УДК 517.929

РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д. Я. Хусаинов, А. Ф. Иванов, И. В. Коварж

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01033, Киев, ул. Владимирская, 64

We prove the existence and uniqueness of a solution of boundary-value problem for a heat conduction equation with delay. A special function, the delayed exponent, is used to define solution.

Доведено існування та єдиність розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності із запізненням. Для побудови розв'язку використано спеціальну функцію „запізнілого експоненціала".

Введение. В последнее время возрос интерес к исследованиям дифференциальных уравнений с распределенными параметрами, содержащими запаздывание. Уравнения параболического типа с запаздывающим аргументом рассматриваются при анализе динамики численности популяции в экологических системах с неоднородной внешней средой, динамики численности рабочей силы с учетом миграции, динамики генераторов с запаздывающей обратной связью и др. [1, 2]. Следует отметить, что дифференциальные уравнения с сосредоточенными параметрами различного типа с последействием изучены достаточно полно [3 – 6]. В то же время работ по исследованию уравнений в частных производных с запаздыванием не так много [7].

1. Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t).$$

Ищется классическое решение первой краевой задачи, т. е. функция $u(x,t)$, определенная при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t, удовлетворяющая начальным $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$, и краевым $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, $t \ge 0$, условиям. Для нахождения решения часто используют метод разделения переменных (метод Фурье). Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ — решение однородного уравнения с нулевыми краевыми $u_1(0,t) \equiv 0$, $u_1(l,t) \equiv \equiv 0$, $t \ge 0$, и ненулевым начальным $u_1(x,0) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \dfrac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]$, $0 \le x \le l$, условиями; $u_2(x,t)$ — решение неоднородного уравнения с правой частью $F(x,t) = f(x,t) - \dot{\mu}_1(t) - \dfrac{x}{l}\left[\dot{\mu}_2(t) - \dot{\mu}_1(t)\right]$ с нулевыми краевыми $u_2(0,t) \equiv 0$, $u_2(l,t) \equiv 0$, $t \ge 0$, и нулевым начальным $u_2(x,0) = 0$, $0 \le x \le l$, условиями; $u_3(x,t)$ имеет вид $u_3(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$.

Решение $u_1(x,t)$ однородного уравнения ищется в виде произведения двух функций

$$u_1(x,t) = X(x)\,T(t).$$

В результате разделения переменных получают задачу на собственные числа и решение однородного уравнения представляется в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Эти же собственные функции используются для получения решения второй краевой задачи.

2. Решение одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием. Рассмотрим первую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием

$$u_t(x,t) = a_1^2 u_{xx}(x,t) + a_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t-\tau) + f(x,t), \tag{1}$$

определенного при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$. Начальное условие имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad -\tau \le t \le 0, \tag{2}$$

а краевые условия таковы:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge -\tau, \tag{3}$$

причем имеет место условие „согласования краевых и начального условий”

$$\varphi(0,t) = \mu_1(t), \quad \varphi(l,t) = \mu_2(t), \quad -\tau \le t \le 0.$$

Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t).$$

Здесь функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ определяются следующим образом:

$u_1(x,t)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c_1 u_1(x,t) + c_2 u_1(x,t-\tau),$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t) = 0$, $u_1(l,t) = 0$, $t \ge -\tau$, и ненулевым начальным $u_1(x,t) = \Phi(x,t)$, $\Phi(x,t) = \varphi(x,t) - \mu_1(t) - \dfrac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$, $0 \le x \le l$, $-\tau \le t \le 0$, условиями;

$u_2(x,t)$ — решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c_1 u_2(x,t) + c_2 u_2(x,t-\tau) + F(x,t),$$

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\right\} + c_1\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\right\} +$$
$$+ c_2\left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)]\right\}, \quad 0 \le x \le l,$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t) = 0, u_2(l,t) = 0, t \geq -\tau$, и нулевым начальным $u_2(x,t) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l, -\tau \leq t \leq 0$, условиями;

$u_3(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$.

2.1. Рассмотрим однородное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c_1 u_1(x,t) + c_2 u_1(x,t-\tau) \tag{4}$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t) = 0, u_1(l,t) = 0, t \geq -\tau$, и ненулевым начальным $u_1(x,t) = = \Phi(x,t), 0 \leq x \leq l, -\tau \leq t \leq 0$, условиями. Его решение будем искать методом Фурье, т. е. функцию $u_1(x,t)$ ищем в виде произведения

$$u_1(x,t) = X(x)\,T(t).$$

После подстановки в однородное уравнение получаем

$$X(x)\,T'(t) = a_1^2 X''(x)\,T(t) + a_2^2 X''(x) T(t-\tau) + c_1 X(x)\,T(t) + c_2 X(x)\,T(t-\tau).$$

