits_t |\widetilde{B}(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |\widetilde{F}(t)| = \widetilde{M}$;

3) $\dfrac{b^*}{\lambda_* - 1} = \overline{\Delta} < 1$.

Тоді система рівнянь (28) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок у вигляді ряду*

$$\widetilde{\widetilde{y}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_i(t), \qquad (45)$$

де $\widetilde{\widetilde{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ *— деякі неперервні й обмежені при* $t \in R$ *вектор-функції.*

Для доведення теореми достатньо, очевидно, спочатку показати, що послідовність систем рівнянь

$$\widetilde{\widetilde{y}}_0(t+1) = \Lambda\widetilde{\widetilde{y}}_0(t) + \widetilde{F}(t), \tag{46_0}$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_i(t+1) = \Lambda\widetilde{\widetilde{y}}_i(t) + \widetilde{B}(t)\widetilde{\widetilde{y}}_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{46_i}$$

має неперервні й обмежені при $t \in R$ розв'язки $\widetilde{\widetilde{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

Безпосередньою підстановкою в (46_i), $i = 0, 1, \ldots$, можна переконатися, що ряди

$$\widetilde{\widetilde{y}}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)}\widetilde{F}(t+j), \tag{47_0}$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)}\widetilde{B}(t+j)\widetilde{\widetilde{y}}_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{47_i}$$

є формальними розв'язками систем рівнянь (46_i), $i = 0, 1, \ldots$. Беручи до уваги умови теореми, легко показати, що вони рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних вектор-функцій, які задовольняють умови

$$|\widetilde{\widetilde{y}}_i(t)| \leq \widetilde{M}'\,\overline{\Delta}^i, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{48}$$

де $\widetilde{M}' = \dfrac{\widetilde{M}}{\lambda_* - 1}$. Отже, внаслідок (48) ряд (45) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\widetilde{\widetilde{y}}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (28) і задовольняє умову

$$|\widetilde{\widetilde{y}}(t)| \leq \frac{\widetilde{M}'}{1 - \overline{\Delta}}.$$

Теорему 6 доведено.

Виконуючи в (28) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \widetilde{\widetilde{y}}(t),$$

дослідження системи рівнянь (28) можна звести до дослідження системи рівнянь вигляду (34) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої вважатимемо виконаними умови 1, 2 теореми 6 і умову

3) $\dfrac{b^*}{\lambda_*^q - \lambda^*} = \Delta < \dfrac{1}{2}$.

Тоді, як і при доведенні теореми 4, можна показати, що довільний неперервний і обмежений при $t \leq 0$ розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (34) можна зобразити у вигляді ряду

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t),$$

де вектор-функції $z_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ визначаються за допомогою співвідношень

$$z_0(t) = \Lambda^t \omega(t),$$

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B}(t-j) z_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$\omega(t)$– деяка неперервна 1-періодична вектор-функція.

Зауваження 6. Теорема 6 має місце також у випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 0$.

3. Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t \geq 0$ розв'язків системи різницевих рівнянь (3) у випадку, коли власні числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умову $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$. Для цього виконаємо в (3) взаємно однозначну заміну змінних

$$y(t) = \Lambda^t z(t). \tag{49}$$

В результаті отримаємо систему рівнянь вигляду

$$z(t+1) = z(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} z(qt), \tag{50}$$

для якої має місце наступна лема.

Лема 5. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$;

2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, *де* $\widetilde{b} = |\widetilde{B}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (50) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, які залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Розв'язки системи рівнянь (50) шукатимемо у вигляді ряду

$$z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t), \tag{51}$$

де $z_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Підставляючи (51) в (50), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i(t+1) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} \sum_{i=0}^{\infty} z_i(qt).$$

Якщо вектор-функції $z_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$z_0(t+1) = z_0(t), \tag{52$_0$}$$

$$z_i(t+1) = z_i(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} z_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{52$_i$}$$

то, очевидно, ряд (51) буде формальним розв'язком системи рівнянь (50).

