УДК 517.928

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

І. Г. Ключник

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: Klyuchnyk.I@mail.ru

Using a transformation matrix, a system of differential equations with a small parameter at some derivatives and a turning point is reduced to an integrable system. We also study properties of the transformation matrix.

С помощью матрицы преобразования система дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных с точкой поворота сводится к интегрируемой системе уравнений и изучаются свойства преобразующей матрицы.

Основними методами побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точкою звороту, в яких використовуються функції Ейрі, є методи Лангера [1, 2], Вазова [3, 4], Дородніцина [5], Цваана – Федорюка [6], регуляризації [7], зшивання і узгодження асимптотик [8 – 10]. У статті [11] з допомогою спеціальних функцій (функцій сплеску) побудовано асимптотичний розв'язок сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку з точкою звороту, а в [12] розроблено асимптотичний метод інтегрування системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами з точкою звороту в елементарних функціях.

Уперше в [13] розглянуто лінійну систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту, для якої запропоновано асимптотичний метод інтегрування. В даній статті одержано асимптотичний метод інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних більш загального вигляду, ніж у [13]. Для розглядуваної системи доведено існування і нескінченну диференційовність за дійсними змінними x, ε матричних функцій, які мають асимптотичні розвинення при $\varepsilon \to 0$ формальних рядів, одержаних запропонованим асимптотичним методом.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x,\varepsilon)y + A_1(x,\varepsilon)y_1, \\ \varepsilon y_1' &= B(x,\varepsilon)y_1 + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)y, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y \in R^p$, $y_1 \in R^2$, $A(x,\varepsilon)$, $A_1(x,\varepsilon)$, $B(x,\varepsilon)$, $B_1(x,\varepsilon)$ — голоморфні матриці за змінними x і ε при $|x| \le x_0$, ε — малий дійсний параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, і мають місце розвинення

$$A(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(x), \quad A_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_{n1}(x),$$
$$B(x,\varepsilon) = B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n(x), \quad B_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_{n1}(x) \tag{2}$$

при $\varepsilon \to 0$; $B_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Будемо вважати, що $\operatorname{tr} B_1(x) \equiv 0$, $\operatorname{tr} A_0(x) \equiv 0$. За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) зведемо до вигляду

$$u' = C_1(\varepsilon) u, \tag{3}$$

$$\varepsilon v' = B_0(x) v + \varepsilon D_1(\varepsilon) u, \tag{4}$$

де $\Phi(x,\varepsilon)$ — блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x,\varepsilon) & V_1(x,\varepsilon) \\ & \\ U_1(x,\varepsilon) & V(x,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

в якій $U(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$ — $(p \times p)$-вимірні матриці, $V_1(x,\varepsilon)$, $V(x,\varepsilon)$ — (2×2)-вимірні матриці; матриці $U(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$, $V(x,\varepsilon)$, $V_1(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями ε :

$$U(x,\varepsilon) = U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x), \quad U_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x),$$
$$V(x,\varepsilon) = V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x), \quad V_1(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x), \tag{6}$$
$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \varepsilon^n,$$

C_n, D_n — сталі матриці вигляду

$$C_n = \begin{pmatrix} c_{1n} & 0 \\ \dots & \dots \\ c_{pn} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ d_{n1} & \dots & d_{np} \end{pmatrix}.$$

Правильною є така лема.

Лема 1. *Нехай* $\varepsilon \in [-\varepsilon_0; \varepsilon_0]$. *Тоді виконуються нерівності*

$$|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^s| \geq |\varepsilon|^s, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Доведення. Якщо $s = 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, то нерівність (7) для всіх $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ рівносильна нерівності

$$(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l} \geq \varepsilon^{2l}. \tag{8}$$

При $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ нерівність (8) випливає з оцінки різниці

$$(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l} - \varepsilon^{2l} = \sum_{j=0}^{2l-1} C_{2l}^j \varepsilon^j (2\varepsilon_0)^{2l-j} \geq 0,$$

де C_{2l}^j — число сполук з $2l$ елементів по j. Якщо $\varepsilon \in [-\varepsilon_0; 0)$, то $\varepsilon + 2\varepsilon_0 > 0$. Тоді нерівність (8) при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0; 0)$ випливає з оцінки різниці

$$(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l} - \varepsilon^{2l} = (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l} - (-\varepsilon)^{2l} = 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \left(\sum_{j=0}^{2l-1} (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^j (-\varepsilon)^{2l-1-j} \right) \geq 0.$$

Якщо $s = 2l + 1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, то нерівність (7) для всіх $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{aligned} -(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l+1} &\leq \varepsilon^{2l+1}, \\ (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l+1} &\leq -|\varepsilon|^{2l+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Перша з нерівностей (9) при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, 0)$ випливає з оцінки різниці

$$(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l+1} + \varepsilon^{2l+1} = (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l+1} - (-\varepsilon)^{2l+1} = 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \left(\sum_{j=0}^{2l} (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^j (-\varepsilon)^{2l-j} \right) \geq 0,$$

а при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ — з того, що $(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{2l+1} > 0$, $-\varepsilon^{2l+1} < 0$. При $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ друга із нерівностей (9) є хибною.

Лему доведено.

Побудуємо відповідно $(p \times 2)$- і $(2 \times p)$-матричнозначні функції $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ у вигляді

$$C_1(\varepsilon) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_n e^{-n} \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\| \varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta}, \quad D_1(\varepsilon) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{A}_n e^{-n} \varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\| \varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta_1}, \tag{10}$$

де

$$\Delta = \begin{cases} \|\widetilde{B}_n\|, & \text{якщо} \quad \widetilde{B}_n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \widetilde{B}_n = 0, \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{cases} \|\widetilde{A}_n\|, & \text{якщо} \quad \widetilde{A}_n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \widetilde{A}_n = 0, \end{cases}$$

$\dfrac{\widetilde{B}_1}{\|\widetilde{B}_1\|} = 2C_1 e\varepsilon_0$, якщо $C_1 \neq 0$, і $\widetilde{B}_1 = 0$, якщо $C_1 = 0$; $\dfrac{\widetilde{A}_1}{\|\widetilde{A}_1\|} = 2D_1 e\varepsilon_0$, якщо $D_1 \neq 0$, і $\widetilde{A}_1 = 0$, якщо $D_1 = 0$;

$$\frac{\widetilde{B}_n}{\|\widetilde{B}_n\|} = 2\varepsilon_0 e^n (C_n + K_{1n}), \quad \frac{\widetilde{A}_n}{\|\widetilde{A}_n\|} = 2\varepsilon_0 e^n (D_n + K_{2n}) \tag{11}$$

відповідно у випадках, коли $C_n + K_{1n} \neq 0$ і $D_n + K_{2n} \neq 0$; якщо $C_n + K_{1n} = 0$, $D_n + K_{2n} = 0$, то відповідно $\widetilde{B}_n = 0$, $\widetilde{A}_n = 0$, $n \geq 2$, K_{1n}, K_{2n} — коефіцієнти при ε^n у розвиненні відповідно раціональних функцій

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{B_j} e^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta}, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\widetilde{A_j} e^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{A}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta_1} \tag{12}$$

за зростаючими степенями ε.

Правильною є наступна лема.

Лема 2. *Матричні ряди (10) є рівномірно збіжними при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Матричні функції $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ є нескінченно диференційовними і мають асимптотичні розвинення*

$$C_1(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad D_1(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_n, \quad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Доведення. Оцінимо елементи ряду (10) у випадку, коли матриця $\widetilde{B}_n \neq 0$. Використовуючи нерівність (7), при $s = 1$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ одержуємо оцінку норми

$$\left\| \frac{\widetilde{B}_n e^{-n}\varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} \right\| \leq e^{-n}|\varepsilon|^{n-1} \leq e^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

З нерівності (14) з урахуванням збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ випливає рівномірна збіжність ряду (10) при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Використовуючи формулу Лейбніца для к-ї похідної від добутку функцій, отримуємо

$$\left(\frac{\widetilde{B}_n e^{-n}\varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} \right)^{(k)} = \frac{\widetilde{B}_n e^{-n}}{\|\widetilde{B}_n\|} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j C_k^j j! n(n-1)\ldots(n-k+j+1)\varepsilon^{n-k+j}}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^{j+1}}, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Рівність (15) і нерівність (7) при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ дають змогу оцінити норму матриць

$$\left\| \left(\frac{\widetilde{B}_n e^{-n}\varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} \right)^{(k)} \right\| \leq f_k(n) e^{-n}|\varepsilon|^{n-k-1} \leq f_k(n) e^{-n}, \quad n \geq k+1, \tag{16}$$

де $f_k(n) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j j! n(n-1)\ldots(n-k+j+1)$ — многочлен к-го степеня відносно змінної n, який розвинемо за степенями n^j, $j = \overline{0,k}$, у вигляді

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f_k^{(j)}(0) n^j}{j!}; \tag{17}$$

$f_k^{(j)}(n)$ — j-та похідна від функції $f_k(n)$. Згідно з (16), (17) при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ матричний ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{B}_n e^{-n} \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} \right)^{(k)}$ мажорується збіжним числовим рядом

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{f_k^{(j)}(0) n^j e^{-n}}{j!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f_k^{(j)}(0)}{j!} \sum_{n=k+1}^{\infty} n^j e^{-n}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Звідси випливає існування к-ї похідної ($k = 1, 2, \ldots$) від функції $C_1(\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, яка визначена рівністю (10).

