УДК 517.9

УМОВИ БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, ул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

Л. М. Шегда

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: shegda@gala.net

We obtain conditions for bifurcations of solutions of linear degenerate Noether boundary-value problems with a small parameter under the assumption that the unperturbed degenerate differential system can be reduced to a central canonical form.

Получены условия бифуркации решений линейных вырожденных нетеровых краевых задач с малым параметром в предположении, что невозмущенная вырожденная дифференциальная система приводится к центральной канонической форме.

1. Постановка задачі та основні припущення. Розглянемо лінійну неоднорідну крайову задачу з малим параметром

$$\big(B\,(t)+\varepsilon B_1\,(t)\big)\,\frac{dx}{dt}=A\,(t)\,x+\varepsilon A_1\,(t)\,x+f\,(t)\,,\quad t\in[a,b],\tag{1}$$

$$l\,x\,(\cdot)=\alpha+\varepsilon l_1 x,\quad \alpha\in R^m,\tag{2}$$

де $A\,(t)\,,\,A_1\,(t)\,,\,B\,(t)\,,\,B_1\,(t)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними достатню кількість разів неперервно диференційовними на $[\,a;b\,]$ функціями: $A\,(t)\,,\,A_1\,(t)\,,$ $B\,(t)\,,\,B_1\,(t)\,\in\,C^{3q-2}[a;b]$; $\det B\,(t)\,=\,0\;\forall\,t\,\in\,[a;b]$; $f\,(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець із простору $C^{q-1}[a;b]$ (значення величини q визначається згідно з теоремою 2.1 [1]); α — m-вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha\in R^m$; l,l_1 — лінійні векторні функціонали, визначені на просторі n-вимірних неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l=\mathrm{col}\,(l_1,\ldots,l_m)\,:$ $C[a,b]\to R^m$, $l_1=\mathrm{col}\,\left(l_1^1,\ldots,l_m^1\right)\,:C[a,b]\to R^m$, $l_i,l_i^1\,:C\,[a,b]\to R$.

Припустимо, що породжуюча вироджена крайова задача

$$B\,(t)\,\frac{dx}{dt}=A\,(t)\,x+f\,(t)\,,\quad t\in[a;b],\tag{3}$$

$$l\,x\,(\cdot)=\alpha\in R^m,\tag{4}$$

отримана з (1), (2) при $\varepsilon=0$, не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t)\in$ $\in C^{q-1}[a,b]$ і $\alpha\in R^m$.

Будемо вважати, що система (3) невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [1, 2].

Знайдемо умови на збурюючі коефіцієнти $A_1(t)$, $B_1(t)$ в диференціальній системі (1) і l_1 у крайовій умові (2), при яких крайова задача (1), (2) має розв'язок.

Згідно з теоремою 1 [3], породжуюча крайова задача (3), (4) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_0(t,\ c_r) = X_r(t)\,c_r + (Gf)(t) + X_{n-s}(t)\,Q^+\alpha \quad \forall\ c_r \in R^r \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in R^m$ у крайовій умові задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)\,f(\tau)\,d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\,f(\cdot)\Bigg)\Bigg) = 0, \quad d = m - n_1. \tag{6}$$

2. Основний результат. Поставлену задачу будемо розв'язувати з використанням методу Вішика – Люстерника [4]. Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметра ε :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(t) = \frac{x_{-1}(t)}{\varepsilon} + x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots . \tag{7}$$

Підставимо ряд (7) у крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} для знаходження коефіцієнта $x_{-1}(t)$ ряду (7) отримаємо вироджену лінійну однорідну крайову задачу

$$B(t)\,\dot{x}_{-1}(t) = A(t)\,x_{-1}(t), \quad l\,x_{-1}(\cdot) = 0. \tag{8}$$

Згідно з (5), однорідна крайова задача (8) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_{-1} = x_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t)\,c_{-1}, \quad c_{-1} \in\ R^r,$$

