УДК 517.9

МЕТОД СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ II ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРАМИ ВОЛЬТЕРРИ

Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: ninelll@ukr.net
kasyanov@i.ua

We consider a class of second order differential-operator inclusions with Volterra-type operators. Using the singular perturbation method we study the problem of existence of solutions for this type of inclusions. We obtain important a priori estimates for solutions and their derivatives. An example illustrating the proposed approach to study the problem under consideration is given.

Рассмотрен класс дифференциально-операторных включений II порядка с операторами типа Вольтерра. С помощью метода сингулярных возмущений исследована проблема существования решения задачи Коши для данных включений. Получены важные априорные оценки решений и их производных. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный подход к исследованию рассмотренной проблемы.

1. Вступ. Значний прогрес при дослідженні нелінійних граничних задач для рівнянь з частинними похідними став можливим завдяки глибокому розвитку методів нелінійного аналізу, які знайшли застосування у різних розділах математики. Останнім часом стало природним зводити ці задачі до вивчення нелінійних операторних та диференціально-операторних рівнянь та включень у функціональних просторах. При такому підході результати для конкретних систем отримують як прості наслідки операторних теорем [1, 2].

Диференціально-операторні рівняння та включення еволюційного типу вивчаються досить інтенсивно. При доведенні властивостей розв'язувального оператора (непорожності, компактності, зв'язнозначності і т. п.) часто використовують метод монотонності, метод компактності та їх комбінації.

У даній роботі досліджується питання розв'язності для еволюційних включень у нескінченновимірних просторах вигляду

$$y'' + A(y') + B(y) \ni f$$

з багатозначними некоерцитивними відображеннями типу Вольтерри, що є важливим для застосувань.

Останні дослідження, що стосувалися даного напрямку, охоплювали клас задач, в яких A розглядався як однозначний сильномонотонний оператор, а B — багатозначний оператор, який можна зобразити у вигляді суми однозначного лінійного самоспряженого монотонного оператора та багатозначного демізамкненого обмеженого оператора. Дані задачі є коерцитивними і були розглянуті у роботах [3, 4]. Більш частинні випадки еволюційних включень розглянуто у роботах [5 – 8].

© Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов, 2009

Мета цієї статті — розвинути даний напрямок для ширшого класу задач, а саме, для задач, в яких A — багатозначний некоерцитивний немонотонний оператор, а багатозначний оператор B задовольняє подібні умови.

Ідея І. В. Скрипника переходу до підпослідовностей у класичному означенні однозначного псевдомонотонного оператора [9], розвинена для диференціально-операторних рівнянь та включень І порядку в нескінченновимірних просторах з +-коерцитивними W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями у роботах [10–15], дала змогу досліджувати суттєво ширший клас прикладних задач. Зокрема, дана методологія в поєднанні з некоерцитивною теорією [1, 10, 15], яку ми вперше переносимо на еволюційні включення ІІ порядку, дозволяє суттєво розширити клас „некоерцитивних," „немонотонних" задач із суттєво багатозначними відображеннями, для яких можна одержати розв'язність. Зауважимо, що при даному перенесенні за рахунок багатозначності виникають принципові технічні складнощі, які не є характерними для диференціально-операторних рівнянь.

Більш того, доведення розв'язності ґрунтується на методі сингулярних збурень [2, 15], що дозволяє одержати ряд апріорних оцінок для розв'язків, за допомогою яких можна вивчати властивості одержаних розв'язків (наприклад, динаміку). Як приклад, що ілюструє запропонований підхід, розглядається клас задач із нелінійними операторами, для якого доводиться розв'язність. Одержані результати є новими як для включень, так і для рівнянь.

Зауважимо, що для диференціально-операторних рівнянь ІІ порядку питання розв'язності вивчалось авторами у роботах [16, 17].

2. Постановка задачі. Нехай H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ над полем дійсних чисел, $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ і $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ — деякі рефлексивні сепарабельні банахові простори над полем дійсних чисел, неперервно вкладені в H так, що

$$V := V_1 \cap V_2 \quad \text{є щільною у просторах} \quad V_1, \quad V_2 \quad \text{і} \quad H,$$

до того ж одне з вкладень $V_i \subset H$ є компактним. Зауважимо, що топологічно спряжений простір до H відносно білінійної форми $(\cdot,\cdot)$ ототожнимо із самим H. Тоді будемо мати

$$V_1 \subset H \subset V_1^*, \quad V_2 \subset H \subset V_2^*$$

з неперервними і щільними вкладеннями, де $(V_i^*, \|\cdot\|_{V_i^*})$ — топологічно спряжений до V_i простір відносно канонічної білінійної форми

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i} : V_i^* \times V_i \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