Розвинувши функцію вигляду (12) за степенями параметра ε, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n-1}{}' \frac{\widetilde{B}_j e^{-j} \varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} = \sum_{j=1}^{n-1}{}' \frac{\widetilde{B}_j e^{-j} \varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{2^{r+1} \varepsilon_0^{r+1}}, \tag{18}$$

$\sum'$ — сума ненульових елементів. Використавши (18), знайдемо явний вигляд матриці K_{1n}, означеної, як коефіцієнт при ε^n у розвиненні раціональної функції вигляду (12):

$$K_{1n} = \sum_{j=1}^{n-1}{}' \frac{(-1)^{n-j+1} \widetilde{B}_j e^{-j}}{\|\widetilde{B}_j\| 2^{n+1-j} \varepsilon_0^{n+1-j}}, \quad n \geq 2. \tag{19}$$

Використовуючи (19) і співвідношення (11), спрощуємо вираз

$$E_m(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \left(C_1(\varepsilon) - \sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r C_r \right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \left(C_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\widetilde{B}_j \varepsilon^j e^{-j}}{\|\widetilde{B}_j\| \varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_r e^{-r} \varepsilon^r}{\|\widetilde{B}_r\| \varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta} - \sum_{n=0}^{m} \varepsilon^n C_n \right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \left(\sum_{j=1}^{m}{}' \frac{\widetilde{B}_j e^{-j} \varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{2^{r+1} \varepsilon_0^{r+1}} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_r e^{-r} \varepsilon^r}{\|\widetilde{B}_r\| \varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta} - \sum_{n=1}^{m} \varepsilon^n C_n \right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \left(\frac{\widetilde{B}_1 \varepsilon e^{-1}}{2\|\widetilde{B}_1\| \varepsilon_0} - C_1 \varepsilon + \sum_{r=2}^{m}{}' \left(\frac{\widetilde{B}_r e^{-r}}{2\|\widetilde{B}_r\| \varepsilon_0} - C_r - K_{1r} \right) \varepsilon^r + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}{}' \frac{\widetilde{B}_j \varepsilon^j e^{-j}}{\|\widetilde{B}_j\|} \sum_{r=m-j+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_r e^{-r} \varepsilon^r}{\|\widetilde{B}_r\|\varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta} \Bigg) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}{}' \frac{\widetilde{B}_j e^{-j}}{\|\widetilde{B}_j\|} \sum_{r=m-j+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^{r+j-m}}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_r e^{-r} \varepsilon^{r-m}}{\|\widetilde{B}_r\|\varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

З останньої рівності маємо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|E_m(\varepsilon)\| = 0$. Тоді згідно з означенням асимптотичного розвинення [3] ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^n$ є асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ матричної функції $C_1(\varepsilon)$.

Лему доведено.

З (1), (3), (4) випливає, що матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C_1(\varepsilon) \\ \varepsilon D_1(\varepsilon) & B_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x,\varepsilon) & \varepsilon A_1(x,\varepsilon) \\ \varepsilon B_1(x,\varepsilon) & B(x,\varepsilon) \end{pmatrix} \Phi. \tag{20}$$

Підставляючи (5) в (20), переконуємося, що матриці $V(x,\varepsilon)$, $U(x,\varepsilon)$, $V_1(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$ задовольняють матричні диференціальні рівняння

$$\begin{gathered} U'(x,\varepsilon) + V_1(x,\varepsilon) D_1(\varepsilon) = A(x,\varepsilon) U(x,\varepsilon) + A_1(x,\varepsilon) U_1(x,\varepsilon), \\ \varepsilon V_1'(x,\varepsilon) + \varepsilon U(x,\varepsilon) C_1(\varepsilon) + V_1(x,\varepsilon) B_0(x) = \varepsilon A(x,\varepsilon) V_1(x,\varepsilon) + \varepsilon A_1(x,\varepsilon) V(x,\varepsilon), \\ \varepsilon U_1'(x,\varepsilon) + \varepsilon V(x,\varepsilon) D_1(\varepsilon) = \varepsilon B_1(x,\varepsilon) U(x,\varepsilon) + B(x,\varepsilon) U_1(x,\varepsilon), \\ \varepsilon V'(x,\varepsilon) + \varepsilon U_1(x,\varepsilon) C_1(\varepsilon) + V(x,\varepsilon) B_0(x) = \varepsilon B_1(x,\varepsilon) V_1(x,\varepsilon) + B(x,\varepsilon) V(x,\varepsilon). \end{gathered} \tag{21}$$

Підставляючи (2), (6) в (21), отримуємо систему рівнянь для коефіцієнтів розвинень (6) матричної функції $\Phi(x,\varepsilon)$:

$$U'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n'(x) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \right) D_1(\varepsilon) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(x) \right) \left(U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_{n1}(x) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}'(x) + \left(U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) \right) C_1(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} V_{n1}(x) B_0(x) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(x)\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x)\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_{n1}(x)\right) \left(V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x)\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U'_{n1}(x) + \left(V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)\varepsilon^n\right) D_1(\varepsilon) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_{n1}(x)\right) \left(U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x)\right) + \left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n(x)\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} U_{n1}(x)\right), \tag{22}$$

$$\varepsilon V'(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V'_n(x) + \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x)\right) C_1(\varepsilon) + V(x)B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) B_0(x) =$$

$$= \left(\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_{n1}(x)\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x)\right) + \left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n(x)\right) \left(V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x)\right).$$

Підставляючи (10) в (22) і прирівнюючи в одержаній рівності коефіцієнти при нульовому степені ε, одержуємо рівняння

$$U'(x) = A_0(x)U(x), \tag{23}$$

$$U(x)C_0 + V_{11}(x)B_0(x) = A_{01}(x)V(x), \tag{24}$$

$$V(x)D_0 = B_{01}(x)U(x) + B_0(x)U_{11}(x), \tag{25}$$

$$V(x)B_0(x) = B_0(x)V(x). \tag{26}$$

З рівнянь (23) і (26) знаходимо

$$U(x) = \Omega_0^x(A_0(x)), \quad V(x) = \alpha_0(x)I + \beta_0(x)B_0(x), \tag{27}$$

де $\Omega_0^x(A_0(x))$ — матрицант рівняння (23), $\alpha_0(x)$ і $\beta_0(x)$ — довільні голоморфні в області $|x| \leq x_0$ функції, I — одинична матриця.

Для визначення $\alpha_0(x)$ і $\beta_0(x)$ використаємо систему рівнянь, яку одержуємо з (22) і (10), прирівнюючи в ній коефіцієнти при першому степені параметра ε :

$$U'_1(x) + V_{11}(x)D_0 = A_0(x)U_1(x) + A_1(x)U(x) + A_{01}(x)U_{11}(x), \tag{28}$$

$$V'_{11}(x) + U(x)C_1 + U_1(x)C_0 + V_{21}(x)B_0(x) =$$

$$= A_0(x)V_{11}(x) + A_{01}(x)V_1(x) + A_{11}(x)V(x), \tag{29}$$

$$U_{11}'(x) + V_1(x)D_0 + V(x)D_1 = B_{01}(x)U_1(x) + \\ + B_{11}(x)U(x) + B_1(x)U_{11}(x) + B_0(x)U_{21}(x), \qquad (30)$$

$$V'(x) + V_1(x)B_0 = B_1(x)V(x) + B_0(x)V_1(x). \qquad (31)$$

Для того щоб рівняння (31) мало розв'язок, необхідно і достатньо виконання умов

$$\operatorname{tr}(B_1(x)V(x) - V'(x)) \equiv 0,$$

$$\operatorname{tr}(B_1(x)V(x)B_0(x) - V'(x)B_0(x)) \equiv 0.$$

Підставивши в ці умови замість $V'(x)$ і $V(x)$ її вигляд з (27) і врахувавши, що $\operatorname{tr} B_1(x) \equiv 0$, одержимо систему рівнянь для функцій $\alpha_0(x)$ і $\beta_0(x)$ вигляду

$$2\alpha_0' = \beta_0(x)b_1(x), \quad 2x\beta_0' = \alpha_0(x)b_1(x) - \beta_0(x), \qquad (32)$$

де

$$b_1(x) = \operatorname{tr}(B_1(x)B_0(x)). \qquad (33)$$

Система (32) має ненульові голоморфні в області $|x| \le x_0$ розв'язки, які залежать від значення $\alpha_0(0)$. Покладемо $\alpha_0(0) = 1$ і визначимо однозначно потрібний нам розв'язок системи рівнянь (32), (33):

$$\alpha_0 = \alpha_0(x), \quad \beta_0 = \beta_0(x). \qquad (34)$$

Підставляючи (34), (27) у рівняння (24), (25), одержуємо рівняння для визначення матриць $C_0, D_0, V_{11}(x), U_{11}(x)$. Помноживши (24) справа на $B_0(x)$, а (25) зліва на $B_0(x)$, отримаємо рівняння

$$U(x)C_0B_0(x) + xV_{11}(x) = A_{01}(x)V(x)B_0(x), \qquad (35)$$

$$B_0(x)V(x)D_0 = B_0(x)B_{01}(x)U(x) + xU_{11}(x). \qquad (36)$$

При $x = 0$ з (35), (36) одержимо рівняння для визначення матриць C_0, D_0 :

$$U(0)C_0B_0(0) = A_{01}(0)V(0)B_0(0), \qquad (37)$$

$$B_0(0)V(0)D_0 = B_0(0)B_{01}(0)U(0). \qquad (38)$$

Звідси випливає, що якщо записати відповідні матриці рівності (37) покоординатно $C_0 = \begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} \\ \dots & \dots \\ c_{p0} & c_{p1} \end{pmatrix}$, $A_{01}(0)V(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix}$, то значення

$$c_{10} = a_{11}, \dots, c_{p0} = a_{p1},$$

$$c_{11} = 0, \ldots, c_{p1} = 0$$

завжди будуть задовольняти рівняння (37). Таким чином, вибираючи C_0 у вигляді $C_0 = \begin{pmatrix} c_{10} & 0 \\ \ldots & \ldots \\ c_{p0} & 0 \end{pmatrix}$, для визначення матриці $V_{11}(x)$ з (35) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x) = F(x), \tag{39}$$

де $F(x)$ — відома матриця вигляду $F(x) = A_{01}(x)V(x)B_0(x) - U(x)C_0B_0(x)$. Згідно з вибором C_0 $F(0) = 0$. Тоді

$$F(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}F(tx)\,dt = x\int\limits_0^1 F'_x(tx)\,dt. \tag{40}$$

З (39), (40) знаходимо значення

$$V_{11}(x) = \int\limits_0^1 F'_x(tx)\,dt, \tag{41}$$

що є голоморфним в $|x| \leq x_0$ розв'язком рівняння (39).

