

**ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ  
В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ  
С МЕМБРАНОЙ ИЛИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКОЙ  
НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ\***

**В. А. Троценко, Р. И. Богун**

*Ин-т математики НАН Украины*

*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*

*We propose a construction of approximate solutions to two-dimensional hydroelastic problems that describe free oscillations of an ideal fluid in a horizontally placed long cylindrical container with an arbitrary symmetric cross-section. The free surface of the fluid is covered with a plane membrane or an elastic plate. Using concrete examples, we analyze the obtained solutions and the results of the calculations of frequencies, and the form of oscillations of the mechanical system under consideration.*

*Запропоновано наближені розв'язки двовимірних задач гідропружності, що описують вільні коливання ідеальної рідини в горизонтально розміщеному довгому циліндричному контейнері з довільним симетричним поперечним перерізом, вільна поверхня якої покрита плоскою мембраною або пружною пластинкою. На конкретних прикладах наведено аналіз отриманих розв'язків та результати розрахунку частот і форм коливань механічної системи, що розглядається.*

**Введение.** Создание резервуаров для хранения больших масс жидкости, которые подвержены сейсмическим и ветровым воздействиям, связано с применением различного рода конструктивных устройств, ограничивающих ее подвижность. В качестве таких устройств могут быть использованы специальные мембраны или тонкие упругие пластинки, которые покрывают свободную поверхность жидкости. Аналогичные упругие элементы могут быть использованы и при решении проблемы транспортировки жидких грузов в цистернах железнодорожного транспорта и в большегрузных танкерах. При динамических расчетах таких гидроупругих систем в первую очередь необходимо знать спектр их собственных колебаний.

В работе [1] исследованы собственные колебания безынерционной мембраны или упругой пластинки, которые покрывают свободную поверхность жидкости, находящейся в прямом круговом цилиндре. При этом решение рассматриваемых задач гидроупругости было сведено к решению трансцендентных уравнений. Аналитическое решение двумерной задачи, описывающей взаимосвязанные колебания жидкости в прямоугольном канале и плоской инерционной мембраны, которая расположена на свободной поверхности жидкости, было предложено в работе [2]. Обобщение этих результатов на случай двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях рассмотрено в работе [3]. В работе [4] получено точное решение задачи о собственных колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре, на свободной поверхности которой расположена незакрепленная по своему контуру упругая мембрана или пластинка. Исследованию плоской задачи о малых угловых колебаниях относительно неподвижной

---

\* Выполнена при частичной поддержке Deutsche Forschung Gemeinschaft и НИР № 0107U002198.

точки сосуда, заполненного двумя тяжелыми несмешивающимися жидкостями, посвящена работа [5]. В предположении, что свободная поверхность жидкости закрыта упругой мембраной, доказано существование дискретного спектра собственных частот колебаний рассматриваемой системы.

Проблема взаимодействия жидкости и упругих элементов в виде гибкой круглой мембраны или тонкой упругой пластинки, помещенных в круговой цилиндрический бак, исследована в работе [6]. Определение частот собственных колебаний рассматриваемой системы сведено к решению бесконечных алгебраических систем. Проанализировано влияние физических и геометрических параметров механической системы на ее собственные колебания. Аналогичные результаты получены для бесконечно длинного канала прямоугольного сечения [7]. Исследованию нелинейных колебаний идеальной жидкости в бесконечно длинном прямоугольном контейнере конечной ширины, свободная поверхность которой покрыта гибкой мембраной, посвящена работа [8].

Во всех перечисленных выше работах рассматривались контейнеры, имеющие каноническую форму и плоские упругие мембраны (пластинки) на свободной поверхности жидкости. Разработке метода решения задачи гидроупругости, описывающей колебания жидкости в подвижных сосудах вращения, свободная поверхность которой ограничена предварительно деформированной гидростатическим давлением оболочкой из гиперупругого материала, посвящена работа [9]. Случай, когда свободная поверхность жидкости ограничена пологой мембраной, рассмотрен в работе [10].

Настоящая работа посвящена приближенному решению краевых задач гидроупругости, связанных с определением частот и форм собственных несимметричных колебаний идеальной и несжимаемой жидкости в длинном горизонтально расположенном цилиндрическом контейнере, свободная поверхность которой покрыта предварительно растянутой плоской мембраной или тонкой упругой пластинкой, которые жестко закреплены на стенках контейнера. При этом предполагается, что поперечное сечение емкости имеет произвольную симметричную форму. Частичное обращение оператора задачи осуществляется на основе специально введенной в рассмотрение последовательности неоднородных кривых задач Неймана или с использованием собственных функций спектральной краевой задачи с параметром в граничном условии. Нахождение приближенных решений введенных вспомогательных краевых задач осуществляется на основе их эквивалентных вариационных формулировок с последующим применением метода Третьяка. В результате исходная задача сводится к решению краевой задачи для интегродифференциального уравнения относительно прогибов упругих элементов на свободной поверхности жидкости. Решение последней задачи находится с помощью обобщенного метода Бубнова – Галеркина. Для случая, когда направляющая цилиндрической поверхности сосуда является частью окружности, приведены зависимости частот собственных колебаний рассматриваемых гидроупругих систем от безразмерных величин, характеризующих натяжение мембраны и изгибную жесткость пластинки.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим контейнер в форме горизонтально расположенного цилиндра длины  $l$  с произвольным симметричным поперечным сечением, который частично заполнен идеальной и несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Предполагается, что свободная поверхность жидкости покрыта прямоугольной упругой пластинкой (мембраной), которая жестко закреплена на стенках емкости. Ширину пластинки обозначим через  $2b$ . Введем декартову систему координат  $Oxyz$ , координатные плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$

которой совпадают с плоскостями симметрии емкости. При этом ось  $Oz$  совместим с линией пересечения этих плоскостей, направив ее противоположно направлению вектора земного тяготения  $\vec{g}$ . Начало системы координат поместим в плоскости пластинки, а ось  $Oy$  направим вдоль емкости.

В дальнейшем будем исследовать малые свободные несимметричные колебания механической системы „пластинка-жидкость“ в поперечной плоскости  $Oxz$  в предположении, что длина пластинки значительно превышает ее ширину  $l \gg 2b$ . Тогда за исключением узких участков пластинки, прилегающих к ее коротким краям, пластинка будет подвержена гидродинамическому давлению, которое не зависит от продольной координаты  $y$ , и будет изгибаться по цилиндрической поверхности. При этом достаточно исследовать изгиб вырезанной из пластинки полоски единичной ширины и длины  $2b$ .

Решение рассматриваемой задачи гидроупругости при сделанных допущениях упрощается тем, что при описании нормальных прогибов срединной поверхности пластинки можно перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В свою очередь, определение поля скоростей жидкости сводится к решению плоской задачи в области поперечного сечения емкости.

Для описания поведения жидкости в рассматриваемой емкости воспользуемся потенциалом смещений  $\chi(x, z, t)$ , который связан с потенциалом скоростей  $\chi'(x, z, t)$  соотношением

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Для потенциала малых смещений частиц жидкости справедливы те же соотношения, что и для потенциала скоростей:

$$\Delta \chi = 0, \quad \vec{v} = \nabla \chi, \quad (1.2)$$

где  $\vec{v}$  — вектор смещений частиц жидкости,  $\Delta$  и  $\nabla$  — операторы Лапласа и Гамильтона соответственно

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вектор смещения  $\vec{v}$  играет здесь ту же роль, что и вектор скорости частиц жидкости при описании кинематической картины движения жидкости с помощью потенциала скоростей.

В силу сделанных выше предположений потенциал смещений жидкости  $\chi(x, z, t)$  должен удовлетворять решению следующей краевой задачи:

$$\Delta \chi = 0, \quad (x, z) \in G^*, \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_{L^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_{L_0^*} = w, \quad \int_{-b}^b w(x, t) dx = 0,$$

где  $G^*$  — область поперечного сечения емкости, которая занята жидкостью в ее невозмущенном состоянии;  $L_0^*$  и  $L^*$  — линии пересечения плоскости  $Oxz$  с невозмущенной поверхностью пластинки и смачиваемой поверхностью сосуда соответственно;  $\vec{\nu}$  — орт

внешней нормали к границе области  $G^*$ ;  $w$  — нормальный прогиб срединной поверхности пластинки.