Делим переменные

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t-\tau)}{a_1^2 T(t) + a_2^2 (t-\tau)} = -\lambda^2.$$

Тогда уравнение расщепляется на два:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + \left(\lambda^2 a_1^2 - c_1\right) T(t) + \left(\lambda^2 a_2^2 - c_2\right) T(t-\tau) = 0. \tag{5}$$

Поскольку граничные условия нулевые, для первого уравнения получаем нулевые краевые условия

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Ненулевым решение будет только при

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi\, n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и каждому собственному значению $\lambda_n = \dfrac{n\,\pi}{l}$ соответствует

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi\, n}{l}\, x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где A_n — произвольная постоянная. Подставляя полученные значения $\lambda_n = \dfrac{\pi\, n}{l}$ во второе уравнение (5), получаем дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{T}_n(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right] T_n(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] T_n(t-\tau), \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Определим начальные условия для каждого из уравнений (6) следующим образом. Разложим функцию $\Phi(x,t)$, $0 \le x \le l$, $-\tau \le t \le 0$, в ряд по собственным функциям первого уравнения, т. е. представим в виде

$$\Phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x, \quad \Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \Phi(\xi,t)\, \sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi.$$

Подставив значение $\Phi(x,t)$ и проинтегрировав, получим начальные условия для каждого из уравнений (6):

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad -\tau \le t \le 0,$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi,t)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi + \frac{2}{\pi\, n}\left[(-1)^n\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Найдем решение задачи Коши для каждого из уравнений (6) в аналитическом виде. Предварительно приведем ряд вспомогательных утверждений. Как показано в работе [8], решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с чистым запаздыванием

$$\dot{x}(t) = bx(t-\tau), \quad t \ge 0, \quad x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\tau \le t \le 0,$$

имеет вид

$$x(t) = e_\tau^{bt}\varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} e_\tau^{b(t-\tau-s)}\varphi'(s)\, ds,$$

где функция e_τ^{bt} представляет собой на промежутке $(k-1)\tau \le t < k\tau$ матричный полином k-го порядка, „склеенный” в узлах $t = k\tau$. Он был назван „запаздывающим” экспоненциалом.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau), \quad t \ge 0, \quad \tau > 0, \quad x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\tau \le t \le 0, \tag{7}$$

в котором $\varphi(t)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция, определяющая начальное условие.

Определение 1. *Запаздывающим экспоненциалом e_τ^{bt} назовем функцию*

$$e_\tau^{bt} = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau, \\ 1, & -\tau \le t < 0, \\ 1 + b\dfrac{t}{1!}, & 0 \le t < \tau, \\ 1 + b\dfrac{t}{1!} + b^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!}, & \tau \le t < 2\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 + b\,\dfrac{t}{1!} + \ldots + b^k\,\dfrac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{8}$$

В работе [8] доказано, что функция e_τ^{bt} является решением линейного однородного уравнения с чистым запаздыванием

$$\dot{x}(t) = bx(t-\tau), \quad t \geq 0,$$

удовлетворяющим единичному начальному условию $x(t) \equiv 1$, $-\tau \leq t \leq 0$.

Покажем, что решение задачи Коши для уравнения с запаздыванием (7) также может быть записано в интегральном виде с функцией аналогичного вида.

Лемма 1. *Функция*

$$x_0(t) = e^{at} e_\tau^{b_1}, \quad b_1 = e^{-a\tau} b, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $e_\tau^{b_1 t}$ *— запаздывающий экспоненциал, определенный в (8), является решением уравнения (7), удовлетворяющим начальному условию*

$$x_0(t) = e^{at}, \quad -\tau \leq t \leq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Выполнение для функции $x_0(t)$ условия (10) следует из определений для экспоненциалов e^{at} и $e_\tau^{b_1 t}$. Покажем, что при $t \geq 0$ функция $x_0(t)$ является решением уравнения (7). Продифференцировав (9), получим

$$\frac{d}{dt}\left(e^{at}\, e_\tau^{b_1 t}\right) = a\left(e^{at}\, e_\tau^{b_1 t}\right) + e^{at}\, b_1\, e_\tau^{b_1 (t-\tau)} = a\left(e^{at}\, e_\tau^{b_1 t}\right) + e^{at}\, e^{-a\tau}\, b\, e_\tau^{b_1 (t-\tau)} =$$

$$= a\left(e^{at}\, e_\tau^{b_1 t}\right) + b\left(e^{a(t-\tau)}\, e_\tau^{(t-\tau)}\right).$$

Учитывая обозначение (9), имеем

$$\frac{d}{dt}\, x_0(t) = a x_0(t) + b x_0(t-\tau),$$

т. е. получаем утверждение леммы 1.