Записуючи відповідні матриці в (38) покоординатно

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1p} \\ d_{01} & \ldots & d_{0p} \end{pmatrix}, \quad B_{01}(0)U(0) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & \ldots & b_{2p} \end{pmatrix},$$

переконуємося, що значення

$$d_{01} = b_{21}, \ldots, d_{0p} = b_{2p},$$

$$d_{11} = 0, \ldots, d_{1p} = 0$$

завжди задовольняють рівняння (38). Отже, вибравши $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ d_{01} & \ldots & d_{0p} \end{pmatrix}$, для визначення матриці U_{11} одержимо рівняння вигляду

$$xU_{11} = G(x), \tag{42}$$

де $G(x)$ — визначена матриця вигляду $G(x) = B_0(x)V(x)D_0 - B_0(x)B_{01}(x)U(x)$. Згідно з вибором D_0 $G(0) = 0$, і, врахувавши (40), знайдемо $U_{11}(x)$:

$$U_{11}(x) = \int\limits_0^1 G'_x(tx)dt, \tag{43}$$

що є голоморфним в $|x| \leq x_0$ розв'язком рівняння (42). Отже, знайдено коефіцієнти розвинень (6), (13) при ε в нульовому степені.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (6), (13) при ε у першому степені ми маємо систему рівнянь (28) – (31).

З рівняння (28), поклавши $U_1(0) = 0$, знайдемо матрицю $U_1(x)$ у вигляді

$$U_1(x) = \int\limits_0^x \Omega_\tau^x(A_0(x))[A_1(t)U(t) - V_{11}(t)D_0 + A_{01}(t)U_{11}(t)]dt. \tag{44}$$

Розглянемо рівняння (31), яке набере вигляду

$$V_1(x)B_0(x) = B_0(x)V_1(x) + F_1(x), \tag{45}$$

де $\operatorname{tr} F_1(x) \equiv 0$, $\operatorname{tr} F_1(x)B_0(x) \equiv 0$. Звідси випливає, що $F_1(x) = B_1(x)V(x) - V'(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ -xg_1(x) & -f_1(x) \end{pmatrix}$, де $f_1(x)$, $g_1(x)$ — відомі голоморфні в $|x| \leq x_0$ функції. Тоді загальний розв'язок рівняння (45) визначається формулою

$$V_1(x) = \alpha_1(x)I + \beta_1(x)B_0(x) + W_1(x), \quad W_1(x) = \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Функції $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ визначаються, як $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$. Прирівнюючи коефіцієнти в останньому рівнянні системи (22) при другому степені параметра ε, одержуємо

$$V_1'(x) + V_2(x)B_0(x) = B_0(x)V_2(x) + B_1(x)V_1(x) + F_2(x), \tag{47}$$

де

$$F_2(x) = B_{01}(x)V_{11}(x) + B_2(x)V(x) - U_{11}(x)C_0.$$

З умови існування розв'язку рівняння (47)

$$\operatorname{tr} V_1'(x) = \operatorname{tr}(B_1(x)V_1(x)) + \operatorname{tr} F_2(x),$$

$$\operatorname{tr}(V_1'(x)B_0(x)) = \operatorname{tr}(B_1(x)V_1(x)B_0(x)) + \operatorname{tr}(F_2(x)B_0(x))$$

маємо систему рівнянь для визначення $\alpha_1 = \alpha_1(x)$, $\beta_1 = \beta_1(x)$:

$$2\alpha_1'(x) = b_1(x)\beta_1(x) + f_1(x), \quad 2x\beta_1'(x) = \alpha_1(x)b_1(x) - \beta_1 + g_1(x), \tag{48}$$

де $f_1(x)$, $g_1(x)$ — голоморфні в $|x| \leq x_0$ функції вигляду

$$f_1(x) = -\operatorname{tr} W_1'(x) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x)) + \operatorname{tr} F_2(x),$$

$$g_1(x) = -\operatorname{tr}(W_1'(x)B_0(x)) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x)B_0) + \operatorname{tr}(F_2(x)B_0(x)).$$

Система (48) має голоморфні в області $|x| \leq x_0$ розв'язки, які залежать від $\alpha_1(0)$. Поклавши $\alpha_1(0) = 0$, однозначно визначимо розв'язок системи (48):

$$\alpha_1 = \alpha_1(x), \quad \beta_1 = \beta_1(x). \tag{49}$$

Підставивши (49) в (46), однозначно визначимо розв'язок рівняння (31), голоморфний при $|x| \leq x_0$. Для знаходження розв'язку рівнянь (29), (30) підставимо в них знайдені значення для матриць $U(x)$, $U_1(x)$, $V_{11}(x)$, C_0, $V_1(x)$, $V(x)$, $U_{11}(x)$ і одержимо рівняння, які розв'язуються тим же методом, що і рівняння (24), (25). Це дозволяє однозначно визначити матриці C_1, D_1 аналогічно матрицям C_0, D_0 вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ \dots & \dots \\ c_{p1} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ d_{11} & \dots & d_{1p} \end{pmatrix},$$

а також матриці $V_{21} = V_{21}(x)$ і $U_{21} = U_{21}(x)$ аналогічно матрицям $V_{11}(x)$ і $U_{11}(x)$, які є голоморфними в області $|x| \leq x_0$. Отже, знайдено коефіцієнти розвинень (6), (13) при ε у першому степені.

Знайдемо інші коефіцієнти розвинень (6), (13). За допомогою математичної індукції і формул (11), (19) можна довести, що $K_{1j} = \dfrac{C_{j-1}}{2\varepsilon_0}$, $j \geq 2$. Тоді, використавши формули (10), (11), подамо матрицю $C_1(\varepsilon)$ у вигляді

$$C_1(\varepsilon) =$$

$$= C_0 + \frac{\widetilde{B}_1(\varepsilon)e^{-1}\varepsilon}{\|\widetilde{B}_1\|}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}} + {\sum_{j=2}^{n}}' \frac{\widetilde{B}_j(\varepsilon)e^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_je^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta} =$$

$$= C_0 + 2C_1\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{1}{2\varepsilon_0} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}}\right) + {\sum_{j=2}^{n}}' 2\varepsilon_0\varepsilon^j(C_j + K_{1j})\left(\frac{1}{2\varepsilon_0} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^{r+1}\varepsilon_0^{r+1}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_je^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta} = \sum_{j=0}^{n}C_j\varepsilon^j + {\sum_{j=1}^{n}}' C_j\varepsilon^j\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^r\varepsilon_0^r}\right) +$$

$$+ {\sum_{j=2}^{n}}' K_{1j}\varepsilon^j\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^r\varepsilon_0^r}\right) + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_je^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}C_j\varepsilon^j + C_n\varepsilon^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{2^r\varepsilon_0^r} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_je^{-j}\varepsilon^j}{\|\widetilde{B}_j\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta}.$$

Підставляючи (10) в (22) і враховуючи останню рівність, записуємо рівняння, що одержується прирівнюванням коефіцієнтів при n-му, $n \geq 2$, степені параметра ε :

$$U_n'(x) + \sum_{s=1}^{n}V_{s1}(x)D_{n-s} = A_n(x)U(x) + \sum_{s=1}^{n}A_{n-s}(x)U_s(x) + \sum_{s=1}^{n}A_{n-s,1}(x)U_{s1}(x), \tag{50}$$

$$V_{n1}'(x)+\sum_{s=1}^{n}U_s(x)C_{n-s}+U(x)C_n+V_{n+1,1}(x)B_0(x)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}A_{n-s}(x)V_{s1}(x)+A_{n1}(x)V(x)+\sum_{s=1}^{n}A_{n-s,1}(x)V_s(x),\tag{51}$$

$$U_{n1}'(x)+V(x)D_n+\sum_{s=1}^{n}V_s(x)D_{n-s}=B_{n1}(x)U(x)+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}B_{n-s,1}(x)U_s(x)+B_0(x)U_{n+1,1}(x)+\sum_{s=1}^{n}B_{n-s+1}(x)U_{s1}(x),\tag{52}$$

$$V_{n-1}'(x)+\sum_{s=2}^{n}U_{n-s+1,1}(x)C_{s-2}+V_n(x)B_0(x)=\sum_{s=2}^{n}B_{s-2,1}(x)V_{n-s+1}(x)+$$
$$+B_n(x)V(x)+B_0(x)V_n(x)+\sum_{s=1}^{n-1}B_s(x)V_{n-s}(x).\tag{53}$$

Застосовуючи метод математичної індукції, ми на нульовому її кроці визначили матриці $U(x)$, $V(x)$, C_0, D_0, $U_{11}(x)$, $V_{11}(x)$, на першому кроці — матриці $U_1(x)$, $V_1(x)$, C_1, D_1, $U_{21}(x)$, $V_{21}(x)$. Тому вважаємо, що математична індукція виконується до $(n-1)$-го кроку включно і на $(n-1)$-му кроці матриці $U_{n-1}(x)$, $V_{n-1}(x)$, C_{n-1}, D_{n-1}, $U_{n1}(x)$, $V_{n1}(x)$ визначено, при цьому $V_{n-1}(x)$ визначено з умови існування розв'язку рівняння (53). З рівняння (50) однозначно визначаємо $U_n(x)$ у вигляді

$$U_n(x)=\int_0^x\Omega_\tau^x(A_0(t))\left[A_n(t)U(t)-\sum_{s=1}^{n}V_{s1}(t)D_{n-s}+\sum_{s=1}^{n-1}A_{n-s}(t)U_s(t)+\sum_{s=1}^{n}A_{n-s,1}(t)U_{s1}(t)\right]dt.$$

З рівняння (53) визначаємо $V_n(x)$ у вигляді

$$V_n(x)=\alpha_n(x)I+\beta_n(x)B_0(x)+W_n(x),\tag{54}$$

де $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$ — довільні сталі, $W_n(x)$ — відомі матричні функції, голоморфні в області $|x|\le x_0$. Для знаходження $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$ слід розглянути рівняння, яке одержуємо, прирівнюючи коефіцієнти при ε^{n+1} в останньому рівнянні формули (22):

$$V_{n+1}(x)B_0(x)-B_0(x)V_{n+1}(x)=-V_n'(x)+F_{n+1}(x)+B_1(x)V_n(x),\tag{55}$$

де

$$F_{n+1}(x)=-\sum_{s=2}^{n+1}U_{n-s+2,1}(x)C_{s-2}+\sum_{s=2}^{n+1}B_{s-2,1}(x)V_{n-s+2}(x)+$$
$$+B_{n+1}(x)V(x)+\sum_{s=2}^{n}B_s(x)V_{n-s+1}(x).$$

З умови розв'язності рівняння (55) визначимо систему рівнянь для визначення функцій $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$:

$$2\alpha_n'(x) = b_1(x)\beta_n(x) + f_n(x), \quad 2x\beta_n'(x) + \beta_n(x) = b_1(x)\alpha_n(x) + g_n(x), \tag{56}$$

де $f_n(x), g_n(x)$– відомі функції,

$$f_n(x) = \operatorname{tr} F_{n+1}(x) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_n(x)) - \operatorname{tr} W_n'(x),$$

$$g_n(x) = \operatorname{tr}(F_{n+1}(x)B_0(x)) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_n(x)B_0(x)) - \operatorname{tr}(W_n'(x)B_0),$$

голоморфні при $|x| \le x_0$. Поклавши $\alpha_0(0) = 0$, визначимо однозначно із (56) $\alpha_n(x)$ і $\beta_n(x)$, як голоморфні в області $|x| \le x_0$ розв'язки системи (56).