Последнее условие в формулах (1.3) вытекает из условия сохранения объема несжимаемой жидкости. Для несимметричных форм колебаний пластинки оно выполняется автоматически.

Поперечная динамическая нагрузка  $P(x, t)$ , которую испытывает пластинка со стороны жидкости, может быть определена с точностью до произвольной функции времени с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа – Коши по формуле

$$P(x, t) = -\rho \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)_{z=0} - g\rho w, \quad (1.4)$$

где  $g$  — модуль градиента поля массовых сил.

По характеру напряженно-деформированного состояния пластин, расположенных на свободной поверхности жидкости, будем различать два типа пластин. К первому типу относятся пластины, которые до прогиба имеют одинаковое во всех направлениях предварительное натяжение и не обладают изгибной жесткостью (абсолютно гибкая пластинка или мембрана). Второй тип пластин характеризуется тем, что для них без заметной погрешности можно считать срединный слой свободным от деформаций сжатия-растяжения и они сопротивляются только изгибным деформациям (абсолютно упругая пластина). Подобные допущения характерны для обычной теории изгиба балок.

В случае расположения на свободной поверхности жидкости мембраны ее прогибы  $w(x, t)$  в направлении нормали к недеформированной срединной поверхности должны определяться из решения уравнения

$$\rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(x, t), \quad x \in [-b, b], \quad (1.5)$$

при граничных условиях

$$w(b, t) = w(-b, t) = 0.$$

Здесь  $\rho_0$  и  $\delta_0$  — массовая плотность материала и толщина мембраны;  $T$  — растягивающее усилие в срединной поверхности мембраны;  $P(x, t)$  — давление на мембрану со стороны жидкости, определяемое формулой (1.4).

В свою очередь, нормальные прогибы  $w(x, t)$  упругой пластинки должны подчиняться следующим условиям:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, t), \quad x \in [-b, b], \quad (1.6)$$

$$w|_{x=\pm b} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm b} = 0,$$

где  $D = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки;  $\rho_0, \delta_0$  — плотность и толщина пластинки;  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Уравнения (1.3)–(1.6) вместе с начальными условиями на прогиб упругой пластинки однозначно определяют взаимосвязанные колебания пластинки и жидкости в емкости.

В дальнейшем будем рассматривать собственные несимметричные колебания рассматриваемой механической системы. В связи с этим отделим временную координату  $t$  по формулам

$$\chi = \Phi(x, z) \exp(i\omega t), \quad w = W(x) \exp(i\omega t), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (1.7)$$

Для того чтобы упростить в дальнейшем вычисления, целесообразно перейти к безразмерным величинам. Обозначим через  $R$  характерный линейный размер емкости. Введем в рассмотрение безразмерные величины, обозначенные черточкой сверху, которые связаны с соответствующими размерными величинами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (x, z) &= (\bar{x}, \bar{z})R, \quad W = \bar{W}R, \quad \Phi = \bar{\Phi}R^2, \\ \bar{\lambda}^2 &= \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\rho g R^2}, \quad \bar{a} = \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R}, \quad \bar{D} = \frac{D}{\rho g R^4}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

После применения формул (1.7) и перехода к безразмерным величинам по формулам (1.8) (черточки над безразмерными величинами в дальнейшем опускаем) для случая мембраны на свободной поверхности жидкости получим следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{1}{\bar{T}} W + \lambda^2 \left( \frac{a}{\bar{T}} W + \frac{1}{\bar{T}} \Phi(x, 0) \right) &= 0, \quad x \in [-b, b], \\ W(b) = W(-b) &= 0, \\ \Delta \Phi &= 0, \quad (x, z) \in G^*, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L^*} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L_0^*} = W. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если на свободной поверхности жидкости расположена абсолютно упругая пластинка, то соответствующая задача гидроупругости принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{1}{\bar{D}} W - \lambda^2 \left( \frac{a}{\bar{D}} W + \frac{1}{\bar{D}} \Phi(x, 0) \right) &= 0, \quad x \in [-b, b], \\ W \Big|_{x=\pm b} = \frac{dW}{dx} \Big|_{x=\pm b} &= 0, \\ \Delta \Phi &= 0, \quad (x, z) \in G^*, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L^*} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{L_0^*} = W. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Характерной особенностью сформулированных однородных задач на собственные значения является необходимость одновременного интегрирования уравнений для функции  $W(x)$ , заданной на отрезке  $[-b, b]$ , и уравнений для функции  $\Phi(x, z)$ , определенной в

двумерной области  $G^*$ . Функция  $\Phi(x, z)$  зависит от функции  $W(x)$  посредством граничного условия на части границы  $L_0^*$  области  $G^*$ , тогда как функция  $W(x)$  зависит от функции  $\Phi(x, z)$ , входящей в уравнение для  $W(x)$ .

**2. Построение приближенных решений задач гидроупругости с использованием решений последовательности неоднородных краевых задач.** Сведем решение спектральной задачи (1.9) к интегрированию однородного уравнения для функции  $W(x)$  при соответствующих для нее граничных условиях.

В силу того что искомые функции  $W(x)$  и  $\Phi(x, z)$  являются нечетными функциями по координате  $x$ , решение задачи (1.9) можно искать лишь в половине области  $G^*$ , добавив при этом граничные условия при  $x = 0$  :

$$W(0) = 0, \quad \Phi(0, z) = 0. \quad (2.1)$$

Предположим, что функция  $\Phi(x, 0)$ , входящая в уравнение для прогибов мембраны, найдена. Тогда для решения граничной задачи для функции  $W(x)$  можно в общем случае применить метод Бубнова – Галеркина, представив функцию  $W(x)$  в виде разложения по некоторой системе базисных функций, каждый элемент которой должен удовлетворять граничным условиям  $W(0) = W(b) = 0$ . Поскольку функция  $\Phi(x, 0)$  заведомо не равна нулю в точке  $x = b$ , такие разложения будут иметь достаточно медленную сходимость и, соответственно, определение коэффициентов этих разложений будет сопряжено с решением обобщенной алгебраической задачи на собственные значения большой размерности. Поэтому для нахождения функции  $W(x)$  в дальнейшем применим обобщенный метод Бубнова – Галеркина [11], в котором базисные функции выбираются на классе функций, не подчиненных граничным условиям исходной задачи. Такой подход, подобно известному методу улучшения сходимости рядов, получаемых при решении задачи, позволяет ускорить сходимость разложений для искомой функции.

Введем в рассмотрение следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_i}{dx^2} + k_i^2 f_i &= 0, \quad x \in [0, b], \\ f_i(0) &= 0, \quad \left. \frac{df_i}{dx} \right|_{x=b} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Собственные функции и соответствующие им собственные значения задачи (2.2) будут иметь вид

$$f_i(x) = \cos k_i(x + b), \quad k_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2b}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Известно [12], что такая система функций полна в пространстве функций с интегрируемым квадратом на отрезке  $[0, b]$  и удовлетворяет следующим условиям ортогональности:

$$\int_0^b f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \frac{b}{2} & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Представим функцию  $W(x)$  в виде

$$W(x) = C_1 f_0(x) + \sum_{m=1}^q X_m f_m(x), \quad (2.5)$$

где  $f_0(x) = x$ ,  $C_1$  и  $X_m$  — неопределенные постоянные.

Функция  $f_0(x)$  выбиралась таким образом, чтобы она была нечетной и удовлетворяла уравнению  $\frac{d^2 W}{dx^2} = 0$ .

В свою очередь, функцию  $\Phi(x, z)$  будем искать в виде

$$\Phi(x, z) = C_1 \Psi_0(x, z) + \sum_{m=1}^q X_m \Psi_m(x, z). \quad (2.6)$$

Здесь функции  $\Psi_0(x, z)$  и  $\Psi_m(x, z)$  являются решениями следующих неоднородных краевых задач для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_i &= 0, \quad (x, z) \in G, \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= f_i(x), \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \Psi_i(0, z) = 0, \\ i &= 0, 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $L_0 : \{0 \leq x \leq b, z = 0\}$ ;  $L^*$  — симметричная часть границы  $L$ ;  $G$  — замкнутая область, границами которой являются линии  $L_0$ ,  $L$  и  $x = 0$ .