яка збігається на $H \times V$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H. Розглянемо функціональні простори

$$X_i = L_{r_i}(S; H) \cap L_{p_i}(S; V_i), \quad Y = L_2(S; H),$$

де $S = [0, T]$, $T > 0$, $1 < p_i \le r_i < +\infty$, $i = 1, 2$, $\max\{r_1; r_2\} \ge 2$. Простори X_i — рефлексивні банахові простори з нормами $\|y\|_{X_i} = \|y\|_{L_{p_i}(S;V_i)} + \|y\|_{L_{r_i}(S;H)}$. Розглянемо рефлексивний (це випливає з [1], гл. 1) банахів простір $X = X_1 \cap X_2$ з нормою $\|y\|_X = \|y\|_{X_1} + \|y\|_{X_2}$. Ототожнимо простори $L_{q_i}(S; V_i^*) + L_{r_i'}(S; H)$ і X_i^*. Аналогічно

$$X^* = X_1^* + X_2^* \equiv L_{q_1}(S;V_1^*) + L_{q_2}(S;V_2^*) + L_{r_1'}(S;H) + L_{r_2'}(S;H), \quad Y^* \equiv Y,$$

де ${r_i}^{-1} + {r_i'}^{-1} = {p_i}^{-1} + {q_i}^{-1} = 1$.

Зауважимо, що простір X неперервно та щільно вкладений в Y, зокрема норма $\|\cdot\|_Y$ є неперервною відносно $\|\cdot\|_X$ на X.

Визначимо на $X^* \times X$ форму двоїстості:

$$\langle f, y\rangle = \int\limits_S (f_{11}(\tau), y(\tau))_H\, d\tau + \int\limits_S (f_{12}(\tau), y(\tau))_H\, d\tau + \int\limits_S \langle f_{21}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1}\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_S \langle f_{22}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_2}\, d\tau = \int\limits_S (f(\tau), y(\tau))\, d\tau,$$

де $f = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}$, $f_{1i} \in L_{r_i'}(S;H)$, $f_{2i} \in L_{q_i}(S;V_i^*)$. Зазначимо, що для будь-якого $f \in X^*$

$$\|f\|_{X^*} = \inf_{\substack{f = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}:\\ f_{1i} \in L_{r_i'}(S;H),\ f_{2i} \in L_{q_i}(S;V_i^*),\ i=1,2}} \max\Big\{ \|f_{11}\|_{L_{r_1'}(S;H)};$$

$$\|f_{12}\|_{L_{r_2'}(S;H)};\ \|f_{21}\|_{L_{q_1}(S;V_1^*)};\ \|f_{22}\|_{L_{q_2}(S;V_2^*)} \Big\}.$$

Нехай $A, B : X \rightrightarrows X^*$ — багатозначні, у загальному випадку, відображення. Ставиться задача Коші про розв'язність диференціально-операторного включення з некоерцитивними багатозначними відображеннями Вольтерри W_{λ_0}-псевдомонотонного типу

$$\begin{aligned} &y'' + Ay' + By \ni f, \\ &y(0) = a_0, \quad y'(0) = \bar{0}, \quad y \in C(S;V), \quad y' \in C(S;H), \end{aligned} \tag{1}$$

де $a_0 \in V$ та $f \in X^*$ — довільні фіксовані елементи, похідна y' елемента $y \in X$ розглядається у сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S;V^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S);V_w^*)$ з $V = V_1 \cap V_2$, V_w^* — простір V^* з топологією $\sigma(V^*, V)$ [1].

Більш точні умови на оператори A та B розглянемо в теоремі 1 та наслідку 1. Розв'язність задачі (1) будемо доводити методом сингулярних збурень. Для цього розглянемо, взагалі кажучи, багатозначне двоїсте відображення

$$J(y) = \big\{\xi \in X^* \mid \langle \xi, y\rangle_X = \|\xi\|_{X^*}^2 = \|y\|_X^2 \big\} \quad \forall y \in X.$$

На підставі теореми 4 та твердження 8 з [18, с. 202, 203] для довільного $f \in X^*$ відображення

$$J^{-1}(f) = \{y \in X \mid f \in J(y)\} = \{y \in X \mid \langle f, y\rangle_X = \|f\|_{X^*}^2 = \|y\|_X^2\}$$

також визначене на всьому просторі X і є максимально монотонним багатозначним відображенням.

Розглянемо апроксимуюче включення

$$-\varepsilon\frac{d}{dt}\,J^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}\,y_\varepsilon\right)+\frac{d^2}{dt^2}y_\varepsilon+A\left(\frac{d}{dt}\,y_\varepsilon\right)+B(y_\varepsilon)\ni f \tag{2}$$

та простір

$$W=\{y\in X\mid y'\in X^*\}.$$

На W введемо норму графіка похідної

$$\|y\|_W=\|y\|_X+\|y'\|_{X^*}\quad\text{для будь-якого}\quad y\in W.$$

Рефлексивний банахів простір W компактно вкладений в Y, тобто норма $\|\cdot\|_Y$ є компактною відносно $\|\cdot\|_W$ на W [2].

Будемо говорити, що $y\in X$ з $\dfrac{d}{dt}y\in W$ — розв'язок задачі (1) — отримано *методом сингулярних збурень*, якщо $\left\{y,\,\dfrac{d}{dt}\,y\right\}$ — слабка границя деякої підпослідовності $\left\{y_{\varepsilon_{n_k}},\,\dfrac{d}{dt}\,y_{\varepsilon_{n_k}}\right\}_{k\geq1}$ послідовності $\left\{y_{\varepsilon_n},\,\dfrac{d}{dt}\,y_{\varepsilon_n}\right\}_{n\geq1}$ ($\varepsilon_n\searrow0$ при $n\to\infty$) у просторі $X\times W$, де для кожного $n\geq1$ $y_{\varepsilon_n}\in X$ з $\dfrac{d}{dt}\,y_{\varepsilon_n}\in W$ — розв'язок задачі (4).