Підставивши в (51), (52) визначені вище вирази для матриць $U_n(x)$ і $V_n(x)$, одержимо рівняння, які розв'язуються аналогічно розв'язуванню рівнянь (24), (25). Це однозначно визначає C_n, D_n вигляду $C_n = \begin{pmatrix} c_{1n} & 0 \\ \dots & \dots \\ c_{pn} & 0 \end{pmatrix}$, $D_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ d_{n1} & \dots & d_{np} \end{pmatrix}$ і матриці $U_{n+1,1}(x)$, $V_{n+1,1}(x)$ вигляду (43), (41).

Таким чином, знайдено розв'язки рівнянь (50)–(53) і матриць C_n і D_n, тим самим визначено всі коефіцієнти розвинень (6), (13), і вони є голоморфними в області $|x| \le x_0$.

Розглянемо матрицю (5), (6) при $\varepsilon = 0$. Вона має вигляд

$$\Phi_0(x) = \Phi(x, 0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix},$$

де $U(x)$, $V(x)$ визначається з (27). Врахувавши, що $\operatorname{tr} A_0(x) \equiv 0$, отримаємо $\det U(x) \equiv \equiv 1$. З (27) знайдемо $\det V(x) = \alpha_0^2(x) - x\beta_0^2(x)$, і, врахувавши рівняння (32), одержимо $\frac{d}{dx}(\det V(x)) = 2\alpha_0(x)\alpha_0'(x) - 2x\beta_0(x)\beta_0'(x) - \beta_0^2(x) \equiv 0$. Звідси маємо $\det V(x) \equiv \equiv 1$. Таким чином, $\det \Phi_0(x) \equiv 1$ для всіх x з області $|x| \le x_0$.

Згідно з [7] покоординатний запис рівняння (3) має вигляд $u_j' = c_j(\varepsilon)v_1$, $j = \overline{1,p}$, і нехай $c_1(\varepsilon) \ne 0$. Суперпозиція замін $u = V(\varepsilon)\omega$, $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ перетворює систему (1) до вигляду

$$\omega_1' = c_1(\varepsilon)v_1, \quad \omega_j' = 0, \quad j = \overline{2,p}, \tag{57}$$

$$\varepsilon v' = B_0(x)v + \varepsilon D_2\omega,$$

де $c_j(\varepsilon) = c_{j0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{jn}e^{-n}\varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon + 2\varepsilon_0\Delta}$, $j = \overline{1,p}$; c_{jn}, b_{jn} — елементи відповідно матриць C_n і $\widetilde{B}_n = \begin{pmatrix} b_{1n} & 0 \\ \dots & \dots \\ b_{pn} & 0 \end{pmatrix}$; $V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2(\varepsilon) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_p(\varepsilon) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, через $\gamma_j(\varepsilon)$ позначено функцію

$$\gamma_j(\varepsilon) = \frac{c_j(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}; \quad D_2(\varepsilon) = D_1(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ d_{11}(\varepsilon) & \dots & d_{1p}(\varepsilon) \end{pmatrix};$$

$$d_{1j}(\varepsilon) = d_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nj} e^{-n} \varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\|\varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta_1}, \quad j = \overline{2, p},$$

$$d_{11}(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{p} \gamma_r(\varepsilon) \left(d_{0r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nr} e^{-n} \varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\|\varepsilon + 2\varepsilon_0 \Delta_1} \right), \quad \gamma_1(\varepsilon) \equiv 1,$$

d_{nj} і a_{nj} — елементи відповідно матриць D_n і $\widetilde{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай права частина системи рівнянь (1) голоморфна в області* $|x| \leq x_0$. *Тоді існують формальні ряди (5), (6), коефіцієнти яких голоморфні в області* $|x| \leq x_0$, *такі, що* $\det \Phi(x, 0) \equiv 1$ *і формальне перетворення з матрицею заміни вигляду (5) зводить систему (1) до системи (57).*

Правильною є така лема.

Лема 1. *Блочна матриця*

$$\Phi^*(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \varepsilon) & \Phi_2(x, \varepsilon) \\ \Phi_3(x, \varepsilon) & \Phi_4(x, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

є нескінченно диференційовною при $|x| < x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. *Формальна матриця*

$$\Phi(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix} \tag{58}$$

є рівномірним асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ *на множині* $|x| \leq x_0$ *матриці* $\Phi^*(x, \varepsilon)$, *де*

$$\Phi_1(x, \varepsilon) = U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1}, \tag{59}$$

$$\Phi_j(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{jn}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{jn}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_j}, \quad j = 2, 3, \quad \Phi_4(x, \varepsilon) = V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{4n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{4n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_4},$$

$\|F_{jn}(x)\|_0 = \max\limits_x \|F_{jn}(x)\|$, $j = \overline{1, 4}$. *Матриці* $\dfrac{F_{jn}(x)}{\|F_{jn}(x)\|_0}$, $j = \overline{1, 4}$, *визначаються рівностями*

$$\frac{F_{11}(x)}{\|F_{11}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e U_1(x), \quad \frac{F_{21}(x)}{\|F_{21}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e V_{11}(x),$$

$$\frac{F_{31}(x)}{\|F_{31}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e U_{11}(x), \quad \frac{F_{41}(x)}{\|F_{41}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e V_1(x),$$

якщо відповідно $\|U_1(x)\|_0 \neq 0$, $\|V_{11}(x)\|_0 \neq 0$, $\|U_{11}(x)\|_0 \neq 0$, $\|V_1(x)\|_0 \neq 0$, *і* $F_{11}(x) \equiv 0$, $F_{21}(x) \equiv 0$, $F_{31}(x) \equiv 0$, $F_{41}(x) \equiv 0$, *якщо відповідно* $U_1(x) \equiv 0$, $V_{11}(x) \equiv 0$, $U_{11}(x) \equiv 0$, $V_1(x) \equiv 0$;

$$\frac{F_{1n}(x)}{\|F_{1n}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e^n (U_n(x) + K_{n1}(x)), \quad \frac{F_{2n}(x)}{\|F_{2n}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e^n (V_{n1}(x) + K_{n2}(x)), \tag{60}$$

$$\frac{F_{3n}(x)}{\|F_{3n}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e^n (U_{n1}(x) + K_{n3}(x)), \quad \frac{F_{4n}(x)}{\|F_{4n}(x)\|_0} = 2\varepsilon_0 e^n (V_n(x) + K_{n4}(x))$$

відповідно у випадках, коли $\|U_n(x) + K_{n1}(x)\|_0 \neq 0$, $\|V_{n1}(x) + K_{n2}(x)\|_0 \neq 0$, $\|U_{n1}(x) + K_{n3}(x)\|_0 \neq 0$, $\|V_n(x) + K_{n4}(x)\|_0 \neq 0$; *якщо* $U_n(x) + K_{n1}(x) \equiv 0$, $V_{n1}(x) + K_{n2}(x) \equiv 0$, $U_{n1}(x) + K_{n3}(x) \equiv 0$, $V_n(x) + K_{n4}(x) \equiv 0$, *то відповідно* $F_{1n}(x) \equiv 0$, $F_{2n}(x) \equiv 0$, $F_{3n}(x) \equiv 0$, $F_{4n}(x) \equiv 0, n \geq 2$, $K_{nj}(x), j = \overline{1,4}$, *— коефіцієнти при* ε^n *у розвиненні раціональних функцій*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_{ji}(x) e^{-i} \varepsilon^i}{\|F_{ji}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_j},$$

$$\widetilde{\Delta}_j = \begin{cases} \|F_{jn}(x)\|_0, & \text{якщо} \quad \|F_{jn}(x)\|_0 \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \|F_{jn}(x)\|_0 = 0. \end{cases}$$

Доведення. Згідно з лемою 2 матриці K_{nj}, $j = \overline{1,4}$, $n = 2, 3, \ldots$, мають вигляд

$$K_{nj}(x) = {\sum_{i=1}^{n-1}}' \frac{(-1)^{n-i+1} F_{ji}(x) e^{-i}}{\|F_{ji}(x)\|_0 2^{n-i+1} \varepsilon_0^{n-i+1}}. \tag{61}$$

З теореми 1 випливає, що коефіцієнти розвинень (6) голоморфні в області $|x| \leq x_0$, а тому з рівностей (60), (61) випливає, що матриці $F_{jn}(x)$, $j = \overline{1,4}$, голоморфні за змінною x при $|x| \leq x_0$. Позначивши через F_{1nr} коефіцієнти в розвиненні матричної функції $F_{1n}(x)$ за степенями x, запишемо ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1}$ у вигляді

$$\begin{aligned} {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 (\varepsilon + 2\varepsilon_0)} &= {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{F_{1n}(x) e^{-n}}{\|F_{1n}(x)\|_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \varepsilon^{n+j}}{2^{j+1} \varepsilon_0^{j+1}} = \\ &= {\sum_{n=1}^{\infty}}' \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^j e^{-n} F_{1nr} x^r \varepsilon^{n+j}}{\|F_{1n}(x)\|_0 2^{j+1} \varepsilon_0^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} {\sum_{n=1}^{j}}' \frac{(-1)^{j-n} F_{1nr} e^{-n} x^r \varepsilon^j}{\|F_{1n}(x)\|_0 2^{j+1-n} \varepsilon_0^{j+1-n}}, \end{aligned} \tag{62}$$

де $\displaystyle{\sum_n}'$ — сума елементів $\displaystyle\frac{(-1)^{j-n} F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1}$, для яких $\|F_{1n}(x)\|_0 \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, інші елементи дорівнюють нулю.