Выбранное представление функции  $\Phi(x, z)$  в форме (2.6) обеспечивает ее гармоничность, выполнение условия неперетекания жидкости через границу  $L$  и граничного условия  $\frac{d\Phi}{d\nu} \Big|_{L_0} = W$  при любых значениях постоянных  $C_1$  и  $X_m$ .

Предположим далее, что решения последовательности неоднородных краевых задач (2.7) найдено. Подставим значение функции  $\Phi(x, z)$  при  $z = 0$  в первое уравнение (1.9). При этом для определения функции  $W(x)$  получим спектральную задачу

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{1}{T} W + \lambda^2 \left[ \frac{a}{T} W + \frac{1}{T} \left( C_1 \Psi_0 + \sum_{m=1}^q X_m \Psi_m \right) \Big|_{z=0} \right] = 0, \quad (2.8)$$

$$W(0) = W(b) = 0.$$

Выполнение граничного условия для функции  $W(x)$  в точке  $x = b$  (граничное условие в точке  $x = 0$  выполняется автоматически) достигается путем выбора постоянной  $C_1$  таким образом, чтобы все выражение (2.5) в целом ему удовлетворяло. В результате получим связь между коэффициентами  $X_m$  и  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^q X_m. \quad (2.9)$$

В свою очередь, постоянные  $X_m$  найдем из требования удовлетворения выражения для  $W(x)$  уравнению (2.8), применив при этом процедуру Бубнова – Галеркина. После подстановки выражения (2.5) в уравнение (2.8), умножения полученного выражения на  $f_n(x)$  и интегрирования его по границе  $L_0$ , учитывая при этом условия ортогональности (2.4), получаем алгебраическую систему

$$\left(k_n^2 + \frac{1}{T}\right) \frac{b}{2} X_n + \frac{I_n}{T} C_1 - \lambda^2 \left\{ (aI_n + \lambda_{0n}) \frac{1}{T} C_1 + \frac{ab}{2T} X_n + \frac{1}{T} \sum_{m=1}^q X_m \lambda_{mn} \right\} = 0, \quad (2.10)$$

$$n = 1, 2, \dots, q,$$

где

$$I_n = \int_{L_0} f_0 f_n ds = -\frac{1}{k_n^2}, \quad \lambda_{0n} = \int_{L_0} \Psi_0 f_n ds, \quad \lambda_{mn} = \int_{L_0} \Psi_m f_n ds.$$

Заметим, что матрица коэффициентов  $\lambda_{mn}$  является симметричной. Действительно,

$$\lambda_{mn} = \int_{L_0} \Psi_m f_n ds = \int_{L_0 \cup L} \Psi_m \frac{\partial \Psi_n}{\partial \nu} ds = \int_{L_0 \cup L} \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial \nu} ds = \lambda_{nm}.$$

При выводе этого соотношения была использована формула Грина

$$\int_G (\varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi) dG = \int_{L_0 \cup L} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) ds. \quad (2.11)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные непрерывные вместе с частными производными до второго порядка функции, которые заданы в области  $G$ .

Уравнения (2.9) и (2.10) образуют собою замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_1$  и  $X_n$ . Исключим из уравнений (2.10) коэффициент  $C_1$  с помощью соотношения (2.9). В результате получим конечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $X_n$ , которую можно представить в матричном виде

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X} = 0, \quad (2.12)$$

где  $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_q\}^T$ .

Элементы  $a_{nm}$  матрицы  $A$  и  $b_{nm}$  матрицы  $B$  определяются по формулам

$$a_{nn} = 1 + \frac{2I_n t_n}{b^2}, \quad a_{nm} = \frac{2I_n t_n}{b^2},$$

$$b_{nn} = \left[ a + \frac{2\lambda_{nn}}{b} + \frac{2(aI_n + \lambda_{0n})}{b^2} \right] t_n,$$

$$b_{nm} = \left[ \frac{\lambda_{mn}}{b} + \frac{aI_n + \lambda_{0n}}{b^2} \right] 2t_n, \quad t_n = \frac{1}{1 + k_n^2 T}, \quad n, m = 1, 2, \dots, q.$$



Из условия существования нетривиального решения однородной алгебраической системы (2.12) получаем уравнение для определения параметра  $\lambda^2$  :

$$\det(A - \lambda^2 B) = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, решение однородной задачи (1.9) сведено к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения (2.12) с несимметричными матрицами  $A$  и  $B$ , коэффициенты которых выражаются через интегральные характеристики от решений краевых задач (2.7). В силу неканоничности области  $G$  приближенные решения этих краевых задач будем находить на основе вариационного метода.

Рассмотрим задачу о стационарных значениях следующих квадратичных функционалов

$$I_k = \int_G \left[ \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \right)^2 \right] dG - 2 \int_{L_0} \Psi_k f_k ds, \quad k = 0, 1, \dots, q, \quad (2.14)$$

где  $f_k(x)$  — функции, входящие в выражение (2.5); функции  $\Psi_k(x, z)$  являются произвольными вместе со своими производными первого порядка в области  $G$  и удовлетворяющими граничному условию  $\Psi_k(0, z) = 0$ .

Используя обычные средства вариационного исчисления [13], нетрудно убедиться в том, что поставленные вариационные задачи эквивалентны неоднородным краевым задачам (2.7). Решения вариационных задач для функционалов (2.14) будем искать методом Третьяка, представив функции  $\Psi_k(x, z)$  в виде отрезков обобщенных рядов:

$$\Psi_k(x, z) = \sum_{l=1}^N a_i^{(k)} V_i(x, z). \quad (2.15)$$

Здесь  $a_i^{(k)}$  — произвольные постоянные;  $\{V_i(x, z)\}$  — система координатных функций, построенная на классе гармонических полиномов, элементы которой являются нечетными функциями по координате  $x$ . Для вычисления таких базисных функций и их частных производных можно воспользоваться следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} V_1 &= x, \quad V_2 = 2xz, \\ V_{i+1} &= (-1)^{i+1} 2zV_i + (x^2 + z^2) V_{i-1}, \\ \frac{\partial V_i}{\partial x} &= i \left[ \frac{1}{x} V_i + (-1)^{i-1} \frac{z}{x} V_{i-1} \right], \\ \frac{\partial V_i}{\partial z} &= (-1)^i i V_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким образом, класс допустимых функций ограничивается функциями вида (2.15), удовлетворяющими при всех значениях коэффициентов  $a_i^{(k)}$  двумерному уравнению Лапласа и граничному условию  $\Psi_k(0, z) = 0$ , но не удовлетворяющими остальным граничным условиям краевых задач (2.7), которые являются естественными граничными условиями для функционалов (2.14). Постоянные  $a_i^{(k)}$  найдем из условий, что функции (2.15)

должны доставлять минимумы функционалам (2.14). Подставляя выражение (2.15) в функционалы (2.14) и приравнявая производные  $\frac{\partial I_k}{\partial a_i^{(k)}}$  нулю, получаем

$$\int_G \left[ \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right] dG - \int_{L_0} f_k V_i ds = 0. \quad (2.17)$$

Преобразуем интеграл по области  $G$  с помощью формулы Грина

$$\int_G \nabla \Psi_k \nabla V_i dG = \int_{L_0 \cup L} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \nu} V_i ds - \int_G \Delta \Psi_k V_i dG. \quad (2.18)$$

Тогда алгебраические системы (2.17) относительно постоянных  $a_i^{(k)}$ , образующих векторы-столбцы  $\vec{a}^{(k)} = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_N^{(k)}\}$ , можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A} \vec{a}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (2.19)$$

где элементы  $\alpha_{ij}$  симметричной матрицы  $\mathcal{A}$  и элементы  $\gamma_i^{(k)}$  векторов-столбцов определяются по формулам

$$\alpha_{ij} = \int_{L_0 \cup L} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu} ds, \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_0} f_k V_i ds, \quad (2.20)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, нахождение решений краевых задач (2.7) на основе вариационного метода свелось к вычислению контурных интегралов (2.20) и к последующему решению  $q + 1$  неоднородной алгебраической системы с одинаковой матрицей  $\mathcal{A}$  и  $q + 1$  правой частью. Такие алгебраические задачи достаточно просто решаются с помощью стандартных программ, имеющихся в математическом обеспечении современных ПЭВМ.