де r-вимірний вектор-стовпець c_{-1} буде визначено з умови розв'язності задачі для знаходження коефіцієнта $x_0(t)$ ряду (7). Для знаходження коефіцієнта $x_0(t)$ ряду (7) при ε^0 отримаємо вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу

$$\begin{gathered} B(t)\,\dot{x}_0(t) = A(t)\,x_0(t) + A_1(t)\,x_{-1}(t,c_{-1}) - B_1(t)\,\dot{x}_{-1}(t,c_{-1}) + f(t), \\ lx_0(\cdot) = \alpha + l_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}). \end{gathered} \tag{9}$$

Критерій (6) розв'язності задачі (9) має вигляд

$$P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha + l_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\left\{A_1(\tau)x_{-1}(\tau, c_{-1}) -\right.$$

$$\left. - B_1(t)\dot{x}_{-1}(\tau, c_{-1}) + f(\tau)\right\} d\tau - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\times\left\{A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) - B_1(t)\,\dot{x}_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)\right\}\Bigg)\Bigg) = 0,$$

звідки з урахуванням вигляду $x_{-1}(t, c_{-1})$ отримуємо алгебраїчну відносно $c_{-1} \in R^r$ систему

$$B_0 c_{-1} = -P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, f(\tau)\, d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\, f(\cdot)\Bigg)\Bigg), \qquad (10)$$

в якій B_0 — $(d \times r)$-вимірна матриця:

$$B_0 = P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 X_r(\cdot) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{A_1(\tau)X_r(\tau) - B_1(\tau)\,\dot{X}_r(\tau)\Big\} d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Big\{A_1(\cdot)X_r(\cdot) - B_1(\cdot)\,\dot{X}_r(\cdot)\Big\}\Bigg)\Bigg).$$

Для розв'язності системи (10) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, f(\tau)\, d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\, f(\cdot)\Bigg)\Bigg) = 0.$$

Оскільки умова (6) не виконується, з останнього виразу одержуємо умову $P_{B_0^*} = 0$, яка еквівалентна [5] умові

$$\operatorname{rank} B_0 = d \le r. \qquad (11)$$

Тут $P_{B_0^*}$ – $(d \times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на ядро $\ker B_0^*$ матриці $B_0^* = B_0^T$.

Множина розв'язків алгебраїчної відносно $c_{-1} \in R^r$ системи (10) має вигляд

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + P_\rho c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, f(\tau)\, d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\, f(\cdot)\Bigg)\Bigg);$$

B_0^+ — єдина псевдообернена до B_0 матриця; P_{B_0} – $(r \times r)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^r на ядро $\ker B_0$. З огляду на те, що $\operatorname{rank} P_{B_0} = r - \operatorname{rank} B_0 = r - d = n - s - m = \rho$, матрицю P_{B_0} замінимо $(r \times \rho)$-вимірною матрицею P_ρ, яка складається з ρ лінійно незалежних стовпців матриці P_{B_0}.

Однорідна крайова задача (8) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків (з урахуванням виразу для c_{-1})

$$x_{-1}(t, c_\rho) = \overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + X_r(t)\, P_\rho c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho, \tag{12}$$

$$\overline{x}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = X_r(t)\, \overline{c}_{-1}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі (9) при умові (11) має вигляд

$$x_0(t,\ c_0) = X_r(t)\, c_0 + \Big(G\big[A_1(\cdot)\, \overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) - B_1(\cdot)\, \dot{\overline{x}}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) + f(\cdot)\big]\Big)(t) +$$

$$+ X_{n-s}(t)\, Q^+\big[\alpha + l_1 \overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1})\big] +$$

$$+ \Big[\Big(G\big[A_1(\cdot)\, X_r(\cdot) - B_1(\cdot)\, \dot{X}_r(\cdot)\big]\Big)(t) + X_{n-s}(t)\, Q^+ l_1 X_r(\cdot)\Big] P_\rho c_\rho =$$