Теорема 1. *Решение* $x(t)$ *уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию* $x(t) \equiv \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, *имеет вид*

$$x(t) = e^{a(t+\tau)}\, e_\tau^{b_1 t} \varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{a(t-s)} e_{-\tau}^{b_1 (t-\tau-s)} \left[\varphi'(s) - a\varphi(s)\right] ds. \tag{11}$$

Доказательство. Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t) \equiv \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, будем искать в виде

$$x(t) = x_0(t) c + \int\limits_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)\, y(s)\, ds. \tag{12}$$

Здесь c — неизвестная постоянная, $y(t)$ — неизвестная непрерывно дифференцируемая функция, $x_0(t)$ определена в (9). Поскольку, как следует из леммы 1, функция $x_0(t)$ является решением уравнения (7), при произвольных c и $y(t)$ выражение (12) также будет решением уравнения (7). Выберем c и $y(t)$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия, т. е. $x(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \le t \le 0$, или с учетом обозначений (12), при $-\tau \le t \le 0$ выполнялось

$$x_0(t)\, c + \int\limits_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)\, y(s)\, ds \equiv \varphi(t).$$

Положим $t = -\tau$. Как следует из определения запаздывающего экспоненциала, $x_0(-\tau) = e^{-a\tau}$, $x_0(-2\tau - s) = 0$, если $-\tau < s \le 0$, и $x_0(-2\tau - s) = e^{-a\tau}$, если $s = -\tau$. Поэтому $\varphi(-\tau) = e^{-a\tau}\, c$, откуда находим $c = e^{a\tau}\varphi(-\tau)$, и зависимость (12) принимает вид

$$x(t) = e^{a(t+\tau)} e_\tau^{b_1 t} \varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} y(s)\, ds.$$

Разобьем интеграл на промежутке $-\tau \le t \le 0$ на два. В результате получим

$$\varphi(t) = e^{a(t+\tau)}\varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, y(s)\, ds + \int\limits_{t}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, y(s)\, ds.$$

В первом интеграле $-\tau \le s \le t$, поэтому $-\tau \le t-\tau-s \le t$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} \equiv 1, \quad -\tau \le s \le t.$$

Во втором интеграле $t \le s \le 0$, поэтому $t-\tau \le t-\tau-s \le -\tau$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} = 0, \quad \text{если} \quad t < s \le 0, \quad \text{и} \quad e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} = 1, \quad \text{если} \quad s = t.$$

Таким образом на промежутке $-\tau \le t \le 0$ получаем

$$e^{a(t+\tau)}\varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}\, y(s)\, ds = \varphi(t). \tag{13}$$

Дифференцируя зависимость (13), имеем

$$a e^{a(t+\tau)}\varphi(-\tau) + a\int\limits_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}\, y(s)\, ds + e^{-a\tau}\, y(t) = \varphi'(t). \tag{14}$$

Решая систему уравнений (13), (14), находим

$$y(t) = e^{a\tau}\left[\varphi'(t) - a\varphi(t)\right].$$

Подставляя это выражение в (12), получаем утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Зависимость (11) можно записать в виде

$$x(t) = e^{a\tau}\left\{x_0(t)\varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)\left[\varphi'(s) - a\varphi(s)\right]\,ds\right\}.$$

Замечание 2. Если $a = 0$, т. е. уравнение (7) является уравнением с чистым запаздыванием, то получаем результаты, приведенные в [7]:

$$x(t) = e_\tau^{bt}\varphi(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} e_\tau^{b(t-\tau-s)}\varphi'(s)\,ds.$$

Вернемся к дифференциальным уравнениям (6) с соответствующими начальными условиями

$$\dot{T}_n(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right] T_n(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] T_n(t-\tau),$$

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \le t \le 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Введем обозначение

$$D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\tau}.$$

Как следует из зависимости (11), решения задачи Коши для каждого из уравнений (6) имеют вид

$$T_n(t) = e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t+\tau)} e_\tau^{D_n t}\Phi_n(-\tau) +$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[\Phi_n'(s) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\Phi_n(s)\right]\,ds. \tag{15}$$

Отсюда решение первой краевой задачи для уравнения (4)

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x \left\{ e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t+\tau)} e_\tau^{D_n t}\Phi_n(-\tau) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[\Phi_n'(s) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\Phi_n(s)\right]\,ds \right\}, \tag{16}$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\xi,t)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\,d\xi + \frac{2}{\pi\, n}\left[(-1)^n\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