Подставляя найденные решения в выражения для коэффициентов  $\lambda_{0n}$  и  $\lambda_{mn}$ , входящих в коэффициенты алгебраической системы (2.12), получаем

$$\lambda_{0n} = \sum_{i=1}^N a_i^{(0)} \int_0^b V_i(x, 0) f_n(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i^{(0)} \gamma_i^{(n)}, \quad (2.21)$$

$$\lambda_{mn} = \sum_{i=1}^N a_i^{(m)} \int_0^b V_i(x, 0) f_n(x) dx = \sum_{i=1}^N a_i^{(m)} \gamma_i^{(n)},$$

$$m, n = 1, 2, \dots, q.$$

Применим предложенный выше способ решения краевой задачи гидроупругости для случая, когда свободную поверхность жидкости покрывает упругая пластинка.

Решения однородной задачи (1.10) представим в виде

$$W(x) = C_1 f_0(x) + \sum_{m=1}^q X_m f_m(x), \quad (2.22)$$

$$\Phi(x, z) = C_1 \Psi_0(x, z) + \sum_{m=1}^q X_m \Psi_m(x, z),$$

где  $f_0(x) = x^3 - 3b^2x$ ,  $f_m(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots, q$ , — собственные функции задачи (2.2);  $\Psi_m(x, z)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, q$ , — решения неоднородных краевых задач (2.7) при выбранной функции  $f_0(x)$ .

Функция  $f_0(x)$  выбиралась на классе нечетных решений уравнения  $\frac{d^4 f_0(x)}{dx^4} = 0$ , которые подчинены граничному условию  $\left. \frac{df_0}{dx} \right|_{x=b} = 0$ .

Представленное решение краевой задачи (1.10) в форме (2.22) обеспечивает гармоничность функции  $\Phi(x, z)$  и выполнение для нее граничных условий  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{L_0} = W$  и  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_L = 0$ . Кроме того, для функции  $W(x)$  заведомо выполняется граничное условие  $\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=b} = 0$ . Оставшееся граничное условие для функции  $W(x)$  позволяет получить следующее соотношение между коэффициентами  $C_1$  и  $X_m$ :

$$C_1 = -\frac{1}{2b^3} \sum_{m=1}^q X_m. \quad (2.23)$$

Учитывая это соотношение и применяя описанную выше процедуру для решения уравнения относительно функции  $W(x)$ , приходим к системе алгебраических уравнений относительно постоянных  $X_m$  вида (2.12). Элементы  $a_{nm}$  и  $b_{nm}$  матриц  $A$  и  $B$  для случая упругой пластинки, расположенной на свободной поверхности жидкости, имеют вид

$$a_{nn} = 1 - \frac{I_n d_n}{b^4}, \quad a_{nm} = -\frac{I_n d_n}{b^4},$$

$$b_{nn} = \left( a + \frac{2}{b} \lambda_{nn} - \frac{\lambda_{0n} + a I_n}{b^4} \right) d_n, \quad b_{nm} = \left( \frac{2}{b} \lambda_{mn} - \frac{\lambda_{0n} + a I_n}{b^4} \right) d_n, \quad (2.24)$$

$$n, m = 1, 2, \dots, q,$$

где

$$d_n = \frac{1}{Dk_n^4 - 1}, \quad I_n = \int_0^b f_0 f_n dx = \frac{6}{k_n^4}, \quad \lambda_{0n} = \int_{L_0} \Psi_0 f_n ds.$$

Матрица коэффициентов  $\lambda_{mn}$  совпадает с соответствующей матрицей, когда на свободной поверхности жидкости расположена мембрана.

Таким образом, предложенный выше подход к решению задач гидроупругости позволяет разделить трудности интегрирования уравнений в частных производных в области  $G$ , связанных с определением потенциала смещений жидкости, и обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания упругих элементов под воздействием гидродинамической нагрузки и инерционных сил. При этом основной объем вычислений при расчете собственных частот и форм колебаний рассматриваемой механической системы связан с построением приближенных решений последовательности неоднородных краевых задач (2.7).

**3. Применение собственных функций краевой задачи с параметром в граничном условии для решения задач гидроупругости.** Для сведения граничных задач (1.9) и (1.10) к однородным задачам относительно функции  $W(x)$  введем в рассмотрение вспомогательную спектральную задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, z) \in G, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varkappa \varphi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \varphi(0, z) = 0,$$

где  $\vec{\nu}$  — орт внешней нормали к границам области  $G$ ,  $\varkappa$  — неизвестный параметр.

По физическому содержанию однородная задача (3.1) описывает свободные поперечные колебания идеальной жидкости в бесконечном канале. При этом квадрат собственной частоты колебаний жидкости  $\sigma^2$  связан с безразмерным параметром  $\varkappa$  соотношением

$$\varkappa = \frac{\sigma^2 R}{g}. \quad (3.2)$$

Обозначим собственные функции задачи (3.1) через  $\varphi_n(x, z)$ , а соответствующие им собственные значения, расположенные в порядке их возрастания, через  $\varkappa_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . В работе [14] показано, что система функций  $\varphi_n(x, z)$  обладает полнотой на части границы  $L_0$  области  $G$ , а спектр задачи (3.1) является дискретным с единственной точкой сгущения на бесконечности. Поскольку рассматриваемая задача является самосопряженной, для функций  $\varphi_n(x, z)$  и их производных по нормали к границе  $L_0$  справедливы следующие условия ортогональности:

$$\int_{L_0} \varphi_n \varphi_m ds = 0, \quad \int_{L_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} ds = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (3.3)$$

Для случая, когда область  $G$  является прямоугольной, решение задачи (3.1) может быть построено с помощью метода разделения переменных. Если граница области  $G$  имеет произвольный кусочно-гладкий контур, то для построения приближенного решения задачи (3.1) может быть использован вариационный метод.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$I = \int_G \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dG - \varkappa \int_{L_0} \varphi^2 ds. \quad (3.4)$$

Допустимыми функциями для функционала (3.4) будем считать любые функции, которые непрерывны вместе с производными первого порядка в замкнутой области  $G$  и удовлетворяют граничному условию

$$\varphi(0, z) = 0. \quad (3.5)$$

Первую вариацию функционала (3.4) с учетом формулы Грина (2.18) можно представить в виде

$$\delta I = -2 \int_G \Delta \varphi \delta \varphi dG + 2 \int_{L_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varkappa \varphi \right) \delta \varphi ds + 2 \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \delta \varphi ds. \quad (3.6)$$

Приравнявая  $\delta I$  нулю и учитывая свободное варьирование на границе  $L_0 \cup L$ , на основании основной леммы вариационного исчисления получаем краевую задачу для определения функции  $\varphi$ , эквивалентную задаче (3.1). Таким образом, собственные функции задачи (3.1) доставляют экстремальные значения для функционала (3.4) на классе допустимых функций из соответствующего энергетического пространства, удовлетворяющих граничному условию (3.5).

Сформулированную вариационную задачу будем решать с помощью приближенного метода Трефтца. Пусть известна система координатных функций  $\{\tilde{V}_i(x, z)\}$ , каждый элемент которой удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа. Решение  $\varphi(x, z)$  представим в виде

$$\varphi(x, z) = \sum_{i=1}^N b_i \tilde{V}_i(x, z), \quad (3.7)$$

где  $b_i$  — произвольные постоянные.

Подставляя выражение (3.7) в функционал (3.4) и приравнявая нулю производные от него по коэффициентам  $b_i$ , получаем следующую алгебраическую систему однородных уравнений:

$$(\mathcal{A} - \varkappa \mathcal{B}) \vec{b} = 0, \quad (3.8)$$

где  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}^T$ , а элементы  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  симметричных матриц  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно вычисляются по формулам

$$\alpha_{ij} = \int_{L_0 \cup L} \tilde{V}_i \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial \nu} ds, \quad \beta_{ij} = \int_{L_0} \tilde{V}_i \tilde{V}_j ds.$$

Из условия разрешимости системы (3.8) получаем уравнение для определения собственных значений  $\varkappa$ :

$$d(\varkappa) = \det |\alpha_{ij} - \varkappa \beta_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

Собственные значения алгебраической задачи (3.8) разместим в порядке их возрастания и обозначим их через  $\lambda_n$ . Соответствующие им собственные векторы обозначим через  $\vec{b}^{(n)}$ .