3. Класи відображень. Нехай Y — деякий банахів простір, Y^* — його топологічно спряжений, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y:Y^*\times Y\to\mathbb{R}$ — спарювання, $A:Y\rightrightarrows Y^*$ — строге багатозначне відображення. Для нього визначимо верхню $[A(y),\omega]_+=\sup\limits_{d\in A(y)}\langle d,w\rangle_X$ і нижню $[A(y),\omega]_-=$ $=\inf\limits_{d\in A(y)}\langle d,w\rangle_X$ опорні функції, де $y,\omega\in X$, а також верхню $\|A(y)\|_+=\sup\limits_{d\in\mathcal{A}(y)}\|d\|_{X^*}$ і нижню $\|A(y)\|_-=\inf\limits_{d\in\mathcal{A}(y)}\|d\|_{X^*}$ норми. Розглянемо пов'язані з ним відображення $\mathrm{co}A:Y\rightrightarrows$ $\rightrightarrows Y^*$ та $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A:Y\rightrightarrows Y^*$, визначені співвідношеннями $(\mathrm{co}A)(y)=\mathrm{co}(A(y))$ та $(\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y))=\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}$ $(A(y))$ відповідно, де $\underline{*}$ — $*$-слабке замикання в Y^*, $\mathrm{co}\,(A(y))$ — опукла оболонка множини $A(y)$.

Позначимо через $C_v(Y)$ сім'ю всіх непорожніх замкнених опуклих обмежених підмножин із простору Y.

Твердження 1 [10]. *Нехай $A,B:Y\rightrightarrows Y^*$. Тоді справджуються наступні співвідношення:*

1) $[A(y),v_1+v_2]_+\leq[A(y),v_1]_++[A(y),v_2]_+$,
$[A(y),v_1+v_2]_-\geq[A(y),v_1]_-+[A(y),v_2]_-$,
$[A(y),v_1+v_2]_+\geq[A(y),v_1]_++[A(y),v_2]_-$,
$[A(y),v_1+v_2]_-\leq[A(y),v_1]_++[A(y),v_2]_-\ \ \forall y,v_1,v_2\in Y$;

2) $[A(y),v]_+=-[A(y),-v]_-$,
$[A(y)+B(y),v]_{+(-)}=[A(y),v]_{+(-)}+[B(y),v]_{+(-)}\ \ \forall y,v\in Y$;

3) $[A(y),v]_{+(-)}=[\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y),v]_{+(-)}\ \ \forall y,v\in Y$;

4) $[A(y),v]_{+(-)} \le \|A(y)\|_{+(-)}\|v\|_Y$,
$d_H\big(A(y),B(y)\big) \ge \big|\|A(y)\|_{+(-)} - \|B(y)\|_{+(-)}\big|$,
$\|A(y)-B(y)\|_+ \ge \big|\|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_-\big|$,
де $d_H(\cdot,\cdot)$ *— метрика Хаусдорфа.*

Твердження 2 [10]. *Включення* $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$ *виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$[A(y),v]_+ \ge \langle d,v\rangle_Y \quad \forall\, v \in Y.$$

Твердження 3 [10]. *Нехай* $a(\cdot,\cdot) : (D \subset Y) \times Y \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Для кожного* $y \in D \subset Y$ *функціонал* $Y \ni w \mapsto a(y,w)$ *є додатно однорідним, опуклим та напівнеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли існує багатозначне відображення* $A : Y \rightrightarrows Y^*$ *таке, що* $D(A) = D$ *та*

$$a(y,w) = [A(y),w]_+ \quad \forall\, y \in D(A),\ w \in Y.$$

Означення 1. *Оператор* $A : X \rightrightarrows X^*$ *називають оператором типу Вольтерри, якщо для довільного* $t \in S$ *із рівності* $u(s) = v(s)$ *для майже всіх* $s \in [0,t]$ $u,v \in X$ *випливає, що* $(\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\ A(u))(s) = (\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\ A(v))(s)$ *для майже всіх* $s \in [0,t]$ *у тому сенсі, що* $[A(u),\xi_t]_+ = [A(v),\xi_t]_+$ $\forall \xi_t \in X$ *таких, що* $\xi_t(s) = 0$ *для майже всіх* $s \in S\backslash[0,t]$.

Означення 2. *Строге багатозначне відображення* $A : Y \rightrightarrows Y^*$ *називають:*

+(-)-коерцитивним, якщо існує дійсна функція $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *обмежена знизу на обмежених в* $\mathbb{R}_+$ *множинах, така, що* $\gamma(s) \to +\infty$ *при* $s \to +\infty$ *та*

$$[A(y),y]_{+(-)} \ge \gamma(\|y\|_Y)\|y\|_Y \quad \forall y \in Y;$$

обмеженим, якщо для кожного $L > 0$ *існує таке* $l > 0$, *що*

$$\|A(y)\|_+ \le l \quad \forall y \in Y : \|y\|_Y \le L;$$

локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in Y$ *існують такі сталі* $m > 0$ *та* $M > 0$, *що*

$$\|A(\xi)\|_+ \le M \quad \text{для всіх} \quad \xi \in Y : \|y-\xi\|_Y \le m.$$

скінченновимірно локально обмеженим, якщо для будь-якого скінченновимірного підпростору $F \subset Y$ $A\big|_F$ *є локально обмеженим на* $(F, \|\cdot\|_Y)$.