2.2. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2} + c_1 u_2(x,t) + c_2 u_2(x,t-\tau) + F(x,t) \tag{17}$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t) = 0$, $u_2(l,t) = 0$, $t \geq -\tau$, и нулевым начальным $u_2(x,t) \equiv \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$, $-\tau \leq t \leq 0$, условиями. Решение ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin \frac{\pi n}{l} x$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

считая при этом t параметром. Представим функцию $F(x,t)$ также в виде ряда

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad F_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l F(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Поскольку

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\right\} + c_1 \left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\right\} +$$
$$+ c_2 \left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}[\mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)]\right\},$$

взяв интегралы, получим

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right] -$$
$$- \frac{2}{\pi n} c_1 \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t)\right] - \frac{2}{\pi n} c_2 \left[(-1)^n \mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau)\right], \quad t \geq 0.$$

Тогда каждая из функций $u_{2n}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, является решением соответствующего уравнения

$$\dot{u}_{2n}(t) = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] u_{2n}(t) + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] u_{2n}(t-\tau) + F_n(t) \tag{18}$$

с нулевым начальным условием $u_{2n}(t) \equiv 0$, $-\tau \leq t \leq 0$.

Вновь приведем некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau) + f(t), \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \tag{19}$$

с нулевым начальным условием.

Теорема 2. *Решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид*

$$\overline{x}(t) = \int\limits_0^t e^{a(t-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, f(s)\, ds, \quad t \geq 0, \quad b_1 = e^{-a\tau} b. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $x_0(t)$ — решение однородного уравнения (7), используя метод вариации произвольной постоянной и учитывая вид функции $x_0(t)$, решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19) будем искать в виде

$$\overline{x}(t) = \int\limits_0^t e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, c(s)\, ds, \tag{21}$$

где $c(s)$, $0 \leq s \leq t$, — неизвестная функция.

Продифференцировав выражение (21), получим

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t) = e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, c(s)\Big|_{s=t} + \int\limits_0^t \Big[a e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} + e^{a(t-\tau-s)}\, b_1\, e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)}\Big]\, c(s) ds.$$

Подставив зависимость (21) и полученное выражение производной в уравнение (19), запишем

$$e^{-a\tau} c(t) + \int\limits_0^t \Big[a e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)} + b\, e^{a(t-2\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)}\Big]\, c(s)\, ds =$$

$$= a\left[\int\limits_0^t e^{a(t-\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-\tau-s)}\, c(s)\, ds\right] + b\left[\int\limits_0^{t-\tau} e^{a(t-2\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)}\, c(s)\, ds\right] + f(t),$$

откуда

$$e^{-a\tau} c(t) + \int\limits_{t-\tau}^t b e^{a(t-2\tau-s)}\, e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)}\, c(s)\, ds = f(t).$$

А поскольку $e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)} = 0$ при $t-\tau < s \leq t$ и $e_\tau^{b_1(t-2\tau-s)} = 1$ при $s = t-\tau$, имеем $e^{-a\tau} c(t) = f(t)$ и $c(t) = e^{a\tau} f(t)$. Отсюда следует зависимость (20).

Использовав полученный результат, запишем решение задачи Коши с нулевым начальным условием для уравнений (18) в виде

$$u_{2n}(t) = \int\limits_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\, F_n(s)\, ds, \quad D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\tau}.$$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности с запаздывающим аргументом (17) с нулевыми краевыми и начальным условиями имеет вид

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} \, e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} F_n(s)\, ds \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right] -$$

$$- \frac{2}{\pi n} c_1 \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right] - \frac{2}{\pi n} c_2 \left[(-1)^n \mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau) \right], \quad t \geq 0.$$

Обьединяя все полученные зависимости, решение краевой задачи одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с запаздыванием записываем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t+\tau)} \, e_{\tau}^{D_n t} \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} \, e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\Phi_n'(s) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(s) \right] ds \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} \, e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)} F_n(s)\, ds \right] \sin \frac{\pi n}{l} x + \mu_1(t) + \frac{x}{l} \left[\mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad (22)$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi + \frac{2}{\pi n} \frac{d}{dt} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right] -$$

$$- \frac{2}{\pi n} c_1 \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right] - \frac{2}{\pi n} c_2 \left[(-1)^n \mu_2(t-\tau) - \mu_1(t-\tau) \right],$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi + \frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n \mu_2(t) - \mu_1(t) \right], \quad (23)$$

$$D_n = \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1 \right)^2 \right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\tau}.$$

Решение дифференциального уравнения с запаздыванием (17) представлено в виде формального ряда Фурье.

Сформулируем следующую теорему о сходимости решений краевой задачи (1) – (3).