Система координатных функций должна обладать свойствами полноты и линейной независимости [15]. Эти условия обеспечивают сходимость метода и однозначное существование решений алгебраической системы (3.8). Однако выполнение этих требований является необходимым, но недостаточным условием для эффективного построения минимизирующей последовательности Трефтца. Дело в том, что при большом числе координатных функций необходимо решать алгебраические системы большой размерности. При этом ошибки округления чисел начинают играть существенную роль, с одной стороны, при вычислении коэффициентов алгебраической системы, а с другой — при решении самой системы уравнений [16]. Все это может приводить к потере устойчивости вычислительного процесса до достижения предельных значений решений. Таким образом, вопрос о выборе последовательности координатных функций не является тривиальным и успех использования вариационного метода при построении приближенного решения граничных задач в значительной мере зависит от этого выбора.

В качестве координатных функций  $\tilde{V}_i(x, z)$  можно использовать нечетные по координате  $x$  гармонические полиномы  $V_i(x, z)$ , обладающие полнотой и линейной независимостью в произвольной односвязной области с кусочно-гладкой границей. Построение таких координатных функций можно осуществить по формулам (2.16). Однако предварительные вычисления, проведенные с использованием этих координатных функций, показали, что они позволяют находить с достаточной степенью точности только низшую часть спектра задачи (3.1), которой явно недостаточно для использования их при решении рассматриваемых задач гидроупругости.

Основная причина невозможности при данном подходе нахождения высших собственных функций задачи (3.1) заключается в том, что эти функции локализованы в окрестности границы  $L_0$  и резко уменьшаются по экспоненциальному закону при удалении от этой границы внутрь области  $G$  [17]. При этом чем выше номер собственной функции, тем более резкое ее изменение в этом направлении. Аппроксимация таких решений с большой изменчивостью полиномиальным базисом  $\{V_i(x, z)\}_{i=1}^N$  требует выбора больших значений  $N$ , что и приводит к упомянутым выше проблемам решения задачи (3.1).

Разработке методов решения краевой задачи, описывающей колебания жидкости в сосудах, которые пригодны для вычисления и высших форм ее колебаний, посвящены работы [18–21].

Для сосуда, образованного поверхностью вращения, решение соответствующей спектральной задачи в работе [18] было предложено находить в следующей форме:

$$\varphi = \sum_{k=1}^N a_k W_k + \sum_{i=1}^p c_i \psi_i, \quad (3.10)$$

где  $\{W_k\}$  — система гармонических функций,  $\{\psi_i\}$  — система собственных функций базовой задачи.

За базовую задачу была выбрана спектральная задача, описывающая колебания жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с радиусом и глубиной жидкости, совпадающими с радиусом свободной поверхности и глубиной жидкости в исходной емкости. Решение

базовой спектральной задачи может быть получено в аналитическом виде. Таким образом, вторая сумма в представлении (3.10) отражает поверхностный характер волновых движений жидкости. Алгебраическая система относительно постоянных  $a_k$  и  $c_i$  была получена на основе проекционного метода при выполнении граничных условий для функции  $\varphi$  на смачиваемой поверхности сосуда и на свободной поверхности жидкости. Приведенные в работе [19] вычисления частот и форм собственных колебаний жидкости в некоторых сосудах вращения показали, что представление волновой функции  $\varphi$  в форме разложения (3.10) позволяет вычислять и более высокие формы колебаний жидкости.

Используя идею работы [18], представим функцию  $\varphi$  в рассматриваемом случае в виде разложения

$$\varphi(x, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(x, z) + \sum_{i=1}^p c_i \psi_i(x, z), \quad (3.11)$$

где  $\{V_k(x, z)\}$  — введенная выше система двумерных гармонических полиномов,  $\{\psi_i(x, z)\}$  — система собственных функций базовой задачи.

За базовую задачу выберем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad (x, z) \in Q, \\ \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z} - \beta_i \psi_i \right)_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= 0, \quad \psi_i(0, z) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $Q : \{0 \leq x \leq b; -h \leq z \leq 0\}$ .

Однородная краевая задача (3.12) описывает несимметричные колебания жидкости в канале в плоскости  $Oxz$ , поперечное сечение которого представляет собою прямоугольник высоты  $h$  и ширины  $2b$ . Точное решение этой задачи можно представить в виде

$$\psi_i(x, z) = \frac{\operatorname{ch}[k_i(z+h)]}{\operatorname{ch}(k_i h)} f_i(x), \quad f_i(x) = \cos[k_i(x+b)], \quad (3.13)$$

$$k_i = \frac{(2i-1)\pi}{2b}, \quad \beta_i = k_i \operatorname{th}(k_i h), \quad i = 1, 2, \dots$$

Отыскивая стационарные значения функционала (3.4) на классе допустимых функций (3.11), получаем алгебраическую систему (3.8), где

$$\vec{b} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, c_1, c_2, \dots, c_p\}.$$

Система координатных функций  $\{\tilde{V}_i\}$  при этом имеет структуру

$$\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^{N+p} = \{V_1, V_2, \dots, V_N, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p\}. \quad (3.14)$$

Последующие вычисления показали, что при соответствующем выборе количества  $N$  гармонических полиномов в разложении (3.11) координатные функции (3.14) позволяют с достаточной степенью точности вычислить первые  $p$  собственных значений и собственных функций краевой задачи (3.1). Соответствующие им собственные векторы алгебраической системы (3.8) обозначим следующим образом:

$$\vec{b}^{(i)} = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_N^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_p^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.15)$$

Следует заметить, что в представлении решения задачи (3.1) в форме (3.11) число  $N$  нельзя брать сколь угодно большим, поскольку первые функции  $\psi_i(x, z)$   $i = 1, 2, \dots, p_0$ , имеющие небольшой градиент в направлении оси  $Oz$ , могут быть линейно выражены через функции  $V_k(x, z)$ . Это приводит к вырождению матрицы  $A$ . Поэтому для выбора достаточного количества членов в первой сумме (3.11), обеспечивающих необходимую точность вычисления собственных функций краевой задачи (3.1), решение для функций выбиралось в виде

$$\varphi(x, z) = \sum_{k=1}^N a_k V_k(x, z) + \sum_{i=p_0}^p c_i \psi_i(x, z). \quad (3.16)$$

Числа  $N$ ,  $p$  и  $p_0$  выбираются таким образом, чтобы обеспечить нахождение необходимого количества собственных функций рассматриваемой спектральной задачи с заданной точностью.

Предполагая, что собственные функции вспомогательной задачи (3.1) найдены, переходим к построению приближенных решений задач гидроупругости (1.9) и (1.10). Разложим функцию  $\Phi(x, z)$  в ряд по этой системе функций:

$$\Phi(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \varphi_i(x, z). \quad (3.17)$$

Коэффициенты этого разложения найдем из граничного условия для функции  $\Phi(x, z)$  на контуре  $L_0$ . Подставляя в него выражение (3.17), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{L_0} = W. \quad (3.18)$$

Отсюда, с учетом условий ортогональности (3.3), коэффициенты  $B_i$  будут иметь вид

$$B_i = \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} W \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} ds, \quad N_i^2 = \int_{L_0} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right)^2 dS. \quad (3.19)$$

Ограничиваясь конечным числом членов  $M$  в разложении (3.17), решение исходной задачи гидроупругости для случая, когда свободная поверхность жидкости покрыта мембраной, можно свести к решению интегро-дифференциального уравнения относительной



функции  $W(x)$  :

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{1}{T}W + \lambda^2 \left[ \frac{a}{T}W + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} W \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \right) \varphi_i(x, 0) \right] = 0 \quad (3.20)$$

при граничных условиях

$$W(0) = W(b) = 0. \quad (3.21)$$

Для решения этой задачи применим обобщенный метод Бубнова–Галеркина, представив функцию  $W(x)$  в виде

$$W(x) = C_1x + \sum_{m=1}^q X_m f_m(x), \quad (3.22)$$

где  $C_1$  и  $X_m$  — неопределенные постоянные,  $\{f_m(x)\}$  — система функций (2.3).