Оскільки множина неперервних при $t \geq 0$ розв'язків системи рівнянь (52_0) має вигляд

$$z_0(t) = \omega(t), \tag{53_0}$$

де $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, — довільні неперервні 1-періодичні функції, то, розглядаючи послідовно системи рівнянь (52_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведемо, що вони також мають неперервні при $t \geq 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$z_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(t+j+1)} \widetilde{B}\, \Lambda^{q(t+j)} z_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{53_i}$$

є формальними розв'язками систем рівнянь (52_i), $i = 1, 2, \ldots$, то для цього достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Для цього, в свою чергу, достатньо встановити, що при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|z_i(t)| \leq M\Delta^i(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t, \tag{54}$$

де $M = \max\limits_t |\,\omega(t)|$. Дійсно, оскільки $|z_0(t)| \leq M$, то, беручи до уваги (53_1), отримуємо

$$|z_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+j+1} |\widetilde{B}|\, |\Lambda|^{q(t+j)} |z_0(q(t+j))| \leq M\widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(t+j+1)} \lambda^{*q(t+j)} \leq$$

$$\leq M\widetilde{b}\, \lambda_*^{-1} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq M\, \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*(1-\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})}\, (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \leq$$

$$\leq M\, \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}}\, (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \leq M\, \Delta\, (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (54) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Враховуючи (53_{i+1}), (54), знаходимо

$$|z_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{t+j+1} |\widetilde{B}| |\Lambda|^{q(t+j)} |z_i(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(t+j+1)} \lambda^{*q(t+j)} M\Delta^i (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^{q(t+j)} \leq M\Delta^i \widetilde{b} (\lambda_*^{-1-q}\lambda^{*q+q^2})^t \lambda_*^{-1} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1-q}\lambda^{*q+q^2})^j \leq M\Delta^i \widetilde{b} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \lambda_*^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \leq$$

$$\leq M\Delta^i \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*(1-\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})}\, (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t \leq M\, \Delta^{i+1} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^t.$$

Отже, ми показали, що оцінка (54) має місце при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Цим самим ми довели, що ряди (53_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконується оцінка (54). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (51) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $z(t)$, яка задовольняє умову

$$|z(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Лему 5 доведено.

Беручи до уваги заміну змінних (49) і лему 5, отримуємо наступну теорему.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови 1, 2 леми 5. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних при* $t \geq 0$ *розв'язків* $y(t) = y(t, \omega(t))$, *які залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

4. Розглянемо тепер систему різницевих рівнянь (3) у випадку, коли $t \leq 0$ і власні числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умову $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Виконуючи в (3) взаємно однозначну заміну змінних

$$y(t) = \Lambda^t z(t), \tag{55}$$

систему рівнянь (3) можна звести до вигляду

$$z(t+1) = z(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} z(qt). \tag{56}$$

Для системи рівнянь (56) має місце наступна лема.

Лема 6. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, $0 < q < 1$;

2) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $\triangle = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*} < 1$, *де* $\widetilde{b} = |\widetilde{B}|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (56) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, які залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (56) має розв'язки у вигляді ряду (51). Дійсно, підставляючи (51) у систему рівнянь (56), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i(t+1) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} \sum_{i=0}^{\infty} z_i(qt).$$

Якщо вектор-функції $z_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють послідовності систем рівнянь

$$z_0(t+1) = z_0(t), \tag{57_0}$$

$$z_i(t+1) = z_i(t) + \Lambda^{-(t+1)} \widetilde{B} \Lambda^{qt} z_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{57_i}$$

то ряд (51) буде формальним розв'язком системи рівнянь (56).

Система рівнянь (57_0) має сім'ю неперервних при $t \le 0$ розв'язків вигляду

$$z_0(t) = \omega(t), \tag{58_0}$$

де $\omega(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — довільні неперервні 1-періодичні функції. Розглядаючи послідовно системи рівнянь (57_i), $i = 1, 2, \ldots,$ доведемо, що вони також мають неперервні при $t \le 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{-(t-j+1)} \widetilde{B} \Lambda^{q(t-j)} z_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{58_i}$$

є формальними розв'язками послідовності систем рівнянь (57_i), $i = 1, 2, \ldots,$ то для цього достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Для цього, в свою чергу, достатньо показати, що при всіх $i \ge 1$ виконується оцінка

$$|z_i(t)| \le M\Delta^i (\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t, \tag{59}$$

де $M = \max_t |\,\omega(t)|$.