$$= X_r(t)\, c_0 + F_{-1}(t) + K_{-1}(t) P_\rho c_\rho,$$

де

$$F_{-1}(t) = \Big(G\big[A_1(\cdot)\, \overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) - B_1(\cdot)\, \dot{\overline{x}}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}) + f(\cdot)\big]\Big)(t) +$$

$$+ X_{n-s}(t)\, Q^+\big[\alpha + l_1 \overline{x}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1})\big];$$

$$K_{-1}(t) = \Big(G\big[A_1(\cdot)\, X_r(\cdot) - B_1(\cdot)\, \dot{X}_r(\cdot)\big]\Big)(t) + X_{n-s}(t)\, Q^+ l_1 X_r(\cdot);$$

c_0 — r-вимірний вектор констант, який буде визначено з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7). Для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7) при ε^1 отримаємо вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу

$$\begin{gathered} B(t)\, \dot{x}_1(t) = A(t)\, x_1(t) + A_1(t)\, x_0(t, c_0) - B_1(t)\, \dot{x}_0(t, c_0), \\ l x_1(\cdot) = l_1 x_0(\cdot, c_0). \end{gathered} \tag{13}$$

З критерію розв'язності крайової задачі (13) отримаємо алгебраїчну відносно $c_0 \in R^r$ систему

$$B_0 c_0 = -P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 \{F_{-1}(\cdot) + K_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\} -$$

$$- l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) \Big[A_1(\tau)\{F_{-1}(\tau) + K_{-1}(\tau) P_\rho c_\rho\} -$$

$$- B_1(\tau)\Big\{\dot{F}_{-1}(\tau) + \dot{K}_{-1}(\tau) P_\rho c_\rho\Big\}\Big] d\tau - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t) L \Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\times \Big[A_1(\cdot)\{F_{-1}(\cdot) + K_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\} - B_1(\cdot)\Big\{\dot{F}_{-1}(\cdot) + \dot{K}_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\Big\}\Big]\Bigg)\Bigg).$$

При умові (11) з останньої рівності знаходимо $c_0 \in R^r$:

$$c_0 = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 \{F_{-1}(\cdot) + K_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\} -$$

$$- l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) \Big[A_1(\tau)\{F_{-1}(\tau) + K_{-1}(\tau) P_\rho c_\rho\} -$$

$$- B_1(\tau)\Big\{\dot{F}_{-1}(\tau) + \dot{K}_{-1}(\tau) P_\rho c_\rho\Big\}\Big] d\tau - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t) L \Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\times \Big[A_1(\cdot)\{F_{-1}(\cdot) + K_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\} - B_1(\cdot)\Big\{\dot{F}_{-1}(\cdot) + \dot{K}_{-1}(\cdot) P_\rho c_\rho\Big\}\Big]\Bigg)\Bigg) + P_\rho c_\rho.$$

Останній вираз запишемо у вигляді

$$c_0 = \bar{c}_0 + D_0 P_\rho c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho,$$

де

$$\bar{c}_0 = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 F_{-1}(\cdot) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) W_{-1}(\tau) d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t) L \Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot) W_{-1}(\cdot)\Bigg)\Bigg),$$

$$D_0 = I_r - B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 K_{-1}(\cdot) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, V_{-1}(\tau) d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\, V_{-1}(\cdot)\Bigg)\Bigg),$$

$$W_{-1}(t) = A_1(t) F_{-1}(t) - B_1(t) \dot{F}_{-1}(t),$$

$$V_{-1}(t) = A_1(t) K_{-1}(t) - B_1(t) \dot{K}_{-1}(t).$$

Таким чином, крайова задача (9) при умові (11) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$x_0(t,\ c_\rho) = \overline{x}_0(t, \overline{c}_0) + \overline{X}_0(t)\, P_\rho c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho,$$