Теорема 3. *Пусть функции $F(x,t)$ $\Phi(x,t)$ таковы, что коэффициенты Фурье $F_n(t)$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi'_n(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-2)} \left[\Phi'_n(s) + \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right] \Phi_n(s)\right] e^{-\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2 (t^*-s)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} \left|F_n(s)\right| e^{-\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2 (t^*+\tau)} = 0, \quad -\tau \le s \le 0, \quad (k-1)\tau \le t^* < k\tau.$$

Тогда функция $u(x,t)$, представленная рядом (22), имеет непрерывную производную по t, непрерывную производную второго порядка по x и является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному (2) и краевым (3) условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда по x (два раза) и по t (один раз), и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \le x \le l$, $-\tau \le t$.

Доказательство. Запишем ряд (22) в виде суммы трех рядов:

$$u(x,t) = S_1(x,t) + S_2(x,t) + S_3(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)],$$

где

$$S_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x, \quad S_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x, \quad S_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x,$$

$$A_n(t) = e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t+\tau)}\, e_\tau^{D_n t}\Phi_n(-\tau), \quad C_n(t) = \int_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)}\, e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} F_n(s)\, ds,$$

$$B_n(t) = \int_{-\tau}^0 e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)}\, e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} \left[\Phi'_n(s) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\, \Phi_n(s)\right] ds.$$

1. Рассмотрим $A_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты первого ряда $S_1(x,t)$. Для произвольного фиксированного момента времени $t^* : (k-1)\tau \le t^* < k\tau$ получаем

$$A_n(t^*) = e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}\, e_\tau^{D_n t^*}\, \Phi_n(-\tau) =$$
$$= e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t^*+\tau)} \left\{1 + D_n \frac{t^*}{1!} + D_n^2 \frac{(t^*-\tau)^2}{2!} + \ldots + D_n^k \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!}\right\} \Phi_n(-\tau).$$

После подстановки значения D_n запишем

$$A_n(t^*) = e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t^*+\tau)} \left\{1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\tau} \frac{t^*}{1!} + \right.$$
$$+ \left[\left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\tau}\right]^2 \frac{(t^*-\tau)^2}{2!} + \ldots$$
$$\left. \ldots + \left[\left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right]\tau}\right]^k \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!}\right\} \Phi_n(-\tau),$$

или

$$A_n(t^*) = \Big\{ e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t^* + \tau)} + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] t^*} \frac{t^*}{1!} +$$

$$+ \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^2 e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t^* - \tau)} \frac{(t^* - \tau)^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right][t^* - (k-1)\tau]} \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!} \Big\} \Phi_n(-\tau).$$

Поскольку, по условию, $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$, при выполнении неравенств

$$c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2 < 0, \quad c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 < -1$$

или при выполнении более „сильного” неравенства

$$n > \frac{l}{\pi} \max\left\{ \frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1 + c_2|}}{|a_2|} \right\}$$

будут выполняться соотношения

$$|A_n(t^*)| \leq |\Phi_n(-\tau)| e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right][t^* - (k-1)\tau]} \Bigg| \Big\{ 1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] \frac{t^*}{1!} +$$

$$+ \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^2 \frac{(t^* - \tau)^2}{2!} + \ldots + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^k \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!} \Big\} \Bigg| \leq$$

$$\leq |\Phi_n(-\tau)| e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right][t^* - (k-1)\tau]} \left| \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^k \right| \times$$

$$\times \left| 1 + \frac{t^*}{1!} + \frac{(t^* - \tau)^2}{2!} + \ldots + \frac{[t^* - (k-1)\tau]^k}{k!} \right|$$

и найдется непрерывная функция $N_1(t^*)$, при которой

$$|A_n(t^*)| \leq N_1(t^*) \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^{2k} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right][t^* - (k-1)\tau]} |\Phi_n(-\tau)|.$$

Таким образом, если для момента времени t^*, $(k-1)\tau \leq t^* < k\tau$,

$$\lim_{n \to \infty} n^{2k} e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2 [t^* - (k-1)\tau]} \Phi_n(-\tau) = 0,$$

то ряд

$$S_1(x, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t^*) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

сходится равномерно и абсолютно.