Дійсно, оскільки $|z_0(t)| \le M$, то з огляду на (58_1) отримуємо

$$|z_1(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda^{-(t-j+1)}|\,|\widetilde{B}|\,|\Lambda^{q(t-j)}|\,|z_0(q(t-j))| \le M\widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{*-(t-j+1)} \lambda_*^{q(t-j)} \le$$

$$\le M\,\widetilde{b}(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t \lambda^{*-1} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* \lambda_*^{-q})^j \le M\,\lambda^{*-1} \frac{\widetilde{b}\lambda^*\lambda_*^{-q}}{1-\lambda^*\lambda_*^{-q}}\,(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t \le$$

$$\le M \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*}\,(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t = M\Delta(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (59) доведено для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (58_{i+1}), (59) маємо

$$|z_{i+1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda^{-(t-j+1)}|\,|\widetilde{B}|\,|\Lambda^{q(t-j)}|\,|z_i(q(t-j))| \le$$

$$\le \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{*-(t-j+1)} \lambda_*^{q(t-j)} M\Delta^i (\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^{q(t-j)} \le M\Delta^i \widetilde{b} (\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^{(1+q)t} \lambda^{*-1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^*\lambda_*^{-q})^{(1+q)j} \le M\Delta^i \widetilde{b} (\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t \lambda^{*-1} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^*\lambda_*^{-q})^j \le$$

$$\le M\Delta^i \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*^q - \lambda^*}\,(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t = M\Delta^{i+1}(\lambda^{*-1}\lambda_*^q)^t,$$

звідки випливає оцінка (59) при $i+1$. Цим ми показали, що оцінка (59) має місце при всіх $i \geq 1$, $t \leq 0$. Отже, ряди (58_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (51) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $z(t)$, яка задовольняє умову

$$|z(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Беручи до уваги заміну змінних (55) і лему 6, отримуємо наступну теорему.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови 1, 2 леми 6. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних при $t \leq 0$ розв'язків, які залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

5. Розглянемо тепер систему різницевих рівнянь (3) при наступних припущеннях:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$, $0 \leq m \leq n$, $q > 1$;

2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\Delta = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, де $\widetilde{b} = |\widetilde{B}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$.

Має місце наступна лема.

Лема 7. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, які залежать від m довільних неперервних 1-періодичних функцій.*

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді ряду (4). Для цього, очевидно, достатньо показати, що системи рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, мають неперервні обмежені при $t \geq 0$ розв'язки $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, які задовольняють оцінки

$$|y_i(t)| \leq \widetilde{M} \Delta^i \lambda^{*qt}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{60}$$

де $\widetilde{M}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, система рівнянь (5_0) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \Lambda^t \widetilde{\omega}(t), \tag{61_0}$$

де $\Lambda^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$, $\widetilde{\omega}(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_m(t), 0, \ldots, 0)$, $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, — довільні неперервні 1-періодичні функції. Тоді безпосередньою підстановкою в (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \widetilde{B}\, y_{i-1}(q(t+j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{61_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що ряди (61_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінки (60). Справді, оскільки

$|y_0(t)| \le \widetilde{M}\lambda^{*t}$, де $\widetilde{M} = \max_t |\widetilde{\omega}(t)|$, то згідно з (61_1) отримуємо

$$|y_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1}\, |\widetilde{B}|\, |y_0(q(t+j))| \le \widetilde{M}\widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} \lambda^{*q(t+j)} \le$$

$$\le \widetilde{M}\,\widetilde{b}\,\lambda_*^{-1}\lambda^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \le \widetilde{M} \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*(1-\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})}\, \lambda^{*qt} \le \widetilde{M} \frac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \lambda^{*qt} \le \widetilde{M}\Delta\lambda^{*qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (60) доведено для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (61_{i+1}), (60) одержуємо

$$|y_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1}\, |\widetilde{B}|\, |y_i(q(t+j))| \le \widetilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)}\, \widetilde{M}\, \Delta^i \lambda^{*q(q(t+j))} \le$$

$$\le \widetilde{M}\Delta^i\, \widetilde{b}\, \lambda_*^{-1}\, \lambda^{*q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\, \lambda^{*q^2})^j \le \widetilde{M}\Delta^i\, \widetilde{b}\, \lambda_*^{-1}\, \lambda^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})^j \le$$

$$\le \widetilde{M}\Delta^i\, \frac{\widetilde{b}}{\lambda_*(1-\lambda_*^{-1}\lambda^{*q})}\, \lambda^{*qt} \le \widetilde{M}\Delta^{i+1}\lambda^{*qt},$$