Вищезгадане багатозначне відображення задовольняє властивість (П), якщо для деякої непорожньої обмеженої підмножини $B \subset Y$, для деякого $k > 0$ і для деякого селектора d $d(y) \in A(y)\quad \forall y \in B$ з нерівності

$$\langle d(y),y\rangle_Y \le k \quad \forall y \in B$$

випливає існування $K > 0$ такого, що

$$\|d(y)\|_{Y^*} \le K \quad \forall y \in B.$$

Означення 3. *Будемо говорити, що дійсна функція двох змінних $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ належить класу Φ, якщо $C(r_1; \cdot\,) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією при кожному $r_1 \geq 0$, до того ж*

$$\tau^{-1}C(r_1; \tau r_2) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0+ \quad \forall r_1, r_2 \geq 0.$$

Нехай тепер W — деякий нормований простір із нормою $\|\cdot\|_W$. Припустимо, що вкладення $W \subset Y$ є неперервним. Нехай також $\|\cdot\|'_W$ — деяка (напів-)норма на Y, компактна відносно $\|\cdot\|_W$ на W та неперервна відносно $\|\cdot\|_Y$ на Y.

Зауваження 1. Далі, $y_n \rightharpoonup y$ в Y буде означати, що y_n слабко збігається до y в рефлексивному банаховому просторі Y.

Означення 4. *Строге багатозначне відображення $A : Y \rightrightarrows Y^*$ називають:*
радіально напівнеперервним знизу (р.н.н.зн.), якщо

$$\varliminf_{t \to 0+} [A(y + t\xi), \xi]_+ \geq [A(y), \xi]_- \quad \forall y, \xi \in Y;$$

радіально напівнеперервним зверху (р.н.н.зв.), якщо для будь-яких y, $\xi \in Y$ дійсна функція $t \to [A(y + t\xi), \xi]_+$ є напівнеперервною зверху справа у точці $t = 0$;
оператором з напівобмеженою варіацією на W (з (Y, W)-н.о.в.), якщо

$$\exists C \in \Phi \quad \forall R \geq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in Y : \|y_1\|_Y \leq R, \quad \|y_2\|_Y \leq R$$

виконується нерівність

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ - C(R; \|y_1 - y_2\|'_W);$$

оператором з N-напівобмеженою варіацією на W (з N-н.о.в. на W), якщо

$$\exists C \in \Phi \quad \forall R \geq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in Y : \|y_1\|_Y \leq R, \quad \|y_2\|_Y \leq R$$

виконується нерівність

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_- - C(R; \|y_1 - y_2\|'_W);$$

λ-псевдомонотонним на W (w_λ-псевдомонотонним), якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n \geq 0} \subset W$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W при $n \to +\infty$, із нерівності

$$\varlimsup_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_Y \leq 0, \tag{3}$$

де $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$ для будь-якого $n \geq 1$, випливає існування підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ з $\{y_n\}_{n \geq 1}$ та $\{d_{n_k}\}_{k \geq 1}$ з $\{d_n\}_{n \geq 1}$, для яких

$$\varliminf_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_Y \geq [A(y_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in Y; \tag{4}$$

λ_0-псевдомонотонним на W (w_{λ_0}-псевдомонотонним), якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset W$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, де $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$ для будь-якого $n \geq 1$, із нерівності (3) випливає існування підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{y_n\}_{n\geq 1}$ та $\{d_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{d_n\}_{n\geq 1}$, для яких виконується (4).

Зауваження 2. Ідея переходу до підпослідовності в означенні однозначного псевдомонотонного оператора була запропонована в роботі [9].

Лема 1 [10]. *Будь-який строгий багатозначний оператор $A : Y \rightrightarrows Y^*$ з $(Y; W)$-напівобмеженою варіацією є обмеженозначним, локально обмеженим і задовольняє властивість* (Π). *Якщо додатково A — р.н.н.зн., то він є λ_0-псевдомонотонним на W.*

Нехай $Y = Y_1 \cap Y_2$, де $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$ і $(Y_2, \|\cdot\|_{Y_2})$ — деякі рефлексивні банахові простори.

Означення 5. *Пару відображень $A : Y_1 \to C_v(Y_1^*)$ і $B : Y_2 \to C_v(Y_2^*)$ називають s-взаємно обмеженою, якщо для будь-якого $M > 0$, для будь-якої обмеженої множини $D \subset Y$ і для будь-яких селекторів $d_A \in A$ і $d_B \in B$ існує $K > 0$ таке, що із*

$$y \in D \quad i \quad \langle d_A(y), y\rangle_{Y_1} + \langle d_B(y), y\rangle_{Y_2} \leq M$$

випливає

$$\text{або} \quad \|d_A(y)\|_{Y_1^*} \leq K, \quad \text{або} \quad \|d_B(y)\|_{Y_2^*} \leq K.$$

Зауваження 3. Обмежене строге багатозначне відображення $A : Y \rightrightarrows Y^*$ задовольняє умову (Π); λ-псевдомонотонне на W відображення є λ_0-псевдомонотонним на W. Обернене твердження має місце для обмежених багатозначних відображень.