Дослідимо на збіжність ряд (62). Згідно з [15]

$$|\{F_{1nr}\}_{ij}| \leq \frac{\sup\limits_x |\{F_{1n}(x)\}_{ij}|}{x_0^r}, \quad i,j=\overline{1,p}, \quad r=0,1,2,\ldots,$$

$\{F_{1n}(x)\}_{ij}$ — елементи матриці $F_{1n}(x)$. З цієї нерівності і означення норми матриці випливає нерівність

$$\|F_{1nr}\| \leq \frac{\|F_{1n}(x)\|_0}{x_0^r}. \tag{63}$$

Використавши нерівність (63), оцінимо загальний член ряду (62):

$$\|a_{jr}\| \leq \frac{e^{-1}}{2^j\varepsilon_0^j}\frac{(1-(\frac{2\varepsilon_0}{e})^j)}{(1-\frac{2\varepsilon_0}{e})}\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^r|\varepsilon|^j, \tag{64}$$

де $a_{jr}=\sum\limits_{n=1}^{j}{}' \dfrac{(-1)^{j-n}F_{1nr}e^{-n}x^r\varepsilon^j}{\|F_{1n}(x)\|_0 2^{j+1-n}\varepsilon_0^{j+1-n}}$.

Застосовуючи до дослідження збіжності ряду (62) ознаку Коші і нерівність (64), маємо

$$\lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\|a_{jr}\|} \leq \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\varepsilon_0\sqrt[j]{e}}\sqrt[j]{\frac{1-(\frac{2\varepsilon_0}{e})^j}{1-\frac{2\varepsilon_0}{e}}}\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^{\frac{r}{j}}|\varepsilon| = \frac{|\varepsilon|}{2\varepsilon_0}<1, \tag{65}$$

r — довільне, $|\varepsilon|\leq\varepsilon_0$;

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt[r]{\|a_{jr}\|} \leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{(2\varepsilon_0)^{\frac{j}{r}}\sqrt[r]{e}}\sqrt[r]{\frac{1-(\frac{2\varepsilon_0}{e})^j}{1-\frac{2\varepsilon_0}{e}}}\frac{|x|}{|x_0|}|\varepsilon|^{\frac{j}{r}} = \frac{|x|}{|x_0|}<1, \tag{66}$$

j — довільне, $|x|<x_0$. Таким чином, з (65), (66) випливає збіжність степеневого ряду (62), а отже, матриця $\Phi^*(x,\varepsilon)$ аналітична при $|x|<x_0, |\varepsilon|\leq\varepsilon_0$. Для доведення того, що матриця $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)$ є рівномірним асимптотичним розвиненням при $\varepsilon\to 0$ на множині $|x|\leq x_0$ матричної функції $\Phi_1(x,\varepsilon)$ вигляду (59), розглянемо різницю

$$E_m(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\left(\Phi_1(x,\varepsilon)-\sum_{n=0}^{m}\varepsilon^n U_n(x)\right)=\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\left(\sum_{n=1}^{m}{}'\left(\frac{e^{-n}F_{1n}(x)}{2\varepsilon_0\|F_{1n}(x)\|_0}-K_{n1}-U_n\right)\varepsilon^n+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{m}{}'\frac{F_{1n}(x)e^{-n}\varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0}\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{F_{1n}(x)e^{-n}\varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0\varepsilon+2\varepsilon_0\widetilde{\Delta}_1}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{m}{}'\frac{F_{1n}(x)e^{-n}}{\|F_{1n}(x)\|_0}\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{(-1)^r\varepsilon^{r-(m-n+1)}}{(2\varepsilon_0)^{r+1}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{F_{1n}(x)e^{-n}\varepsilon^{n-(m+1)}}{\|F_{1n}(x)\|_0\varepsilon+2\varepsilon_0\widetilde{\Delta}_1}. \tag{67}$$

З (67) випливає, що норма матриці $\|E_m(x,\varepsilon)\|$ обмежена, а отже, згідно з лемою з [3] про необхідну і достатню умову рівномірності асимптотичного розвинення, формальна матриця (58) є рівномірним асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ на множині $|x| \leq x_0$ матриці $\Phi^*(x,\varepsilon)$.

Лему доведено.

За допомогою замін

$$U(x,\varepsilon) = Z_1 + \Phi_1(x,\varepsilon), \quad V_1(x,\varepsilon) = Z_2 + \Phi_2(x,\varepsilon),$$
$$U_1(x,\varepsilon) = Z_3 + \Phi_3(x,\varepsilon), \quad V(x,\varepsilon) = Z_4 + \Phi_4(x,\varepsilon) \tag{68}$$

систему (21) запишемо у вигляді

$$Z_1' = A(x,\varepsilon)Z_1 - Z_2D_1(\varepsilon) + A_1(x,\varepsilon)Z_3 + F_1(x,\varepsilon),$$
$$\varepsilon Z_2' = -Z_2B_0(x) + \varepsilon A(x,\varepsilon)Z_2 - \varepsilon Z_1C_1(\varepsilon) + \varepsilon A_1(x,\varepsilon)Z_4 + F_2(x,\varepsilon),$$
$$\varepsilon Z_3' = B(x,\varepsilon)Z_3 - \varepsilon Z_4D_1(\varepsilon) + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)Z_1 + F_3(x,\varepsilon),$$
$$\varepsilon Z_4' = -Z_4B_0(x) + B(x,\varepsilon)Z_4 - \varepsilon Z_3C_1(\varepsilon) + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)Z_2 + F_4(x,\varepsilon), \tag{69}$$

де

$$F_1(x,\varepsilon) = -\Phi_1'(x,\varepsilon) - \Phi_2(x,\varepsilon)D_1(\varepsilon) + A(x,\varepsilon)\Phi_1(x,\varepsilon) + A_1(x,\varepsilon)\Phi_3(x,\varepsilon),$$
$$F_2(x,\varepsilon) = -\varepsilon\Phi_2'(x,\varepsilon) - \varepsilon\Phi_1(x,\varepsilon)C_1(\varepsilon) - \Phi_2(x,\varepsilon)B_0(x) + \varepsilon A(x,\varepsilon)\Phi_2(x,\varepsilon) + \varepsilon A_1(x,\varepsilon)\Phi_4(x,\varepsilon),$$
$$F_3(x,\varepsilon) = -\varepsilon\Phi_3'(x,\varepsilon) - \varepsilon\Phi_4(x,\varepsilon)D_1(\varepsilon) + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)\Phi_1(x,\varepsilon) + B(x,\varepsilon)\Phi_3(x,\varepsilon),$$
$$F_4(x,\varepsilon) = -\varepsilon\Phi_4'(x,\varepsilon) - \varepsilon\Phi_3(x,\varepsilon)C_1(\varepsilon) - \Phi_4(x,\varepsilon)B_0(x) + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)\Phi_2(x,\varepsilon) + B(x,\varepsilon)\Phi_4(x,\varepsilon).$$

При $\varepsilon \neq 0$ систему (69) перепишемо у вигляді

$$Z_1' = B_0(x)Z_1 + (A(x,\varepsilon) - B_0(x))Z_1 - Z_2D_1(\varepsilon) + A_1(x,\varepsilon)Z_3 + F_1(x,\varepsilon),$$

$$Z_2' =$$
$$= B_0(x)Z_2 - \varepsilon^{-1}Z_2B_0(x) + (A(x,\varepsilon) - B_0(x))Z_2 - Z_1C_1(\varepsilon) + A_1(x,\varepsilon)Z_4 + \varepsilon^{-1}F_2(x,\varepsilon),$$
$$\tag{70}$$
$$Z_3' = \varepsilon^{-1}B_0(x)Z_3 + \varepsilon^{-1}(B(x,\varepsilon) - B_0(x))Z_3 - Z_4D_1(\varepsilon) + B_1(x,\varepsilon)Z_1 + \varepsilon^{-1}F_3(x,\varepsilon),$$

$$Z_4' =$$
$$= \varepsilon^{-1}B_0(x)Z_4 - \varepsilon^{-1}Z_4B_0(x) + \varepsilon^{-1}(B(x,\varepsilon) - B_0(x))Z_4 - Z_3C_1(\varepsilon) + B_1(x,\varepsilon)Z_2 + \varepsilon^{-1}F_4(x,\varepsilon).$$

Доведемо, що матриці $F_i(x,\varepsilon) \sim 0, \varepsilon \to 0, i = \overline{1,4}$. Дійсно,

$$F_1(x,\varepsilon) = -\left(U(x) + {\sum_{n=1}^{m}}' \left(\frac{e^{-n}F_{1n}(x)}{2\varepsilon_0\|F_{1n}(x)\|_0} - K_{n1}(x)\right)\varepsilon^n + {\sum_{n=1}^{m}}' \frac{F_{1n}(x)e^{-n}\varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0} \times\right.$$

$$\times \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \Bigg)' - \left(\sum_{n=1}^{m}{}' \left(\frac{e^{-n} F_{2n}(x)}{2\varepsilon_0 \|F_{2n}(x)\|_0} - K_{n2}(x) \right) \varepsilon^n + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{F_{2n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{2n}(x)\|_0} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \left. \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{2n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{2n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \right) D_1(\varepsilon) +$$

$$+ A(x,\varepsilon) \left(U(x) + \sum_{n=1}^{m}{}' \left(\frac{e^{-n} F_{1n}(x)}{\|F_{1n}(x)\|_0 2\varepsilon_0} - K_{n1}(x) \right) \varepsilon^n + \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \right) + A_1(x,\varepsilon) \left(\sum_{n=1}^{m}{}' \left(\frac{e^{-n} F_{3n}(x)}{\|F_{3n}(x)\|_0 2\varepsilon_0} - K_{n3}(x) \right) \varepsilon^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{F_{3n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{3n}(x)\|_0} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{3n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{3n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \right) =$$

$$= -U'(x) - \sum_{n=1}^{m}{}' U_n'(x) \varepsilon^n - \left(\sum_{n=1}^{m}{}' V_{n1}(x) \varepsilon^n \right) D_1(\varepsilon) +$$

$$+ A(x,\varepsilon) \left(U(x) + \sum_{n=1}^{m}{}' U_n(x) \varepsilon^n \right) + A_1(x,\varepsilon) \sum_{n=1}^{m}{}' U_{n1}(x) \varepsilon^n + \varepsilon^{m+1} M = \varepsilon^{m+1} M,$$