звідки випливає оцінка (60) при $i+1$. Цим ми довели, що ряди (61_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють оцінки (60). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (4) рівномірно збігається при $t \ge 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \le \frac{\widetilde{M}}{1-\Delta}.$$

Лему 7 доведено.

Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t \le 0$ розв'язків системи різницевих рівнянь (3) у випадку, коли виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$, $0 \le m \le n$, $q > 1$;

2) $\overline{\lambda}_*^q > \overline{\lambda}^*$, $\overline{\Delta} = \dfrac{\widetilde{b}}{\overline{\lambda}_*^q - \overline{\lambda}^*} < 1$, де $\widetilde{b} = |\widetilde{B}|$, $\overline{\lambda}^* = \max\{\lambda_j, j = m+1, \ldots, n\}$, $\overline{\lambda}_* = \min\{\lambda_j, j = m+1, \ldots, n\}$.

Має місце наступна лема.

Лема 8. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при* $t \le 0$ *розв'язків, які залежать від* $n-m$ *довільних неперервних 1-періодичних функцій* $\omega_j(t)$, $j = \overline{m+1,n}$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді ряду (4). Дійсно, якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками систем рівнянь (5_i), $i = 0, 1, \ldots$, то ряд (4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (5_0) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = \Lambda^t \,\overline{\omega}\,(t), \tag{62_0}$$

де $\Lambda^t = \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$, $\overline{\omega}(t) = (0, \ldots, 0, \omega_{m+1}(t), \ldots, \omega_n(t))$, $\omega_i(t)$, $i = m+1, \ldots, n$, — довільні неперервні 1-періодичні функції. Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведемо, що вони також мають неперервні при $t \leq 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B}\, y_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{62_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, то достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. Для цього, в свою чергу, достатньо показати, що при всіх $i \geq 1$ виконується оцінка

$$|y_i(t)| \leq \overline{M}\,\overline{\Delta}^i\,\overline{\lambda}_*^{qt}, \tag{63}$$

де $\overline{M} = \max\limits_t |\overline{\omega}(t)|$. Справді, оскільки $|y_0(t)| \leq \overline{M}\,\overline{\lambda}_*^t$, то внаслідок (62_1) отримуємо

$$\begin{aligned}
|y_1(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda|^{j-1}\, |\widetilde{B}|\, |y_0(q(t-j))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda}^{*(j-1)} |y_0(q(t-j))| \leq \\
&\leq \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda}^{*j-1} \overline{M}\,\overline{\lambda}_*^{q(t-j)} \leq \overline{M}\,\widetilde{b}\overline{\lambda}^{*-1} \overline{\lambda}_*^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{\lambda}^* \overline{\lambda}_*^{-q})^j \leq \overline{M}\, \frac{\widetilde{b}\,\overline{\lambda}_*^{-q}}{1 - \overline{\lambda}^* \overline{\lambda}_*^{-q}}\, \overline{\lambda}_*^{qt} \leq \\
&\leq \overline{M}\, \frac{\widetilde{b}}{\overline{\lambda}_*^q - \overline{\lambda}^*}\, \overline{\lambda}_*^{qt} \leq \overline{M}\,\overline{\Delta}\,\overline{\lambda}_*^{qt}.
\end{aligned}$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (63) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i{+}1$. Згідно з (62_{i+1}), (63) отримуємо