Якщо один із операторів пари $(A; B)$ обмежений, то пара $(A; B)$ є s-взаємно обмеженою. Більш того, якщо кожен з $(A; B)$ задовольняє умову (Π), то їх сума також задовольняє умову (Π) та пара $(A; B)$ є s-взаємно обмеженою.

Нехай тепер $W = W_1 \cap W_2$, де $(W_1, \|\cdot\|_{W_1})$ і $(W_2, \|\cdot\|_{W_2})$ — банахові простори такі, що $W_i \subset Y_i$ з неперервним вкладенням.

Лема 2 [14]. *Нехай $A : Y_1 \to C_v(Y_1^*)$ і $B : Y_2 \to C_v(Y_2^*)$ — s-взаємно обмежені λ_0-псевдомонотонні на W_1 і відповідно на W_2 багатозначні відображення. Тоді $C := A + B : Y \to C_v(Y^*)$ — λ_0-псевдомонотонне на W відображення.*

Далі припускатимемо виконання такої умови для $A : X \rightrightarrows X^*$:

Означення 6. *Багатозначне відображення $A : X \rightrightarrows X^*$ задовольняє умову (H), якщо для довільних $y \in X$, $n \geq 1$, $\{d_i\}_{i=1}^n \subset A(y)$, та $E_j \subset S$, $j = \overline{1,n}$, таких, що E_j — вимірні множини, $\cup_{j=1}^n E_j = S$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, існує елемент $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$, де $d(\tau) = \sum_{j=1}^n d_j(\tau)\chi_{E_j}(\tau)$, і $\chi_{E_j}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E_j, \\ 0 & \text{у противному разі.} \end{cases}$*

Зауважимо, що внаслідок леми 1 [19] з того, що $A : X \to H(X^*)$, випливає, що A задовольняє умову (H). Обернене твердження виконується для відображень, які діють з X в $C_v(X^*)$ (детальніше див. [19, с. 196, 197]).

4. Основний результат. У цьому пункті будемо використовувати позначення для просторів, введені в п. 2.

Теорема 1. *Нехай $\lambda_A \geq 0$ є фіксованим, $p_0 = \min\{p_1, p_2\}$, $I : X \to X^*$ — тотожне відображення, простір V компактно вкладений у банахів простір V_0 і вкладення $V_0 \subset V^*$ є неперервним. Припустимо, що $A + \lambda_A I : X \to C_v(X^*)$ — +-коерцитивний, р.н.н.зн. багатозначний оператор Вольтерри з $(X; W)$-н.о.в. з $\|\cdot\|'_W = \|\cdot\|_{L_{p_0}(S;V_0)}$, який задовольняє умову (H); $B : Y \to C_v(Y^*)$ — багатозначний оператор Вольтерри, який задовольняє умову (H), умову зростання*

$$\exists\, c_1, c_2 \geq 0 \quad \forall y \in Y : \quad \|By\|_+ \leq c_1\|y\|_Y + c_2 \tag{5}$$

та умову неперервності

$$d_H(B(z), B(z_0)) \to 0, \quad \text{якщо} \quad z \to z_0, \tag{6}$$

де $d_H(\cdot;\cdot)$ — метрика Хаусдорфа в $C_v(Y^*)$.

Тоді для довільних $a_0 \in V$ та $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок $u \in X$ задачі (1), отриманий методом сингулярних збурень, до того ж $u' \in W$.

Доведення. Як і при доведенні теореми VII.1.1 з [1], зведемо еволюційне включення з (1) до включення першого порядку. Нехай $R : X \to X$ (відповідно $Y \to Y$) — оператор Вольтерри, визначений співвідношенням

$$(Rv)(t) = a_0 + \int\limits_0^t v(s)ds \quad \forall v \in X \quad (\text{ відповідно} \quad \forall v \in Y) \quad \forall t \in S.$$

R є ліпшиц-неперервним оператором з X в X (відповідно з Y в Y). Якщо u — розв'язок задачі (1) і $u' \in W$, то $v = u'$ буде розв'язком задачі

$$\begin{aligned} &v' + A(v) + B(Rv) \ni f, \\ &v(0) = \bar{0}, \quad v \in W. \end{aligned} \tag{7}$$

Навпаки, якщо $v \in W$ — розв'язок задачі (7), то $u = Rv \in X$ — розв'язок задачі (1) такий, що $u' \in W$.