Постоянную  $C_1$  выберем из условия, чтобы выражение (3.22) в целом удовлетворяло граничным условиям (3.21). Постоянные  $X_m$  найдем из требования удовлетворения функции  $W(x)$  уравнению (3.20), применив при этом процедуру Бубнова–Галеркина. В результате придем к алгебраической системе (2.12) относительно постоянных  $X_m$ . При этом коэффициенты  $\lambda_{0n}$  и  $\lambda_{mn}$ , входящие в элементы матрицы  $B$ , имеют вид

$$\lambda_{0n} = \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} x \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \int_{L_0} \varphi_i f_n ds \right\}, \quad (3.23)$$

$$\lambda_{mn} = \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} f_m \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} ds \int_{L_0} \varphi_i f_n ds \right\}, \quad N_i^2 = \varkappa_i^2 \int_{L_0} (\varphi_i)^2 ds,$$

$$n, m = 1, 2, \dots, q.$$

Остальные коэффициенты в уравнениях (2.12) остаются неизменными. Вычислим значения коэффициентов (3.23) с учетом выражений для функций  $\varphi_i(x, z)$  :

$$\varphi_i(x, z) = \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \tilde{V}_k(x, z), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.24)$$

где

$$N_0 = N + p - p_0 + 1,$$

$$\{b_k^{(i)}\}_{k=1}^{N_0} = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_N^{(i)}, c_{p_0}^{(i)}, c_{p_0+1}^{(i)}, \dots, c_p^{(i)}\},$$

$$\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} = \{V_1, V_2, \dots, V_N, \psi_{p_0}, \psi_{p_0+1}, \dots, \psi_p\}.$$

Принимая во внимание формулы для вычисления элементов  $\beta_{kl}$  матрицы  $B$  алгебраической системы (3.8) и выражения (3.24), коэффициенты  $\lambda_{0n}$  и  $\lambda_{mn}$  можно представить в виде

$$\lambda_{0n} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{N_i^2} \tau_i \tau_{in}, \quad \lambda_{mn} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{N_i^2} \varkappa_i \tau_{im} \tau_{in}, \quad (3.25)$$

где

$$\tau_i = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \beta_{1k}, \quad \tau_{in} = \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \int_{L_0} \tilde{V}_k f_n ds, \quad N_i^2 = \varkappa_i^2 \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{l=1}^{N_0} b_k^{(i)} b_l^{(i)} \beta_{kl}.$$

Для случая, когда на свободной поверхности жидкости расположена упругая пластинка, определение функции  $W(x)$  с учетом разложения (3.17) для функции  $\Phi(x, z)$  сводится к решению однородной краевой задачи

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{1}{D} W - \frac{\lambda^2}{D} \left[ aW + \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i^2} \int_{L_0} W \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} ds \right) \varphi_i(x, 0) \right] = 0, \quad (3.26)$$

$$W \Big|_{x=\pm b} = 0, \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=\pm b} = 0,$$

где  $W(x)$  — нечетная функция.

Как и выше, для решения задачи (3.26) применим обобщенный метод Бубнова–Галеркина, представив функцию  $W(x)$  в виде

$$W(x) = C_1 f_0(x) + \sum_{m=1}^q X_m f_m(x), \quad (3.27)$$

где  $f_0(x) = x^3 - 3b^2x$ ;  $f_m(x)$  — собственные функции спектральной задачи (2.2).

Как и в п. 2, для постоянных  $X_m$  и  $C_1$  получаем уравнения

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X} = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{2b^3} \sum_{m=1}^q X_m. \quad (3.28)$$

При этом элементы матриц  $A$  и  $B$  имеют вид (2.24). Входящие в них коэффициенты  $\lambda_{0n}$  и  $\lambda_{mn}$  вычисляются по формулам (3.25), в которых

$$\tau_i = \varkappa_i \int_{L_0} f_0(x) \varphi_i ds = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} \int_{L_0} \tilde{V}_k (x^3 - 3b^2x) ds = \varkappa_i \sum_{k=1}^{N_0} b_k^{(i)} (\beta_{3k} - 3b^2 \beta_{1k}). \quad (3.29)$$

Таким образом, расчет собственных колебаний рассматриваемой гидроупругой системы по предложенному алгоритму в основном связан с нахождением достаточного количества собственных функций краевой задачи (3.1) с последующим нахождением гидродинамических коэффициентов  $\lambda_{0n}$  и  $\lambda_{mn}$  и решением обобщенной алгебраической задачи (3.28).

**4. Анализ решений краевых задач и некоторые результаты расчетов.** Приведем некоторые результаты расчетов свободных колебаний рассматриваемых гидроупругих систем по предложенным выше алгоритмам. Будем рассматривать контейнер, поперечным сечением которого является окружность радиуса  $R$ . За характерный линейный размер емкости выберем радиус этой окружности, а глубину жидкости  $h$  положим равной  $R$ . В дальнейшем будем пользоваться безразмерными величинами, введенными по формулам (1.8).

Рассмотрим сначала случай, когда свободная поверхность жидкости покрыта предварительно растянутой мембраной. Проведем анализ приближенного решения однородной краевой задачи (1.9), полученного на основании частичного обращения оператора задачи с использованием последовательности решений неоднородных краевых задач Неймана для уравнения Лапласа в области поперечного сечения емкости, занятой жидкостью. Все приведенные ниже в таблицах данные были рассчитаны при следующих входных параметрах системы:  $a = 0,01$ ;  $T = 0,1$ .

В табл. 1 приведены пять первых собственных значений рассматриваемой спектральной задачи в зависимости от числа членов  $q$  в разложениях (2.5) и (2.6). При этом для нахождения решений краевых задач для функций  $\Psi_k(x, z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, q$ , на основе метода Трэфтца в разложениях (2.15) было положено  $N = 30$ .

Как видно из табл. 1, для вычисления первых двух частот собственных колебаний системы „жидкость-мембрана” с точностью до пяти значащих цифр достаточно положить  $q = 10$ . Для вычисления пятой частоты с этой же точностью необходимо положить  $q = 20$ . Достаточно быстрая сходимость собственных значений краевой задачи (1.9) объясняется, в первую очередь, применением обобщенного метода Бубнова – Галеркина при аппроксимации прогибов мембраны. Следует заметить, что в отличие от традиционного метода Бубнова – Галеркина применяемый метод дает для первой формы колебаний последовательность собственных значений, стремящуюся к своему пределу снизу. Характер сходимости для высших собственных значений по обоим методам совпадает.

Таблица 1

$q$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	1,7969	4,7580	8,5125	12,956	18,036
8	1,7972	4,7577	8,5048	12,918	17,879
10	1,7974	4,7577	8,5028	12,908	17,847
12	1,7974	4,7577	8,5021	12,904	17,836
14	1,7975	4,7577	8,5018	12,903	17,832
16	1,7975	4,7577	8,5017	12,902	17,830
18	1,7975	4,7577	8,5016	12,902	17,829
20	1,7975	4,7577	8,5016	12,902	17,828

Влияние количества членов  $N$  в разложениях (2.15) для функций  $\Psi_k(x, z)$  на точность вычисления первых пяти собственных значений краевой задачи (1.10) отражено в табл. 2. При получении данных табл. 2 в разложениях (2.5) и (2.6) для функций  $W(x)$  и  $\Phi(x, z)$  соответственно полагалось  $q = 20$ .

Таблица 2

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	1,7985	5,6731	24,347	36,744	47,463
10	1,7975	4,7606	9,8258	28,820	44,427
14	1,7975	4,7580	8,5112	14,357	33,471
18	1,7975	4,7578	8,5019	12,930	19,297
22	1,7975	4,7578	8,5017	12,902	17,881
26	1,7975	4,7577	8,5016	12,902	17,828
30	1,7975	4,7577	8,5016	12,902	17,828

Результаты табл. 2 свидетельствуют о том, что вычисление высших собственных значений рассматриваемой задачи гидроупругости сопровождается увеличением числа координатных функций при решении двумерных краевых задач для функций  $\Psi_k(x, z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, q$ , вариационным методом.