$$\begin{aligned}
|y_{i+1}(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda|^{j-1} |\widetilde{B}|\, |y_i(q(t-j))| \leq \widetilde{b} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda}^{*(j-1)}\, \overline{M}\,\overline{\Delta}^i\, \overline{\lambda}_*^{q(q(t-j))} \leq \\
&\leq \overline{M}\,\overline{\Delta}^i \widetilde{b}\,\overline{\lambda}^{*-1} \overline{\lambda}_*^{q^2 t} \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{\lambda}^* \overline{\lambda}_*^{-q^2})^j \leq \overline{M}\,\overline{\Delta}^i\, \widetilde{b}\,\overline{\lambda}^{*-1} \overline{\lambda}_*^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{\lambda}^* \overline{\lambda}_*^{-q})^j \leq \\
&\leq \overline{M}\,\overline{\Delta}^i\, \frac{\widetilde{b}\,\overline{\lambda}_*^{-q}}{1 - \overline{\lambda}^* \overline{\lambda}_*^{-q}}\, \overline{\lambda}_*^{qt} \leq \overline{M}\,\overline{\Delta}^{i+1}\, \overline{\lambda}_*^{qt},
\end{aligned}$$

звідки випливає оцінка (63) при $i+1$.

Отже, ми довели, що ряди (62_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінку (63). Цим ми довели, що ряд (4) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\overline{M}}{1 - \overline{\Delta}}.$$

Лему 8 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(qt) + F(t), \tag{64}$$

де $F : R \to R^n$. Вводячи позначення

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n),$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), \quad y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)), \quad y^2(t) = (y_{m+1}(t), \ldots, y_n(t)), \tag{65}$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad F(t) = (F^1(t), F^2(t)), \quad F^1(t) = (F_1(t), \ldots, F_m(t)),$$

$$F^2(t) = (F_{m+1}(t), \ldots, F_n(t)),$$

систему рівнянь (64) записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= \Lambda_1 y^1(t) + \widetilde{B}_{11} y^1(qt) + \widetilde{B}_{12} y^2(qt) + F^1(t), \\ y^2(t+1) &= \Lambda_2 y^2(t) + \widetilde{B}_{21} y^1(qt) + \widetilde{B}_{22} y^2(qt) + F^2(t). \end{aligned} \tag{66}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 9. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = m+1, \ldots, n$, $q > 0$;

2) $\theta = \max\left\{\dfrac{\widetilde{b}_1}{1 - \lambda^*}, \dfrac{\widetilde{b}_2}{\overline{\lambda}_* - 1}\right\} < 1$, *де* $\widetilde{b}_1 = |\widetilde{B}_{11}| + |\widetilde{B}_{12}|$, $\widetilde{b}_2 = |\widetilde{B}_{21}| + |\widetilde{B}_{22}|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\overline{\lambda}_* = \min\{\lambda_j, j = m+1, \ldots, n\}$;

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in R$ *функціями.*

Тоді система рівнянь (66) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок* $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$.

Доведення. Розв'язок системи рівнянь (66) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{67}$$

де $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R$ вектор-функції. Дійсно, підставляючи (67) в (66), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = \Lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \widetilde{B}_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + \widetilde{B}_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^1(t),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = \Lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \widetilde{B}_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + \widetilde{B}_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^2(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t)$ $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= \Lambda_1 y_0^1(t) + F^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= \Lambda_2 y_0^2(t) + F^2(t), \end{aligned} \tag{68_0}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= \Lambda_1 y_i^1(t) + \widetilde{B}_{11} y_{i-1}^1(qt) + \widetilde{B}_{12} y_{i-1}^2(qt), \\ y_i^2(t+1) &= \Lambda_2 y_i^2(t) + \widetilde{B}_{21} y_{i-1}^1(qt) + \widetilde{B}_{22} y_{i-1}^2(qt), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{68_i}$$

то ряди (67) є формальним розв'язком системи рівнянь (66).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_1^{j-1} F^1(t-j), \\ y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} F^2(t+j) \end{aligned} \tag{69_0}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють систему рівнянь (68_0) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_0^1(t)| &\le \frac{M^1}{1-\lambda^*}, \\ |y_0^2(t)| &\le \frac{M^2}{\overline{\lambda}_* - 1}, \end{aligned} \tag{70_0}$$

де $M^1 = \sup_t |F^1(t)|$, $M^2 = \sup_t |F^2(t)|$.