2. Рассмотрим $B_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты второго ряда $S_2(x, t)$. Для фиксированного момента времени t^*, $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, выполним замену $t^* - \tau - s = \xi$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$B_n(t^*) = \int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} e_\tau^{D_n \xi} \left[\Phi_n'(t-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \Phi_n(t-\tau-\xi)\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} e_\tau^{D_n \xi} \left[\Phi_n'(t-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \Phi_n(t-\tau-\xi)\right] d\xi.$$

Используя представление запаздывающего экспоненциала $e_\tau^{D_n \xi}$ на каждом из промежутков, получаем следующее:

$$B_n(t^*) = \int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right] \times$$

$$\times \left\{1 + D_n \frac{\xi}{1!} + D_n^2 \frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \ldots + D_n^{k-1} \frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\} d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right] \times$$

$$\times \left\{1 + D_n \frac{\xi}{1!} + D_n^2 \frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \ldots + D_n^{k} \frac{[\xi-(k-1)\tau]^{k}}{k!}\right\} d\xi.$$

Подставив значение D_n, получим

$$B_n(t^*) = \int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right] \Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right] \times$$

$$\times \left\{1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\tau} \frac{\xi}{1!} + \right.$$

$$+ \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\tau} \frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \ldots$$

$$\left. \ldots + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l} a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right]\tau} \frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\} d\xi +$$

$$+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\right.$$

$$+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{-k\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}d\xi,$$

или

$$B_n(t^*)=\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\right.$$

$$+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi+$$

$$+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\right.$$

$$+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}d\xi.$$

Как и в предыдущем случае, так как $t^*\geq(k-1)\tau$, при достаточно большом n выполняется неравенство

$$n>\frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|},\frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому, как следует из свойств определенных интегралов и второй теоремы о среднем, существуют s_1, s_2, $t^* - \tau \le s_1 \le (k-1)\tau$, $(k-1)\tau \le s_2 \le t^*$, такие, что

$$|B_n(t^*)| \le$$

$$\le \left| \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2 \right)^2 \right]^{k-1} \right| \left| (k\tau - t^*) \left[\Phi_n'(t^* - \tau - s_1) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(t^* - \tau - s_1) \right] \times \right.$$

$$\left. \times e^{-\left[\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 - c_1 \right][s_1 - (k-2)\tau]} \left\{ 1 + \frac{s_1}{1!} + \frac{(s_1 - \tau)^2}{2!} + \ldots + \frac{[s_1 - (k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!} \right\} \right| +$$

$$+ \left| \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2 \right)^2 \right]^{k} \right| \left| [t^* - (k-1)\tau] \left[\Phi_n'(t^* - \tau - s_2) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(t^* - \tau - s_2) \right] \times \right.$$

$$\left. \times\ e^{-\left[\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 - c_1 \right][s_2 - (k-1)\tau]} \left\{ 1 + \frac{s_2}{1!} + \frac{(s_2 - \tau)^2}{2!} + \ldots + \frac{[s_2 - (k-1)\tau]^{k}}{k!} \right\} \right|,$$

и найдутся непрерывные функции $N_2^1(t^*, s)$, $N_2^2(t^*, s)$, ограниченные при $(k-1)\tau \le t^* < < k\tau$, $-\tau \le t \le 0$, такие, что

$$|B_n(t^*)| \le$$

$$\le \left| \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2 \right)^2 \right]^{k-1} \right| \left| \left[\Phi_n'(t^* - \tau - s_1) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(t^* - \tau - s_1) \right] \times \right.$$

$$\left. \times\ e^{-\left[\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 - c_1 \right][s_1 - (k-2)\tau]} \right| \left| N_2^1(t^*, s_1) \right| +$$

$$+ \left| \left[c_2 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_2 \right)^2 \right]^{k} \right| \left| \left[\Phi_n'(t^* - \tau - s_2) - \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(t^* - \tau - s_2) \right] \times \right.$$

$$\left. \times\ e^{-\left[\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 - c_1 \right][s_2 - (k-1)\tau]} \right| \left| N_2^2(t^*, s_2) \right|.$$

Пусть функции $\Phi_n'(s)$, $\Phi_n(s)$ „не очень сильно растут” на промежутке $-\tau \le s \le 0$, т. е. для момента времени t^*, $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, и для произвольного s, $-\tau \le s \le 0$, выполняется

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-2)} \left[\Phi_n'(s) + \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 \right] \Phi_n(s) \right] e^{-\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1 \right)^2 (t^* - s)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} B_n(t^*) = 0$$

и ряд $S_2(x,t)$ также сходится равномерно и абсолютно.

3. Рассмотрим $C_n(t^*)$ $n = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты третьего ряда $S_3(x,t)$.