де

$$\overline{x}_0(t, \overline{c}_0) = X_r(t)\overline{c}_0 + F_{-1}(t),$$

$$\overline{X}_0(t) = X_r(t) D_0 + K_{-1}(t).$$

При умові (11) крайова задача (13) має ρ-параметричну сім'ю розв'язків

$$x_1(t,\ c_1) = X_r(t)\, c_1 + F_0(t) + K_0(t)\, P_\rho c_\rho,$$

в якій c_1 — r-вимірний вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_2(t)$ ряду (7). Продовжуючи цей процес, бачимо, що коефіцієнти $x_i(t)$ ряду (7) визначаються з крайової задачі

$$B(t)\, \dot{x}_i(t) = A(t)\, x_i(t) + A_1(t)\, x_{i-1}(t, c_{i-1}) - B_1(t)\, \dot{x}_{i-1}(t, c_{i-1}),$$

$$l x_i(\cdot) = l_1 x_{i-1}(\cdot, c_{i-1}),$$

яка при умові (11) має ρ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_i(t,\ c_i) = \overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\, P_\rho c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) = X_r(t)\overline{c}_i + F_{i-1}(t),$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 F_{i-1}(\cdot) - l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, W_{i-1}(\tau)\, d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\, W_{i-1}(\cdot)\Bigg)\Bigg), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$W_{i-1} = A_1(t)F_{i-1}(t) - B_1(t)\dot{F}_{i-1}(t),$$

$$F_{i-1}(t) = \left(G\left[A_1(\cdot)\,\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{-1}) - B_1(\cdot)\,\dot{\overline{x}}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{-1})\right]\right)(t) + \\ + X_{n-s}(t)Q^{+}l_1\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{-1}), \tag{14}$$

$$\overline{X}_i(t) = X_r(t)D_i + K_{i-1}(t), \quad \overline{X}_{-1}(t) = X_r(t),$$

$$D_i = I_r - B_0^{+}P_{Q_d^*}\Bigg(l_1K_{i-1}(\cdot) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)\,V_{i-1}(\tau)\,d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\,V_{i-1}(\cdot)\Bigg)\Bigg),$$

$$V_{i-1}(t) = A_1(t)K_{i-1}(t) - B_1(t)\dot{K}_{i-1}(t),$$

$$K_{i-1}(t) = \left(G\left[A_1(\cdot)\,\overline{X}_{i-1}(\cdot) - B_1(\cdot)\,\dot{\overline{X}}_{i-1}(\cdot)\right]\right)(t) + X_{n-s}(t)\,Q^{+}l_1\overline{X}_{i-1}(\cdot).$$

Отже, справедливим є наступне твердження.

Теорема. *Нехай вироджена породжуюча крайова задача (3), (4) при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ *і* $\alpha \in R^m$ *не має розв'язків. Тоді крайова задача (1), (2) при умові*

$$\operatorname{rank} B_0 = d, \quad d = m - \operatorname{rank} Q,$$

має $\rho = (n-s-m)$*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків у вигляді частини ряду Лорана:*

$$x(t,\ c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i[\overline{x}_i(t,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\,P_\rho c_\rho] \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho, \tag{15}$$

де коефіцієнти $\overline{x}_i(t,\overline{c}_i)$, $\overline{c}_i$, $\overline{X}_i(t)$ *визначаються за формулами (14).*

Зауваження. 1. За аналогією з [4, 6] можна довести, що ряд (15) при кожному фіксованому достатньому малому $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ буде збіжним при будь-якому $t \in [a,b]$.

2. Умова (11) є достатньою умовою існування розв'язків крайової задачі (1), (2). У випадку, коли умова (11) не виконується, розв'язки крайової задачі (1), (2) необхідно шукати у вигляді частини ряду Лорана (7) з від'ємними степенями ε, які менші за -1.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.

2. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1980. — 216 с.

3. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303–312.

4. *Вишик В. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.

5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 572 с.

6. *Бойчук А. А., Коростиль И. А., Фечкан М.* Условия бифуркации решения абстрактного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. — 2007. — **43**, № 4. — С. 481 – 487.

Одержано 30.06.08