Розглянемо багатозначний оператор

$$\mathcal{A} := A + B \circ R : X \to C_v(X^*)$$

та $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$, $\lambda_B = 1 + c_1 c_3$, де c_3 — стала Ліпшиця для оператора $R : Y \to Y$. Для довільного $y \in X$ і майже всіх $t \in S$ покладемо

$$y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}y(t), \quad f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}f(t), \quad (A_\lambda y_\lambda)(t) = e^{-\lambda t}(\mathcal{A}y)(t) + \lambda y_\lambda(t),$$

тобто $(d_\lambda \in A_\lambda(y_\lambda)) \Leftrightarrow (\forall w \in X\ \langle d_\lambda, w\rangle_X \leq [A(y) + \lambda y, w_\lambda]_+)$. Зауважимо, що $A_\lambda(y_\lambda)$ є непорожньою, оскільки існує $d_\lambda \in A_\lambda(y_\lambda)$, яке можна вибрати так:

$$d_\lambda(t) = e^{-\lambda t}d(t) + \lambda y_\lambda(t) \quad \text{для} \quad d \in \mathcal{A}(y) \quad \text{та майже всіх} \quad t \in S.$$

Тоді $A_\lambda : X \to C_v(X^*)$ та $v \in W$ є розв'язком задачі (7) тоді і тільки тоді, коли $v_\lambda \in W$ є розв'язком задачі

$$v_\lambda' + A_\lambda v_\lambda \ni f_\lambda, \quad v_\lambda(0) = \bar{0}. \tag{8}$$

Перевіримо, що $A_\lambda : X \to C_v(X^*)$ задовольняє такі умови:
α_1) A_λ є +-коерцитивним на X;
α_2) A_λ є λ_0-псевдомонотонним на W;
α_3) A_λ є локально обмеженим на X;
α_4) A_λ задовольняє умову (П) на X.
Перевіримо умову α_1). Зафіксуємо $y \in X$. Оскільки $\|y_\lambda\|_X \leq \|y\|_X$, то

$$\|y_\lambda\|_X^{-1}[A_\lambda y_\lambda, y_\lambda]_+ \geq \|y\|_X^{-1} \sup_{\zeta(y)\in A(y)} \int_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda_A y(t), y(t)\big)\, dt +$$

$$+ \|y\|_X^{-1} \inf_{\zeta(y)\in B(Ry)} \int_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda_B y(t), y(t)\big)\, dt.$$

Спочатку оцінимо перший доданок. Зауважимо, що

$$[(A + \lambda_A I)y, y]_+ \geq \hat{\gamma}(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y \in X,$$

де в якості $\hat{\gamma} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ можна вибрати обмежену знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неспадну функцію таку, що $\hat{\gamma}(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$. Оскільки A — оператор типу Вольтерри, то для фіксованого $y \in X$

$$\sup_{\zeta\in A} \int_0^t \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t} \quad \forall t \in S,$$

де $\|y\|_{X_t} = \|y_t\|_X$, $y_t(\tau) = y(\tau)$ для майже всіх $\tau \in [0, t]$ та $y_t(\tau) = 0$ для майже всіх $\tau \in (t, T]$. Нехай

$$g_\zeta(\tau) = \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau), y(\tau)\big), \quad \zeta \in A, \tau \in S,$$

$$h(t) = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t}, \quad t \in S.$$

Для всіх $t \in S$ $h(t) \geq \min\{\hat{\gamma}(0), 0\}\|y\|_X$ та

$$\sup_{\zeta\in A} \int_0^t g_\zeta(\tau) d\tau \geq h(t) \quad \forall t \in S.$$

Для довільних $y \in X$ та майже всіх $t \in S$ по аналогії з означенням $A_\lambda(y_\lambda)$ покладемо

$$(A_1 y)(t) = \Big[e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda T}\Big]\big((Ay)(t) + \lambda_A y(t)\big),$$

$$(A_2 y)(t) = e^{-2\lambda T}\big((Ay)(t) + \lambda_A y(t)\big),$$

$$(\hat{A} y)(t) = e^{-2\lambda t}\big((Ay)(t) + \lambda_A y(t)\big).$$

Тому внаслідок твердження 1

$$[\hat{A}y, y]_+ \geq e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda T \sup_{\zeta \in A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau), y(\tau)\big) d\tau.$$

На підставі умови (H) для A легко показати, що для всіх $y \in X$ виконується нерівність

$$\sup_{\zeta \in A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq -C_1 \|y\|_X,$$

де $C_1 = \max\{-\hat{\gamma}(0), 0\} \geq 0$ не залежить від $y \in X$.

Звідси одержуємо

$$\|y\|_X^{-1} \sup_{\zeta \in A} \int_0^T e^{-2\lambda\tau} \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq e^{-2\lambda T} \hat{\gamma}(\|y\|_X) - 2\lambda C_1 T. \tag{9}$$

Тепер оцінимо другий доданок. Як і в попередньому випадку, оскільки $B \circ R$ — оператор типу Вольтерри, то

$$\inf_{\zeta \in B \circ R} \int_0^t \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_B y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq -(c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) c_4 \|y\|_X > -\infty \quad \forall t \in S,$$

де $c_4 > 0$ така, що $\|\cdot\|_Y \leq c_4 \|\cdot\|_X$. Тоді

$$\inf_{\zeta \in B \circ R} \int_0^T e^{-2\lambda\tau} \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_B y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq -e^{-2\lambda T} (c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) c_4 \|y\|_X +$$

$$+ 2\lambda \int_0^T e^{-2\lambda s} \inf_{\zeta \in B \circ R} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_B y(\tau), y(\tau)\big) d\tau ds \geq$$

$$\geq -(c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) c_4 \|y\|_X \quad \forall y \in X.$$

Таким чином, використовуючи нерівність (9), маємо

$$\|y_\lambda\|_X^{-1} [A_\lambda y_\lambda, y_\lambda]_+ \geq e^{-2\lambda T} \hat{\gamma}(\|y_\lambda\|_X) - 2\lambda C_1 T - (c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) c_4 \quad \forall y \in X,$$

оскільки $\|y\|_X \geq \|y_\lambda\|_X$. Отже, $A_\lambda : X \to C_v(X^*)$ є +-коерцитивним.