Для произвольного фиксированного момента времени t^*, $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, выполним замену $t-\tau-\xi = s$ и представим интеграл в виде суммы интегралов, в которых функция запаздывающего экспоненциала имеет одинаковую структуру

$$C_n(t^*) = \int\limits_{-\tau}^{t^*-\tau} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} e_\tau^{D_n\xi} F_n(t^*-\tau-\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} F_n(t^*-\tau-\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\tau} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[1 + D_n\frac{\xi}{1!}\right] F_n(t^*-\tau-\xi)\,d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)} \left[1 + D_n\frac{\xi}{1!} + D_n^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + D_n^{k-1}\frac{(\xi-(k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^*-\tau-\xi)\,d\xi.$$

Представляя значение D_n и используя теорему о среднем, можем показать, что существуют моменты времени $-\tau \le s_1 \le 0$, $0 \le s_2 \le \tau, \ldots, (k-2)\tau \le s_k \le t^*-\tau$ такие, что

$$C_n(t^*) \le \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_1)} F_n(t^*-\tau-s_1) +$$

$$+ \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_1)} \left[1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_2}{1!}\right] F_n(t^*-\tau-s_2) + \ldots$$

$$\ldots + \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_k)} \left[1 + \left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_k}{1!} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \tau\left[c_2 - \left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\tau\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]}\frac{[s_k-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^*-\tau-s_k),$$

и при достаточно большом n выполняется неравенство

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому найдется непрерывная ограниченная при $-\tau \le s \le t^*$ функция $N_3(t^*, s)$, для которой имеет место неравенство

$$|C_n(t^*)| \le \tau \max_{-\tau\le s\le t^*}|F_n(s)|\, N_3(t^*, s)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2(k-1)} e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right](t^*+\tau)}.$$

Пусть функции $F_n(s)$ „не очень сильно растут” на промежутке $-\tau \le s \le t^*$, т. е. выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)}\,|F_n(s)|\; e^{-\left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2 (t^*+\tau)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n(t^*) = 0$$

и ряд также сходится абсолютно и равномерно.

Таким образом, показано, что для абсолютной и равномерной сходимости рядов $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$ требуется лишь „не очень сильный рост” по индексу n коэффициентов Фурье $F_n(t)$, $-\tau \le s \le t^*$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi'_n(t)$, $-\tau \le t \le 0$. Сходимость производных функции $u(x,t)$ следует из свойств дифференцируемости запаздывающего экспоненциала.

Представление решения краевой задачи (1)–(3) в виде (22), (23) не всегда удобно, например, при оценивании влияния начальных, краевых и внешних воздействий. Нужно разделить эти факторы в отдельные слагаемые.

Перепишем (22) следующим образом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t+\tau)} e_{\tau}^{D_n t} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi,-\tau)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi + \frac{2}{\pi\, n}\left[(-1)^n \mu_2(-\tau) - \mu_1(-\tau)\right]\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x \left\{ \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n (t-\tau-s)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi'_s(\xi,s)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi + \frac{2}{\pi\, n}\left[(-1)^n \dot\mu_2(s) - \dot\mu_1(s)\right]\right] ds \right\} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x \int_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n (t-\tau-s)} \left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right] \times$$

$$\times \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi,s)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi + \frac{2}{\pi\, n}\left[(-1)^n \mu_2(s) - \mu_1(s)\right]\right] ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\, n}{l}\, x \int_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi\, n}{l}\, a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n (t-\tau-s)} \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,s)\sin\frac{\pi\, n}{l}\,\xi\, d\xi\, ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\dot\mu_2(s)-\dot\mu_1(s)\right]\,ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\frac{2}{\pi n}\,c_1\left[(-1)^n\dot\mu_2(s)-\dot\mu_1(s)\right]\,ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\times$$

$$\times\frac{2}{\pi n}c_2\left[(-1)^n\dot\mu_2(s-\tau)-\dot\mu_1(s-\tau)\right]\,ds+\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]. \qquad (24)$$

Разделим начальное и краевые воздействия:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,xe^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t+\tau)}e_\tau^{D_nt}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi,-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\,\xi\,d\xi\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\left\{\int\limits_{-\tau}^0 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi'_s(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\,\xi\,d\xi\right]ds\right\}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_{-\tau}^0 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\times$$

$$\times\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right]\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\,\xi\,d\xi\right]ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\,\xi\,d\xi\,ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,xe^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t+\tau)}e_\tau^{D_nt}\left[\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(-\tau)-\mu_1(-\tau)\right]\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\left\{\int\limits_{-\tau}^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\dot\mu_2(s)-\dot\mu_1(s)\right]\right]ds\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}\,x\int\limits_{-\tau}^0 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left(\frac{\pi n}{l}\,a_1\right)^2\left[\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\right]ds-$$

$$-c_1\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_{-\tau}^{t}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_{0}^{t}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\frac{2}{\pi n}c_2\left[(-1)^n\mu_2(s-\tau)-\mu_1(s-\tau)\right]+$$

$$+\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Вычислим интеграл

$$\int_{-\tau}^{t}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[(-1)^n\dot\mu_2(s)-\dot\mu_1(s)\right]ds=$$

$$=e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\Big|_{-\tau}^{t}+$$

$$+\int_{-\tau}^{t}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\times$$

$$\times\left[\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}+\right.$$

$$\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s-\tau)}e_\tau^{D_n(t-2\tau-s)}\right]ds=$$

$$=\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t+\tau)}e_\tau^{D_nt}\left[(-1)^n\mu_2(-\tau)-\mu_1(-\tau)\right]+$$

$$+\int_{-\tau}^{t}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\left[\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}+\right.$$

$$\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s-\tau)}e_\tau^{D_n(t-2\tau-s)}\right]ds.$$