Перейдем к анализу приближенного решения краевой задачи (1.9), полученного с использованием собственных функций спектральной задачи с параметром в граничном условии.

Предварительно проведем сравнение собственных значений краевой задачи (3.1), вычисленных с помощью разложения (3.16) для искомым собственным функциям, учитывающего их асимптотическое поведение в окрестности границы  $L_0$ , и с использованием только гармонических координатных функций (2.16). В табл. 3 приведены результаты вычисления первых 10 собственных значений  $\lambda_n$  в зависимости от числа  $N$  в разложении (3.16) при  $p_0 = 5$ ;  $p = 10$  (верхние) и в разложении (3.7) по гармоническим полиномам (нижние).

Анализ результатов табл. 3 показывает, что представление решений краевой задачи (3.1) в виде разложения по гармоническим полиномам при  $N = 24$  позволяет вычислить с точностью до семи значащих цифр только первые четыре собственные значения  $\lambda_n$ , тогда как представление решений в форме (3.16) позволяет вычислить с этой же точностью первые десять их значений. При этом численные эксперименты показали, что количество рассчитываемых собственных значений и собственных функций рассматриваемой спектральной задачи должно совпадать с максимальным числом функций базовой задачи. Количество первых функций базовой задачи  $p_0$ , которые при этом необходимо отбросить, зависит от числа  $N$  гармонических полиномов в представлении решения в форме (3.16), обеспечивающих заданную точность вычислений и невырожденность матрицы  $A$  в обобщенной алгебраической задаче (3.8).

Таким образом, добавление к координатным функциям в виде гармонических полиномов координатных функций базовой задачи значительно улучшает скорость сходимости разложений для искомым функций и позволяет вычислить и высшие собственные функции и собственные значения спектральной задачи (3.1). Это позволяет использовать собственные функции дополнительно введенной в рассмотрение однородной краевой задачи с параметром в граничном условии для частичного обращения оператора гидроупругой задачи, сведя тем самым ее решение к решению интегро-дифференциального уравнения относительно прогиба упругой мембраны (пластинки) при соответствующих граничных условиях.

Таблица 3

$N$	18	20	22	24
$\kappa_1$	1,355727	1,355727	1,355727	1,355727
	1,355727	1,355727	1,355727	1,355727
$\kappa_2$	4,651055	4,651055	4,651055	4,651055
	4,651055	4,651055	4,651055	4,651055
$\kappa_3$	7,819865	7,819864	7,819864	7,819864
	7,819866	7,819866	7,819864	7,819864
$\kappa_4$	10,97177	10,97177	10,97177	10,97177
	10,97736	10,97200	10,97178	10,97177
$\kappa_5$	14,11887	14,11887	14,11887	14,11887
	14,61625	14,20766	14,12892	14,11962
$\kappa_6$	17,26389	17,26389	17,26389	17,26389
	24,21863	19,23859	17,79567	17,37679
$\kappa_7$	20,40783	20,40783	20,40783	20,40783
	175,5276	40,63418	25,87721	22,25621
$\kappa_8$	23,55113	23,55113	23,55113	23,55113
	30310,66	729,4451	84,77504	36,70099
$\kappa_9$	26,69403	26,69402	26,69402	26,69402
	–	253815,7	3805,523	234,5387
$\kappa_{10}$	29,83665	29,83664	29,83664	29,83664
	–	–	22862,07	23221,28

Влияние количества  $M$  собственных функций  $\varphi_n(x, z)$  в разложении (3.17) для потенциала смещений жидкости  $\Phi(x, z)$  на точность вычисления первых пяти безразмерных частот свободных колебаний жидкости в рассматриваемом контейнере с упругой мембраной на ее свободной поверхности отражено в табл. 4.

Таблица 4

$M$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
2	1,8027	5,0110	29,919	39,909	49,840
4	1,7979	4,7673	8,5761	13,697	48,709
6	1,7976	4,7596	8,5138	12,952	18,013
8	1,7975	4,7583	8,5053	12,916	17,869
10	1,7975	4,7580	8,5030	12,907	17,842
12	1,7975	4,7577	8,5016	12,902	17,828

При получении данных табл. 4 в разложении (3.16) для собственных функций  $\varphi_n(x, z)$  полагалось  $N = 28$ ;  $p_0 = 5$ ;  $p = 12$ , а количество  $q$  координатных функций  $f_m(x)$  в разложении (3.22) при решении интегро-дифференциального уравнения (3.20) на основе обобщенного метода Бубнова – Галеркина выбиралось равным 20. При этом использовались те же исходные данные задачи, что и при получении результатов, приведенных в табл. 1 и 2. Из сравнения результатов табл. 4 с результатами табл. 1 и 2 следует, что для определения первых пяти собственных значений краевой задачи (1.9) с точностью до пяти значащих цифр необходимо использовать 12 собственных функций спектральной задачи (3.1).

Таким образом, решения краевой задачи гидроупругости (1.9), полученные с помощью введенной последовательности неоднородных краевых задач Неймана и с использованием собственных функций однородной краевой задачи с параметром в граничном условии, подтверждают достоверность полученных численных результатов. При реализации обоих подходов на ПЭВМ несколько более предпочтительным является первый подход, поскольку второй связан с построением собственных функций спектральной задачи (3.1) и с решением возникающих при этом проблем вычислительного характера (невыврожденность матрицы  $A$ ).

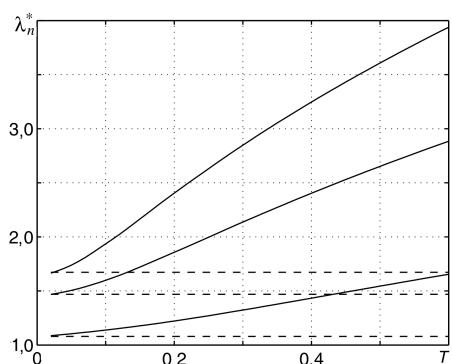


Рис. 1

На рис. 1 показана графическая зависимость первых трех безразмерных собственных значений рассматриваемой задачи от натяжения мембраны  $T$  при  $a = 0,01$  ( $T^* = \sqrt{T}$ ,  $\lambda_n^* = \sqrt{\lambda_n}$ ). Штриховые линии соответствуют первым трем частотам несимметричных поперечных колебаний жидкости в рассматриваемом контейнере со свободной поверхностью жидкости. При стремлении натяжения мембраны к нулю частоты системы „жидкость-мембрана” стремятся к соответствующим частотам жидкости в сосуде со свободной поверхностью. Как и следовало ожидать, увеличение натяжения мембраны приводит к значительному увеличению частот гидроупругой системы по сравнению с частотами жидкости в таком же сосуде со свободной поверхностью.

Первые три формы колебаний мембраны при  $a = 0,01$  и  $T = 0,1$  на замкнутом интервале  $[0, 1]$  изменения координаты  $x$  представлены на рис. 2. При этом нормировка

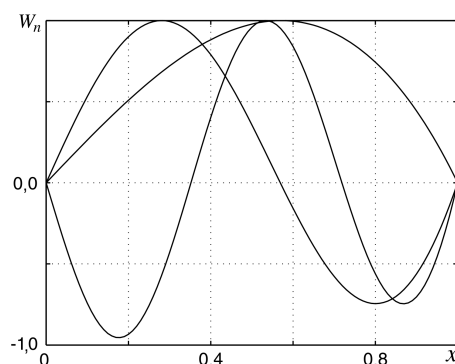


Рис. 2

форм колебаний выбиралась такой, при которой максимальный прогиб мембраны равен единице. На рассматриваемом интервале формы колебаний, соответствующие трем нижшим антисимметричным тонам, имеют соответственно одну, две и три узловые линии.

Перейдем теперь к анализу решений краевой задачи (1.10), описывающей связанные колебания жидкости и упругой пластинки, покрывающей ее свободную поверхность. Как и выше, будем рассматривать контейнер, имеющий форму длинного горизонтально расположенного кругового цилиндра, который наполовину заполнен жидкостью.