Перевіримо умову α_2). Для довільного $y \in X$ і майже всіх $t \in S$ покладемо

$$\left(A^1_\lambda y_\lambda\right)(t) = e^{-\lambda t}(Ay)(t) + \lambda_A y_\lambda(t), \quad \left(A^2_\lambda y_\lambda\right)(t) = e^{-\lambda t}(B(Ry))(t) + \lambda_B y_\lambda(t).$$

Зауважимо, що $A^1_\lambda(y_\lambda) + A^2_\lambda(y_\lambda) = A_\lambda(y_\lambda)\ \forall y \in X$.

Спочатку покажемо, що A^1_λ — р.н.н.зн. оператор з $(X; W)$-н.о.в. Радіальна напівнеперервність знизу легко перевіряється. Доведемо напівобмеженість варіації. За умовою теореми для всіх $R > 0$, $y, \xi \in X$ таких, що $\|y\|_X \le R$, $\|\xi\|_X \le R$, виконується

$$[A(y) - A(\xi) + \lambda_A y - \lambda_A \xi, y - \xi]_- + C_A(R; \|y - \xi\|'_W) \ge 0.$$

Покладемо $\hat{C}_A(R;t) = \max\limits_{\tau\in[0,t]} C_A(R;\tau)$ для всіх $R, t \ge 0$ ($\hat{C}_A \in \Phi$),

$$z_t(\tau) = \begin{cases} z(\tau), & 0 \le \tau \le t, \\ \bar{0}, & t < \tau \le T, \end{cases} \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S \quad \text{і всіх} \quad z \in X.$$

Нехай $\zeta, \eta \in A$ — фіксовані селектори. Оскільки A — оператор типу Вольтерри, то

$$\int\limits_0^t \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau) - \eta(\xi)(\tau) - \lambda_A \xi(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau + \hat{C}_A\left(R; \|y - \xi\|'_{W_t}\right) \ge$$

$$\ge [(A + \lambda_A I)(y_t) - (A + \lambda_A I)(\xi_t), y_t - \xi_t]_- + \hat{C}_A(R; \|y_t - \xi_t\|'_W) \ge 0 \quad \forall t \in S,$$

тому що $\|y_t\|_X \le \|y\|_X$ та $\|y_t - \xi_t\|'_W \le \|y - \xi\|'_W$. Тут $\|\cdot\|'_{W_t} = \|\cdot\|_{L_{p_0}([0,t];V_0)}$.

Покладемо

$$g(\tau) = (\zeta(y)(\tau) + \lambda_A y(\tau) - \eta(\xi)(\tau) - \lambda_A \xi(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)), \quad \tau \in S,$$

$$h(t) = \hat{C}_A\left(R; \|y - \xi\|'_{W_t}\right), \quad t \in S.$$

Зауважимо, що функція $S \ni t \to h(t)$ є монотонно неспадною та $\int\limits_0^t g(\tau)d\tau \ge -h(t)\ \forall t \in S$.

Отже,

$$\int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau} g(\tau)d\tau = e^{-2\lambda T}\int\limits_0^T g(\tau)d\tau + 2\lambda \int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}\int\limits_0^\tau g(s)\,ds\,d\tau \ge -h(T).$$

Таким чином,

$$[A^1_\lambda y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- \ge [A^1_\lambda \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_+ - \hat{C}_A(R; \|y - \xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)}). \tag{10}$$

Розглянемо ваговий простір $L_{p_0,\lambda}(S;V_0)$, що складається з вимірних функцій $y_\lambda : S \to V_0$, для яких інтеграл $\int_S e^{\lambda t p_0}\|y_\lambda(t)\|^{p_0}_{V_0}\,dt$ є скінченним. Тоді

$$\|y - \xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)} = \left(\int\limits_S e^{\lambda t p_0}\|y_\lambda(t) - \xi_\lambda(t)\|^{p_0}_{V_0} dt\right)^{1/p_0} = \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{p_0,\lambda}(S;V_0)}.$$

Тому з нерівності (10) отримуємо

$$[A^1_\lambda y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- \ge [A^1_\lambda \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_+ - \hat{C}_A(R; \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{p_0,\lambda}(S;V_0)}).$$

Доведення $(X;W)$-н.о.в. для $A^1_\lambda : X \to C_v(X^*)$ завершує той факт, що вкладення $W \subset \subset L_{p_0,\lambda}(S;V_0)$ є компактним [2] (теорема 1.5.1).