де

$$M = -\left(\sum_{n=1}^{m}{}' \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{1n}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \right)' +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \widetilde{A}_i(x,\varepsilon) \left(\sum_{n=1}^{m}{}' \frac{F_{in}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{in}(x)\|_0} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{(2\varepsilon_0)^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{F_{in}(x) e^{-n} \varepsilon^n}{\|F_{in}(x)\|_0 \varepsilon + 2\varepsilon_0 \widetilde{\Delta}_1} \right) \widetilde{D}_i(\varepsilon),$$

$$\widetilde{A}_1(x,\varepsilon) = A(x,\varepsilon), \quad \widetilde{A}_2(x,\varepsilon) = -E, \quad \widetilde{A}_3(x,\varepsilon) = A_1(x,\varepsilon), \quad \widetilde{D}_2(\varepsilon) = D_1(\varepsilon),$$

$$\widetilde{D}_1(\varepsilon) = \widetilde{D}_3(\varepsilon) = E.$$

Згідно з [3] рівняння (70) замінимо еквівалентними інтегральними рівняннями вигляду

$$Z_1(x,\varepsilon) = \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) [(A(t,\varepsilon) - B_0(t)) Z_1 - Z_2 D_1(\varepsilon) + A_1(t,\varepsilon) Z_3] dt + H_1(x,\varepsilon),$$

$$Z_2(x,\varepsilon) = \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) [(A(t,\varepsilon) - B_0(t)) Z_2 - Z_1 C_1(\varepsilon) +$$

$$+ A_1(t,\varepsilon) Z_4] (\tilde{V}^T(t,\varepsilon))^{-1} dt \tilde{V}^T(x,\varepsilon) + H_2(x,\varepsilon), \tag{71}$$

$$Z_3(x,\varepsilon)=\tilde U(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t,\varepsilon)[\varepsilon^{-1}(B(t,\varepsilon)-B_0(t))Z_3-$$

$$-Z_4D_1(\varepsilon)+B_1(t,\varepsilon)Z_1]dt+H_3(x,\varepsilon),$$

$$Z_4(x,\varepsilon)=\tilde U(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t,\varepsilon)[\varepsilon^{-1}(B(t,\varepsilon)-B_0(t))Z_4-Z_3C_1(\varepsilon)+$$

$$+B_1(t,\varepsilon)Z_2](\tilde V^T(t,\varepsilon))^{-1}dt\tilde V^T(x,\varepsilon)+H_4(x,\varepsilon),$$

де

$$H_1(x,\varepsilon)=\tilde U(x)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t)F_1(t,\varepsilon)dt,$$

$$H_2(x,\varepsilon)=\tilde U(x)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t)\varepsilon^{-1}F_2(t,\varepsilon)(\tilde V^T(t,\varepsilon))^{-1}dt\tilde V^T(x,\varepsilon),$$

$$H_3(x,\varepsilon)=\tilde U(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1}F_3(t,\varepsilon)dt,$$

$$H_4(x,\varepsilon)=\tilde U(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)}\tilde U^{-1}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1}F_4(t,\varepsilon)(\tilde V^T(t,\varepsilon))^{-1}dt\tilde V^T(x,\varepsilon),$$

$\tilde U(x)$, $\tilde U(x,\varepsilon)$, $\tilde V(x,\varepsilon)$ — фундаментальні матриці відповідних диференціальних рівнянь $\tilde U'=\begin{pmatrix}0&1\\x&0\end{pmatrix}\tilde U$, $\varepsilon\tilde U'=\begin{pmatrix}0&1\\x&0\end{pmatrix}\tilde U$, $\varepsilon\tilde V'=-\begin{pmatrix}0&1\\x&0\end{pmatrix}^T\tilde V$, $\tilde V^T(x,\varepsilon)$ — матриця, транспонована до $\tilde V(x,\varepsilon)$, $\Gamma(x)$ — набір шляхів інтегрування, кінці яких збігаються з точкою x.

За лемами 30.3 і 30.4 з [3] в секторі $-\pi+\delta\le\arg(x\varepsilon^{-\frac23})\le\dfrac{\pi}{3}-\delta$ $\tilde U(x,\varepsilon)$, $\tilde V(x,\varepsilon)$ можна подати у вигляді $\tilde U(x,\varepsilon)=\tilde U^*(x,\varepsilon)e^{\frac23 x^{\frac32}\varepsilon^{-1}\Omega}$, $\tilde V(x,\varepsilon)=\tilde V^*(x,\varepsilon)e^{\frac23 x^{\frac32}\varepsilon^{-1}\Omega}$, де $\tilde U^*(x,\varepsilon)$; $\tilde V^*(x,\varepsilon)$ мають вигляд

$$\tilde U^*(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon^{\frac13}\end{pmatrix}\left(x\varepsilon^{-\frac23}\right)^{\frac14\sigma(x\varepsilon^{-\frac23})\Omega}\hat U(x\varepsilon^{-\frac23}),\quad \tilde V^*(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\tilde U^*(x,\varepsilon),$$

$$\sigma(x\varepsilon^{-\frac23})=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad |x\varepsilon^{-\frac23}|\le z_0,\\ 1, & \text{якщо}\quad |x\varepsilon^{-\frac23}|>z_0,\end{cases}\qquad \Omega=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \delta>0.$$

Виконавши в (71) заміну за формулами

$$W_1(x,\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{1}{3}} Z_1(x,\varepsilon), \quad W_2(x,\varepsilon) = Z_2(x,\varepsilon)(\tilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}\varepsilon^{-\frac{1}{3}},$$

$$W_3(x,\varepsilon) = (\tilde{U}^*(x,\varepsilon))^{-1} Z_3(x,\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{1}{3}}, \quad W_4(x,\varepsilon) = (\tilde{U}^*(x,\varepsilon))^{-1} Z_4(x,\varepsilon)(\tilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}, \tag{72}$$

одержимо інтегральні рівняння відносно змінних $W_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, для побудови розв’язків яких розглянемо наступний алгоритм $W_i^{(0)}(x,\varepsilon) = 0$, $i = \overline{1,4}$:

$$W_1^{(l+1)}(x,\varepsilon) = \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t)(A(t,\varepsilon) - B_0(t)) W_1^{(l)}(t,\varepsilon)dt -$$

$$- \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) W_2^{(l)}(t,\varepsilon)\tilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon) D_1(\varepsilon)dt +$$

$$+ \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) A_1(t,\varepsilon)\tilde{U}^*(t,\varepsilon) W_3^{(l)}(t,\varepsilon)dt + \varepsilon^{-\frac{1}{3}} H_1(x,\varepsilon),$$

$$W_2^{(l+1)}(x,\varepsilon) = \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t)(A(t,\varepsilon) - B_0(t)) W_2^{(l)}(t,\varepsilon) e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega} dt -$$

$$- \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) W_1^{(l)}(t,\varepsilon) C_1(\varepsilon)(\tilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon))^{-1} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega} dt +$$

$$+ \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) A_1(t,\varepsilon)\tilde{U}^*(t,\varepsilon) W_4^{(l)}(t,\varepsilon) e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega} dt +$$

$$+ \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \tilde{U}(x) \int\limits_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t)\varepsilon^{-1} F_2(t,\varepsilon)(\tilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon))^{-1} e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\Omega} dt, \tag{73}$$

$$W_3^{(l+1)}(x,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega} \tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1}(B(t,\varepsilon) - -B_0(t))\tilde{U}^*(t,\varepsilon) W_3^{(l)}(t,\varepsilon)dt -$$

$$- \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\Omega} W_4^{(l)}(t,\varepsilon)\tilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon) D_1(\varepsilon)dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\Omega} \tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon) B_1(t,\varepsilon) W_1^{(l)}(t,\varepsilon)dt +$$

$$+ \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\Omega} \tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1} F_3(t,\varepsilon)dt,$$

$$W_4^{(l+1)}(x,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}\tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1}\times$$

$$\times (B(t,\varepsilon)-B_0(t))\tilde{U}^{*}(t,\varepsilon)W_4^{(l)}(t,\varepsilon)e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})\Omega}\,dt-$$

$$-\varepsilon^{\frac{1}{3}}\int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}W_3^{(l)}(t,\varepsilon)C_1(\varepsilon)(\tilde{V}^{*^{T}}(t,\varepsilon))^{-1}e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})\Omega}dt+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}\tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)B_1(t,\varepsilon)W_2^{(l)}(t,\varepsilon)e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Gamma(x)} e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}\tilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)\varepsilon^{-1}F_4(t,\varepsilon)(\tilde{V}^{*^{T}}(t,\varepsilon))^{-1}e^{\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\Omega}\,dt.$$