В табл. 5 приведены значения первых пяти собственных частоты системы „жидкость-пластинка” в зависимости от числа членов  $q$  в разложениях (2.22) для прогибов пластинки и для потенциала смещений жидкости. Безразмерные исходные параметры системы —  $a = 0,01$  и  $D = 0,02$ . При определении решений неоднородных краевых задач для функций  $\Psi_k(x, z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, q$ , с использованием метода Трэфтца в разложениях для этих функций (2.15) было положено  $N = 30$ , что обеспечило необходимую точность конечных вычислений.

Данные табл. 5 свидетельствуют о более быстрой сходимости последовательности частот по сравнению со случаем наличия мембраны на свободной поверхности жидкости. Так, для вычисления первых двух частот системы с точностью до шести значащих цифр достаточно положить  $q = 8$ . Объяснение этого факта связано с более высоким порядком уравнения для прогибов упругой пластинки.

Значения первых пяти частот колебаний системы в зависимости от числа  $N$  в разложениях (2.15) для функций  $\Psi_k(x, z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, q$ , представлены в табл. 6. При этом в разложениях (2.22) полагалось  $q = 18$ .

Таблица 5

$q$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	3,36349	15,4375	40,1166	79,6846	136,750
8	3,36349	15,4374	40,1083	79,5614	135,558
10	3,36349	15,4373	40,1075	79,5498	135,461
12	3,36349	15,4373	40,1074	79,5480	135,447
14	3,36349	15,4373	40,1073	79,5476	135,445
16	3,36349	15,4373	40,1073	79,5475	135,444
18	3,36349	15,4373	40,1073	79,5474	135,444

Таблица 6

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
6	3,38618	21,8068	115,168	217,688	348,756
10	3,36350	15,5676	54,4479	196,114	325,662
14	3,36349	15,4374	40,4428	101,442	298,634
18	3,36349	15,4373	40,1087	80,2507	163,743
22	3,36349	15,4373	40,1073	79,5529	136,739
26	3,36349	15,4373	40,1073	79,5475	135,453
30	3,36349	15,4373	40,1073	79,5474	135,444

Таким образом, для обеспечения точности вычисления первых пяти частот колебаний системы до шести значащих цифр необходимо полагать в расчетах  $N = 30$ .

При использовании собственных функций с параметром в граничном условии для приближенного решения однородной задачи (1.10), как и в случае наличия мембраны на свободной поверхности жидкости, для нахождения с принятой точностью первых пяти частот системы в разложениях (3.17) для потенциала смещений жидкости необходимо удерживать до 12 членов ряда.

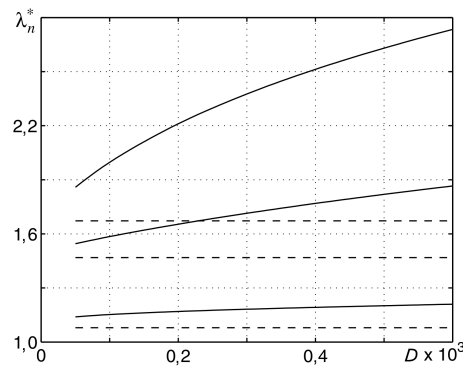


Рис. 3

На рис. 3 представлены первые три взаимосвязанные частоты колебаний жидкости и упругой пластинки в зависимости от безразмерной величины изгибной жесткости пластинки при фиксированном значении массового параметра  $a = 0,01 (\lambda_n^* = \sqrt{\lambda_n})$ . Штриховые линии соответствуют значениям частот несимметричных поперечных колебаний жидкости со свободной поверхностью в рассматриваемом контейнере. При стремлении изгибной жесткости пластинки к нулю частоты свободных колебаний системы стремятся к соответствующим частотам жидкости со свободной поверхностью. Увеличение изгибной жесткости пластинки сопровождается существенным увеличением частот связанных колебаний жидкости и упругой пластинки.



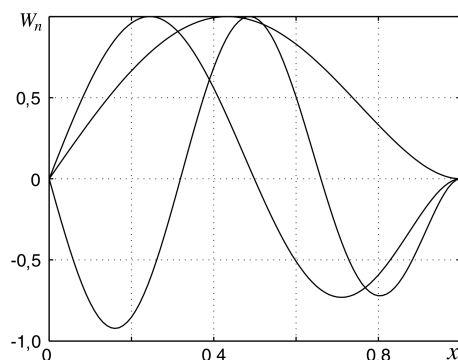


Рис. 4

Первые три формы антисимметричных колебаний упругой пластинки при безразмерных величинах  $a = 0,01$  и  $D = 0,02$  приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что при приближении  $x$  к единице первые производные от форм колебаний стремятся к нулю. Экстремальные точки форм колебаний упругой пластинки по сравнению с формами колебаний мембраны несколько смещены в сторону начала координат. Это смещение увеличивается с увеличением изгибной жесткости пластины.

**Заключение.** В работе разработаны две методики решения краевых задач, описывающих поперечные колебания жидкости в длинном горизонтально расположенном цилиндрическом контейнере с произвольным симметричным поперечным сечением, свободная поверхность которой покрыта мембраной или упругой пластинкой. Эти методики основываются на частичном обращении оператора задачи с использованием решений последовательности неоднородных краевых задач Неймана или собственных функций однородной краевой задачи с параметром в граничном условии для уравнения Лапласа в области поперечного сечения сосуда.

В результате исходная задача сводится к решению однородного интегро-дифференциального уравнения относительно прогибов мембраны или упругой пластинки при соответствующих граничных условиях. Построение приближенного решения последней задачи осуществляется с помощью обобщенного метода Бубнова – Галеркина, в котором координатные функции не подчинены главным граничным условиям задачи. На примере контейнера, имеющего форму кругового цилиндра, показана эффективность разработанных алгоритмов решения рассматриваемых задач гидроупругости.

Оценено влияние натяжения мембраны и изгибной жесткости пластинки на собственные частоты механической системы.

1. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строит. механика и расчет сооружений. — 1972. — № 1. — С. 49–54.
2. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. — 1995. — **31**, № 8. — С. 74–80.
3. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Прикл. гидромеханика. — 2003. — **5 (77)**, № 3. — С. 48–54.
4. Siekman J., Chang S. C. On the change of natural frequencies of a sloshing liquid by movable divides // Acta mech. — 1971. — **11**. — P. 73–86.

5. *Capodanno P.* Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids // *Eur. J. Mech. B.* — 1990. — **9**, № 3. — P. 289–306.
6. *Bauer H. F.* Hydroelastische schwingungen einer oberflächenspannungsstruktur in einem satellitenbehälter // *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* — 1981. — **5**, № 5. — S. 303–313.
7. *Bauer H. F.* Frequencies of a hydroelastic rectangular system // *Forsch. Ingenieur.* — 1993. — **59**, № 1, 2. — P. 18–22.
8. *Bauer H. F., Eidel W.* Non-linear hydroelastic vibrations in rectangular containers // *J. Sound and Vibrations.* — 1988. — **125**, № 1. — P. 93–114.
9. *Троценко В. А.* О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // *Изв. АН СССР Механика твердого тела.* — 1980. — № 6. — С. 166–177.
10. *Троценко В. А.* К исследованию колебаний жидкости в сосуде, свободная поверхность которой ограничена пологой мембраной // *Прикл. механика.* — 1978. — **14**, № 1. — С. 102–110.
11. *Шмаков В. П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова–Галеркина к решению краевых задач // *Инж. журн. Механика твердого тела.* — 1967. — № 5. — С. 129–136.
12. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — Т. 2. — 415 с.
13. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 695 с.
14. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 251 с.
15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1957. — 476 с.
16. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
17. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. — 928 с.
18. *Шмаков В. П.* К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // *Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.* — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. — С. 157–162.
19. *Шетухин В. Л., Шмаков В. П.* Приближенный метод решения задачи о колебаниях жидкости в полостях вращения // *Прикл. механика.* — 1983. — **19**, № 9. — С. 91–95.
20. *Луковский И. А.* Определение частот и форм колебаний жидкости в сосуде на основе вариационного принципа Бейтмена // *Аналитические методы исследования динамики сложных систем.* — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 3–11.
21. *Пишеничнов Г. И.* Свободные колебания жидкости в твердых сосудах // *Прикл. математика и механика.* — 1972. — **36**, вып. 2. — С. 248–254.

Получено 02.06.08