После подстановки полученных выражений получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}xe^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t+\tau)}e_\tau^{D_nt}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi,-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-\tau}^{0}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)}e_\tau^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_s'(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)}\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+\left(a_1^2-a_2^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2\pi n}{l^2}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x-$$

$$-c_2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-\tau-s)} e_{\tau}^{D_n(t-2\tau-s)}\left[\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(s)-\mu_1(s)\right]\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$+2\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}.$$

Пусть

$$\widetilde{S}_1[\varphi]=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t+\tau)} e_{\tau}^{D_n t}\left[\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\xi,-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]+\right.$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\varphi'_s(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\varphi(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]ds\right\} \qquad (25)$$

— сумма, зависящая от начальных условий,

$$\widetilde{S}_2[f]=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t-s)} e_{\tau}^{D_n(t-\tau-s)}\left[\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(\xi,s)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (26)$$

— сумма, зависящая от внешних воздействий, и

$$\widetilde{S}_3[\mu_1, \mu_2] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ \left(a_1^2 - a_2^2\right) \frac{2\pi n}{l^2} \int\limits_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} \left[(-1)^n \mu_2(s) - \mu_1(s)\right] ds -$$

$$- \frac{2c_2}{\pi n} \int\limits_{t-\tau}^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-\tau-s)} e_\tau^{D_n(t-2\tau-s)} \left[(-1)^n \mu_2(s) - \mu_1(s)\right] ds \Bigg\} \sin \frac{\pi n}{l} x +$$

$$+ 2 \left\{ \mu_1(t) + \frac{x}{l} \left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right] \right\} \tag{27}$$

— сумма, зависящая от краевых условий.

Тогда решение краевой задачи можно представить в виде

$$u(x,t) = \widetilde{S}_1[\varphi] + \widetilde{S}_2[f] + \widetilde{S}_3[\mu_1, \mu_2].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(x,t)$, $f(x,t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ таковы, что на интервале $-\tau \le t \le t^*$, $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$, их коэффициенты Фурье*

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} s\, ds, \quad \dot{\varphi}_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \dot{\varphi}_t(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} s\, ds, \quad -\tau \le t \le 0,$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(s,t) \sin \frac{\pi n}{l} s\, ds$$

и

$$\mu_n(t) = \frac{2\pi n}{l^2} (a_1^2 - a_2^2) \int\limits_0^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} \left[(-1)^n \mu_2(s) - \mu_1(s)\right] ds -$$

$$- \frac{2c_2}{\pi n} \int\limits_{t-\tau}^t e^{\left[c_1 - \left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2\right](t-\tau-s)} e_\tau^{D_n(t-2\tau-s)} \left[(-1)^n \mu_2(s) - \mu_1(s)\right] ds, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} |\varphi_n(s)| e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2 (t^* + \tau)} = 0, \quad -\tau \le s \le 0, \quad (k-1)\tau \le t^* < k\tau,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} |f_n(t^*)| e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2 (t^* + \tau)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} |\mu_n(t^*)| e^{-\left(\frac{\pi n}{l} a_1\right)^2 (t^* + \tau)} = 0,$$

$$(k-1)\tau \le t^* < k\tau.$$

Тогда при $0 \leq t \leq t^*$ *решение первой краевой задачи (1) – (3) имеет вид*

$$u(x,t) = \widetilde{S}_1[\varphi] + \widetilde{S}_2[f] + \widetilde{S}_3[\mu_1, \mu_2],$$

где $\widetilde{S}_1[\varphi]$, $\widetilde{S}_2[f]$, $\widetilde{S}_3[\mu_1, \mu_2]$ *определены формулами (25) – (27).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Базыкин А. Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985. — 181 с.
2. *Жуков А. Б.* Пространственная и временная изменчивость процесса прироста леса // Докл. АН СССР. — 1978. — **239**, № 1. — С. 245 – 248.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
5. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
6. *Ткач Б. П.* Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. — 1967. — **3**, № 10. — С. 1796 – 1801.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи // Тр. Ин-та математики АН Украины. — 1985. — **13**. — 320 с.
8. *Хусаинов Д. Я., Шуклин Г. В.* Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием // Прикл. механика. — 2005. — **41**, № 2. — С. 118 – 130.

Получено 27.05.08