Використавши (73), оцінимо норму матриці

$$\|W_1^{(l+1)}(x,\varepsilon)\|_0 \le 2\|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|A_1(x,\varepsilon)\|_0\|W_3^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\|\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0\int\limits_{\gamma_3(x)}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|+$$

$$+2||\tilde{U}(x)||_0||\tilde{U}^{-1}(x)||_0||W_2^{(l)}(x,\varepsilon)||_0||\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})||_0||D_1(\varepsilon)||\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma_3(x)}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|+2||\tilde{U}(x)||_0||\tilde{U}^{-1}(x)||_0||A(x,\varepsilon)-B_0(x)||_0\times$$

$$\times||W_1^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\int\limits_{\gamma_3(x)}|dt|+|\varepsilon|^{-\frac{1}{3}}||H_1(x,\varepsilon)||_0,$$

$$||W_2^{(l+1)}(x,\varepsilon)||_0 \le 2||\tilde{U}(x)||_0||\tilde{U}^{-1}(x)||_0||A_1(x,\varepsilon)||_0||\hat{U}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}})||_0||W_4^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|\right)+$$

$$+2||\tilde{U}(x)||_0||\tilde{U}^{-1}(x)||_0||C_1(\varepsilon)||||(\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}||_0||W_1^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|\right)+$$

$$+\,||\tilde U(x)||_0||\tilde U^{-1}(x)||_0||A(x,\varepsilon)-B_0(x)||_0||W_2^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||dt|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||dt|\right)+|\varepsilon|^{-\frac13}||H_2(x,\varepsilon)(\tilde V^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}||_0, \tag{74}$$

$$||W_3^{(l+1)}(x,\varepsilon)||_0\le 8||(\hat U(x\varepsilon^{-\frac23}))^{-1}||_0||\varepsilon^{-1}(B(x,\varepsilon)-B_0(x))||_0||\hat U(x,\varepsilon^{-\frac23})||_0||W_3^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{2}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{3}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{2}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{3}}|dt|\right)+$$

$$+\,4||\hat U^T(x\varepsilon^{-\frac23})||_0||D_1(\varepsilon)||||W_4^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{6}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{6}}|dt|\right)+$$

$$+\,4||(\hat U(x\varepsilon^{-\frac23}))^{-1}||_0||B_1(x,\varepsilon)||_0||W_1^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{6}}|dt|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{2}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-2}{6}}|dt|\right)+|\varepsilon|^{-\frac13}||(\tilde U^*(x,\varepsilon))^{-1}H_3(x,\varepsilon)||_0,$$

$$||W_4^{(l+1)}(x,\varepsilon)||_0\le 4||(\hat U(x\varepsilon^{-\frac23}))^{-1}||_0||\varepsilon^{-1}(B(x,\varepsilon)-B_0(x))||_0||\hat U(x\varepsilon^{-\frac23})||_0||W_4^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{2}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-1}{3}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{2}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-1}{3}}|dt|+\right.$$

$$\left.+2\int\limits_{\gamma_3(x)}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{2}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})-1}{3}}|dt|\right)+4||C_1(\varepsilon)||||(\hat U^T(x,\varepsilon^{-\frac23}))^{-1}||_0||W_3^{(l)}(x,\varepsilon)||_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{6}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac32}-t^{\frac32})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac23})}{6}}|dt|+\right.$$

$$\left.+\,2\int\limits_{\gamma_3(x)}|t|^{-\frac{\sigma\left(t\varepsilon^{-\frac23}\right)}{4}}|\varepsilon|^{-\frac{\sigma\left(t\varepsilon^{-\frac23}\right)}{6}}|dt|\right)+4\|(\widehat U(x\varepsilon^{-\frac23}))^{-1}\|_0\|B_1(x,\varepsilon)\|_0\|W_2^{(l)}(x,\varepsilon)\|_0\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\gamma_1(x)}|e^{-\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{6}}|dt|+\int\limits_{\gamma_2(x)}|e^{\frac{4}{3\varepsilon}(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})}||t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{6}}|dt|+\right.$$

$$\left.+\,2\int\limits_{\gamma_3(x)}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{6}}|dt|\right)+||(\tilde{U}^*(x,\varepsilon))^{-1}H_4(x,\varepsilon)(\tilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}||_0.$$

Будемо вибирати шляхи інтегрування таким чином, щоб інтеграли були обмежені при $\varepsilon\to 0$. Введемо допоміжні змінні

$$\tau=e^{-i\beta}t^{\frac{3}{2}},\quad \tilde{\xi}=e^{-i\beta}x^{\frac{3}{2}},$$

де число $\beta=0$, якщо $\varepsilon>0$, і $\beta=\pi$, якщо $\varepsilon<0$. Сектору $-\pi<\arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})<\frac{\pi}{3}$ у площині x відповідає сектор $-\frac{3\pi}{2}<\arg\tilde{\xi}<\frac{\pi}{2}$ у площині $\tilde{\xi}$. Нехай $\tilde{\xi}$ лежить в області $-\frac{3\pi}{2}+\delta\le\arg\tilde{\xi}\le\frac{\pi}{2}-\delta$, $|\tilde{\xi}|\le x_0^{\frac{3}{2}}$. Побудуємо всередині області площини τ, визначеній нерівностями $-\frac{3\pi}{2}+\delta\le\arg\tau\le\frac{\pi}{2}-\delta$, $|\tau|\le x_0^{\frac{3}{2}}$, відрізки $\delta_1(\tilde{\xi})$ і $\delta_2(\tilde{\xi})$. Нехай $\delta_1(\tilde{\xi})$ — відрізок, який з додатним напрямом $\operatorname{Re}\tau$ утворює кут $\frac{\pi}{4}$ і з'єднує точку $\tilde{\xi}_1$, що лежить на перетині кола з прямою, з довільною точкою $\tilde{\xi}$, що лежить усередині області τ. Через $\delta_2(\tilde{\xi})$ позначимо відрізок, який з додатним напрямом $\operatorname{Re}\tau$ утворює кут $\frac{3\pi}{4}$ і з'єднує точку $\tilde{\xi}$ з $\tilde{\xi}_2$ — точкою перетину відрізка з колом у правій півплощині відносно $\delta_1(\tilde{\xi})$. Тоді рівняння $\delta_1(\tilde{\xi})$, $\delta_2(\tilde{\xi})$ мають відповідно вигляд $\tau=\tilde{\xi}-\rho e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\tau=\tilde{\xi}-\rho e^{\frac{3\pi i}{4}}$, і на всьому відрізку $\delta_1(\tilde{\xi})$ $\operatorname{Re}(\tilde{\xi}-\tau)>0$, а на $\delta_2(\tilde{\xi})$ $\operatorname{Re}(\tilde{\xi}-\tau)<0$.

Оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{\gamma_1(x)}\left|e^{-\frac{2}{3\varepsilon}\left(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)}\right||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|t|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})}{4}}|dt|=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_{\delta_1(\tilde{\xi})}\left|e^{-\frac{2(\tilde{\xi}-\tau)}{3|\varepsilon|}}\right||\varepsilon|^{\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})-2}{6}}|\tau|^{-\frac{\sigma(t\varepsilon^{-\frac{2}{3}})+2}{6}}|d\tau|. \tag{75}$$

При $|x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}|\le z_0$ інтеграл I_1 вигляду (75) має оцінку

$$I_1=\frac{2}{3}|\varepsilon|^{-\frac{1}{3}}\int\limits_{\delta_1^{(1)}(\tilde{\xi})}|e^{-\frac{2(\tilde{\xi}-\tau)}{3|\varepsilon|}}||\tau|^{-\frac{1}{3}}|d\tau|\le\frac{4}{3}|\varepsilon|^{-\frac{1}{3}}\int\limits_0^{z_0^{\frac{3}{2}}|\varepsilon|}|\tau|^{-\frac{1}{3}}|d\tau|=2z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{3}}.$$

При $|x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| > z_0$ інтеграл I_2 вигляду (75) має оцінку

$$I_2 = \frac{2}{3}|\varepsilon|^{-\frac{1}{6}} \int\limits_{\delta_1^{(2)}(\widetilde{\xi})} |e^{-\frac{2(\widetilde{\xi}-\tau)}{3|\varepsilon|}}||\tau|^{-\frac{1}{2}}|d\tau| \le \frac{4}{3}|\varepsilon|^{-\frac{2}{3}} z_0^{-\frac{3}{4}} \int\limits_0^{x_0^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sqrt{2}\rho}{3|\varepsilon|}} d\rho = 2\sqrt{2}|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} z_0^{-\frac{3}{4}} (1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}),$$

де $\rho = |\widetilde{\xi} - \tau|$, $\delta_1^{(1)}(\widetilde{\xi})$, $\delta_1^{(2)}(\widetilde{\xi})$ — частини шляху, що лежать відповідно в областях $|t\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| \le z_0$ і $|t\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| > z_0$. Тоді $I \le 2z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{2}|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} z_0^{-\frac{3}{4}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}\right)$.

В якості $\gamma_i(x)$ ми використали відповідно прообраз $\delta_i(\widetilde{\xi})$, причому $\gamma_3(x)$ — відрізок, що з'єднує точки $t = 0$ і $t = x$.

Таким чином, оцінивши методом (75) інтеграли, які містяться в (74), і врахувавши, що $F_i(x, \varepsilon) \sim 0$, $i = \overline{1,4}$, запишемо оцінку (74) у вигляді

$$||W_i^{(l+1)}(x, \varepsilon)||_0 \le \sum_{j=1}^{4} L_{ij}(x_0, \varepsilon)||W_j^{(l)}(x, \varepsilon)||_0 + c_i \varepsilon^{m_i},$$