Згідно з (70_0) отримуємо оцінку

$$|y_0(t)| \le M' = \max\left\{\frac{M^1}{1-\lambda^*}, \frac{M^2}{\overline{\lambda}_* - 1}\right\}. \tag{71_0}$$

Враховуючи (68_i) та (70_0), можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_1^{j-1} \left(\widetilde{B}_{11} y_{i-1}^1(q(t-j)) + \widetilde{B}_{12} y_{i-1}^2(q(t-j)) \right),$$
$$i = 1, 2, \ldots, \qquad (69_i)$$
$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} \left(\widetilde{B}_{21} y_{i-1}^1(q(t+j)) + \widetilde{B}_{22} y_{i-1}^2(q(t+j)) \right),$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють системи рівнянь (68_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються оцінки

$$|y_i^1(t)| \le M'\theta^i, \quad |y_i^2(t)| \le M'\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (70_i)$$

Звідси безпосередньо випливає, що ряди (67) рівномірно збігаються при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (64) і задовольняє умову

$$|y(t)| \le \frac{M'}{1-\theta}.$$

Теорему 9 доведено.

Дослідимо тепер систему рівнянь (64) у випадку, коли $\widetilde{B} = \widetilde{B}(t)$, тобто розглянемо систему рівнянь

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B}(t) y(qt) + \widetilde{F}(t), \qquad (72)$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, q — деяка стала, $\widetilde{B}(t) : R \to R^{n^2}$, $\widetilde{F}(t) : R \to R^n$.

Ввівши позначення

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n),$$

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), \quad y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)), \quad y^2(t) = (y_{m+1}(t), \ldots, y_n(t)), \qquad (73)$$

$$\widetilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11}(t) & \widetilde{B}_{12}(t) \\ \widetilde{B}_{21}(t) & \widetilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F}(t) = (\widetilde{F}^1(t), \widetilde{F}^2(t)), \quad \widetilde{F}^1(t) = (\widetilde{F}_1(t), \ldots, \widetilde{F}_m(t)),$$

$$\widetilde{F}^2(t) = (\widetilde{F}_{m+1}(t), \ldots, \widetilde{F}_n(t)),$$

систему рівнянь (72) можна записати у вигляді

$$y^1(t+1) = \Lambda_1 y^1(t) + \widetilde{B}_{11}(t) y^1(qt) + \widetilde{B}_{12}(t) y^2(qt) + \widetilde{F}^1(t),$$
$$y^2(t+1) = \Lambda_2 y^2(t) + \widetilde{B}_{21}(t) y^1(qt) + \widetilde{B}_{22}(t) y^2(qt) + \widetilde{F}^2(t). \qquad (74)$$

Для системи рівнянь (74) має місце наступна теорема.

Теорема 10. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j,\ i = 1, \ldots, m,\ j = m+1, \ldots, n,\ q > 0$;

2) всі елементи матриці $\widetilde{B}(t)$ *і вектор-функції* $\widetilde{F}(t)$ *є неперервними й обмеженими при* $t \in R$ *функціями;*

3) $\Delta = \max\left\{\dfrac{\widetilde{b}_1^*}{1-\lambda^*}, \dfrac{\widetilde{b}_2^*}{\overline{\lambda}_* - 1}\right\} < 1$, *де* $\widetilde{b}_1^* = |\widetilde{B}_{11}(t)| + |\widetilde{B}_{12}(t)|,\ \widetilde{b}_2^* = |\widetilde{B}_{21}(t)| + |\widetilde{B}_{22}(t)|$.

Тоді система рівнянь (74) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок.*

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 9.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243–284.
2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations // Acta math. — 1930. — **54**. — P. 205–246.
3. *Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Ibid. — 1933. — **61**. — P. 1–38.
4. *Adams C. R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**, № 3. — P. 507–541.
5. *Carmichael R. D.* linear difference equations and their analytic solutions // Ibid. — 1911. — **12**. — P. 99–134.
6. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. — Warsawa, 1968.
7. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
8. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
9. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **407**, № 5 — С. 600–603.
10. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем линейных разностных уравнений в критическом случае // Дифференц. уравнения. — 2008. — № 3. — С. 421–423.

Одержано 25.06.08