де $||W_i^{(0)}|| = 0$, m_i — невід'ємні цілі числа, c_i — сталі, $L_{14}(x_0, \varepsilon) = L_{23}(x_0, \varepsilon) = L_{32}(x_0, \varepsilon) = L_{41}(x_0, \varepsilon) = 0$, $i = \overline{1,4}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$,

$$L_{11}(x_0, \varepsilon) = L_{22}(x_0, \varepsilon) = 4x_0\|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|A(x, \varepsilon) - B_0(x)\|_0,$$

$$L_{12}(x_0, \varepsilon) = 4|\varepsilon|^{\frac{1}{6}} \left(z_0\sqrt{|\varepsilon|} + \frac{4}{3}x_0^{\frac{3}{4}}\right) \|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|D_1(\varepsilon)\|_0\|\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0,$$

$$L_{13}(x_0, \varepsilon) = 4|\varepsilon|^{\frac{1}{6}} \left(z_0\sqrt{|\varepsilon|} + \frac{4}{3}x_0^{\frac{3}{4}}\right) \|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|A_1(x, \varepsilon)\|_0\|\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0,$$

$$L_{21}(x_0, \varepsilon) = 8|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} \left(z_0 + \sqrt{2}z_0^{-\frac{3}{4}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}\right)\right) \|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|C_1(\varepsilon)\|_0\|(\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}\|_0,$$

$$L_{24}(x_0, \varepsilon) = 8|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} \left(z_0 + \sqrt{2}z_0^{-\frac{3}{4}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}\right)\right) \|\tilde{U}(x)\|_0\|\tilde{U}^{-1}(x)\|_0\|A_1(x, \varepsilon)\|_0\|\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0,$$

$$L_{31}(x_0, \varepsilon) = 16|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} \left(z_0 + \sqrt{2}z_0^{-\frac{3}{4}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}\right)\right) ||(\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}||_0||B_1(x, \varepsilon)||_0,$$

$$L_{33}(x_0, \varepsilon) = 32\left(z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} + 2x_0^{\frac{1}{2}}\right) ||\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})||_0||\varepsilon^{-1}(B(x, \varepsilon) - B_0(x))||_0||(\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}||_0,$$

$$L_{34}(x_0, \varepsilon) = 16|\varepsilon|^{\frac{1}{3}} \left(z_0 + \sqrt{2}z_0^{-\frac{3}{4}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_0^{\frac{3}{2}}}{3|\varepsilon|}}\right)\right) ||D_1(\varepsilon)||_0||\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})||_0,$$

$$L_{42}(x_0,\varepsilon) = 32|\varepsilon|^{\frac{1}{6}} \left(z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x_0^{\frac{3}{4}} \right) ||\hat{U}^{-1}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})||_0 ||B_1(x,\varepsilon)||_0,$$

$$L_{43}(x_0,\varepsilon) = 32|\varepsilon|^{\frac{1}{6}} \left(z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x_0^{\frac{3}{4}} \right) ||C_1(\varepsilon)|| ||(\hat{U}^T(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}||_0,$$

$$L_{44}(x_0,\varepsilon) = 64(2x_0^{\frac{1}{2}} + z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{3}})\|(\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}))^{-1}\|_0 \|\varepsilon^{-1}(B(x,\varepsilon) - B_0(x))\|_0 \|\widehat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\|_0.$$

Введемо наступні позначення:

$$W^{(l+1)} = \begin{pmatrix} \|W_1^{(l+1)} - W_1^{(l)}\|_0 \\ \|W_2^{(l+1)} - W_2^{(l)}\|_0 \\ \|W_3^{(l+1)} - W_3^{(l)}\|_0 \\ \|W_4^{(l+1)} - W_4^{(l)}\|_0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} L_{11}(x_0,\varepsilon) & L_{12}(x_0,\varepsilon) & L_{13}(x_0,\varepsilon) & 0 \\ L_{21}(x_0,\varepsilon) & L_{22}(x_0,\varepsilon) & 0 & L_{24}(x_0,\varepsilon) \\ L_{31}(x_0,\varepsilon) & 0 & L_{33}(x_0,\varepsilon) & L_{34}(x_0,\varepsilon) \\ 0 & L_{42}(x_0,\varepsilon) & L_{43}(x_0,\varepsilon) & L_{44}(x_0,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Склавши різниці $W_i^{(l+1)}(x,\varepsilon) - W_i^{(l)}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, у рівняннях (73), одержимо оцінки у вигляді

$$\|W^{(l+1)}\| \le \|P\| \, \|W^{(l)}\|.$$

Числа x_0 і ε вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\|P\| < 1, \tag{76}$$

що забезпечить рівномірну збіжність послідовностей $W_i^{(l)}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, $l = 0,1,2,\ldots$, до функцій $W_i(x,\varepsilon)$ при $|x| < x_0, 0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0, -\pi < \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) < \dfrac{\pi}{3}$. Можна довести нескінченну диференційовність по x, ε ітерацій $W_i^{(l)}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, $l = 0,1,\ldots$, а потім застосувавши теорему Арцела, одержимо нескінченну диференційовність функцій $W_i(x,\varepsilon)$ по x, ε при $|x| < x_0, 0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0, -\pi < \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) < \dfrac{\pi}{3}$. Довизначимо функції $W_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, у точці $\varepsilon = 0$ і $|x| < x_0$ таким чином:

$$\widetilde{W}_i(x,\varepsilon) = \begin{cases} W_i(x,\varepsilon), & \text{якщо} \quad 0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Тоді $\left.\dfrac{\partial \widetilde{W}_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\widetilde{W}_i(x,\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{m_i-1}\widetilde{C}_i(x,\varepsilon) = 0$, де $\widetilde{C}_i(x,\varepsilon) = \lim\limits_{l\to\infty} \widetilde{C}_1^{(l)}(x,\varepsilon)$, $\widetilde{C}_1^{(l)}(x,\varepsilon) = \dfrac{W_i^{(l)}(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{m_i}}$. Математичною індукцією можна довести нескінченну диференційовність по x і ε функції $\widetilde{W}_i(x,\varepsilon)$ при $|x| < x_0$ і $\varepsilon = 0$, причому

$$\left.\frac{\partial^k \widetilde{W}_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\left(\varepsilon^{m_i-k}\frac{\partial^k \widetilde{C}_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k}\right)\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Тоді із співвідношень (72) випливає нескінченна диференційовність розв'язків диференціальних рівнянь (69) по x і ε при $|x| < x_0, |\varepsilon| \le \varepsilon_0, -\pi < \arg(x\varepsilon^{\frac{2}{3}}) < \dfrac{\pi}{3}$.

Можна довести наступну лему.

Лема 4. *Матрицю* $\tilde{U}(x,\varepsilon)$ *у секторі* $\dfrac{\pi}{3}+\delta \le \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \le \dfrac{5\pi}{3}-\delta$ *можна подати у вигляді*

$$\tilde{U}(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \left(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}\sigma(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})\Omega} \hat{U}\left(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\Omega}, \tag{77}$$

матриці $\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}), \hat{U}^{-1}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}})$ *рівномірно обмежені в області* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0, \dfrac{\pi}{3}+\delta \le \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \le$ $\le \dfrac{5\pi}{3}-\delta, \delta > 0.$

При $|x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| > z_0$

$$\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right) d_2\left(-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) & \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) d_2\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) \\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right) d_1\left(-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) & \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) d_1\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) \end{pmatrix},$$

при $|x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| \le z_0$

$$\hat{U}(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) = \begin{pmatrix} Ai\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) & Ai\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \\ e^{\frac{2\pi i}{3}}Ai'\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) & e^{\frac{4\pi i}{3}}Ai'\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \end{pmatrix} e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\Omega},$$

де $\sigma(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad |x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| \le z_0, \\ 1, & \textit{якщо} \quad |x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}| > z_0, \end{cases} \quad \Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$d_2\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tilde{c}_k\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right)^{-k}, \ \tilde{c}_0 = 1, \quad \tilde{c}_k = \frac{\Gamma(3k+\frac{1}{2})}{54^k k!\Gamma(k+\frac{1}{2})},$$

$$d_1\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\tilde{d}_k\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1}\right)^{-k}, \quad \tilde{d}_0 = 1, \tilde{d}_k = -\frac{6k+1}{6k-1}\tilde{c}_k, k = 1, 2,$$

. . . .

$$Ai(x) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdot(3k-2)}{(3k-3)!}x^{3k-2}\right)+\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdot(3k-4)}{(3k-2)!}x^{3k-2}\right).$$

Згідно з [3] у рівняннях (71) для сектора $\dfrac{\pi}{3}+\delta \le \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \le \dfrac{5\pi}{3}-\delta, \delta > 0, \tilde{U}(x)$ має вигляд $\tilde{U}(x) = \begin{pmatrix} Ai\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}x\right) & Ai\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}x\right) \\ e^{\frac{2\pi i}{3}}Ai'\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}x\right) & e^{\frac{4\pi i}{3}}Ai'\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}x\right) \end{pmatrix}, \tilde{V}(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tilde{U}(x,\varepsilon),$ де $\tilde{U}(x,\varepsilon)$ визначається за формулою (77). З (71), (72), (77) випливає, що для побудови розв'язків інтегральних рівнянь відносно змінних $W_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, у секторі $\frac{\pi}{3} + \delta \leq \leq \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \leq \frac{5\pi}{3} - \delta$ можна застосувати алгоритм за формулами (73), в яких аргумент в експоненті є іншим, а саме, має вигляд $e^{-\frac{2(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})}{3|\varepsilon|}\Omega}$. З нескінченної диференційовності матриць $Z_i(x,\varepsilon)$, $\Phi_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, по x і ε при $|x| < x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, -\pi < \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < \arg(x\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) < \frac{5\pi}{3}$, а також із співвідношень (5), (68) випливає нескінченна диференційовність матриці $\Phi(x,\varepsilon)$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1 і нерівність (76), то формальні ряди (5), (6), (13) є асимптотичними розвиненнями матриць* $\Phi(x,\varepsilon)$, $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$, *нескінченно диференційовних по* x *і* ε *в області* $|x| < x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ *дійсних змінних* x, ε, *такими, що заміна змінних з матрицею* $\Phi(x,\varepsilon)$ *перетворює систему рівнянь (1) до вигляду (3), (4) з матрицями* $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ *вигляду (10).*

Таким чином, за допомогою заміни змінних з матрицею перетворення $\Phi(x,\varepsilon)$, яка є нескінченно диференційовною по x і ε при $|x| < x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, систему рівнянь (1) асимптотично зведено до систем (3), (4), які містять нескінченно диференційовні матриці $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, а також вказано метод інтегрування систем рівнянь (3), (4).

1. *Langer R. E.* The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — **90**. — P. 113–142.
2. *Langer R. E.* The solutions of the differential equations $v''' + \lambda^2 zv' + 3\mu\lambda^2 v = 0$ // Duke Math. J. — 1955. — **22**. — P. 525–542.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
4. *Wasow W.* Linear turning point theory. — New York etc.: Springer, 1985. — 243 p.
5. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. — 1952. — **27**, вып. 6 (52). — С. 3–96.
6. *Федорюк М. Ф.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
7. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 398 с.
8. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
9. *Найфэ А.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
10. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.
11. *Дзядык В. К.* Некоторые специальные функции и их роль при решении неоднородных дифференциальных уравнений // Теория функций и ее приложение. — Киев: Наук. думка, 1979. — С. 61–81.
12. *Шкиль Н. И.* О периодических решениях систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. math. — 1987. — **23**, № 1. — P. 53–62.
13. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1505–1516.
14. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.
15. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1965. — 164 с.

Одержано 16.03.09