Оскільки довільний р. н. н. зн. багатозначний оператор з $(X;W)$-н. о. в. є λ_0-псевдомонотонним на W [15] (твердження 1.2.23), то маємо шукане твердження для A^1_λ.

Тепер розглянемо A^2_λ. Спочатку покажемо, що A^2_λ — р.н.н.зв. оператор з N-н.о.в. на W. Радіальна напівнеперервність зверху легко перевіряється. Доведемо напівобмеженість варіації.

Як і в роботі [16], можна перевірити, що $(B \circ R) : X \to C_v(X^*)$ — оператор з N-н.о.в. на W з $\|\cdot\|'_W = \|\cdot\|_Y$. За $C_B(R,t)$ для всіх $R \ge 0$ та $t \ge 0$ можна взяти

$$C_B(R,t) = t \sup_{\substack{z_1,\, z_2 \,\in\, X \,:\, \|z_i\|_X \,\le\, R, \\ \|z_1 - z_2\|_Y \,\le\, t,\ i \,=\, 1,2}} d_H(B(Rz_1); B(Rz_2)).$$

Тоді для деякого $C_B \in \Phi$ та всіх $R > 0, y, \xi \in X$ таких, що $\|y\|_X \le R$, $\|\xi\|_X \le R$, випливає

$$[B(Ry) + \lambda_B y, y - \xi]_- - [B(R\xi) + \lambda_B \xi, y - \xi]_- + C_B(R; \|y - \xi\|_Y) \ge 0.$$

Покладемо $\hat{C_B}(R;t) = \max\limits_{\tau \in [0,t]} C_B(R;\tau)$ для всіх $R, t \ge 0$ ($\hat{C_B} \in \Phi$). Оскільки $B \circ R$ — оператор типу Вольтерри, то

$$\inf_{\zeta \in B \circ R} \int\limits_0^t \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda_B y(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big) d\tau -$$

$$- \inf_{\eta \in B \circ R} \int\limits_0^t \big(\eta(\xi)(\tau) - \lambda_B \xi(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big) d\tau + \hat{C_B}\left(R; \|y - \xi\|_{Y_t}\right) \ge 0 \quad \forall t \in S.$$

Тут $\|\cdot\|_{Y_t} = \|\cdot\|_{L_2([0,t];H)}$.

Покладемо

$$g_\zeta(\tau) = \big(\zeta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big), \quad \zeta \in X^*, \quad \tau \in S,$$

$$h(t) = \hat{C_B}\left(R; \|y - \xi\|_{Y_t}\right), \quad t \in S.$$

Зауважимо, що функція $S \ni t \to h(t)$ є монотонно неспадною та

$$\inf_{\zeta \in B(Ry) + \lambda_B y} \int\limits_0^t g_\zeta(\tau)\, d\tau - \inf_{\eta \in B(R\xi) + \lambda_B \xi} \int\limits_0^t g_\eta(\tau) d\tau \ge -h(t) \quad \forall t \in S.$$

Отже, для фіксованого $\zeta \in B(Ry) + \lambda_B y$

$$\int_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\zeta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau - \inf_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \int_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau =$$

$$= \sup_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \int_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\zeta(\tau) - \eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau.$$

Тому внаслідок твердження 1

$$e^{-2\lambda T} \sup_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \int_0^T \big(\zeta(\tau) - \eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau +$$

$$+ \sup_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \int_0^T \left[e^{-2\lambda\tau} - e^{-2\lambda T}\right]\big(\zeta(\tau) - \eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau \geq$$

$$\geq -e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda T \sup_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(\tau) - \eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)\, d\tau.$$

За допомогою умови (H) для B легко показати, що для всіх $y \in X$ виконується нерівність

$$\sup_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(\tau) - \eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau \geq -h(T).$$

Отже,

$$\inf_{\zeta \in B(Ry)+\lambda_B y} \int_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\zeta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau -$$

$$- \inf_{\eta \in B(R\xi)+\lambda_B \xi} \int_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\eta(\tau), y(\tau) - \xi(\tau)\big)d\tau \geq -\left[e^{-2\lambda T} + 2\lambda T\right] \hat{C_B}\left(R; \|y - \xi\|_Y\right).$$

Покладемо $\tilde{C_B}(R;t) = \left[e^{-2\lambda T} + 2\lambda T\right] \hat{C_B}(R;t)$, $R, t \geq 0$ ($\tilde{C_B} \in \Phi$). Тоді

$$[A_\lambda^2 y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- - [A_\lambda^2 \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- \geq$$

$$\geq -\tilde{C_B}(R; \|y - \xi\|_Y) = -\tilde{C_B}(R; \|y - \xi\|_{L_2(S;H)}). \tag{11}$$

Розглянемо ваговий простір $L_{2,\lambda}(S;H)$, що складається з вимірних функцій $y_\lambda : S \to H$, для яких інтеграл $\int_S e^{2\lambda t}\|y_\lambda(t)\|_H^2 dt$ є скінченним. Тоді

$$\|y - \xi\|_{L_2(S;H)} = \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{2,\lambda}(S;H)}.$$

Тому з (11) отримуємо

$$[A_\lambda^2 y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- \geq [A_\lambda^2 \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- - \tilde{C}_B(R; \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{2,\lambda}(S;H)}).$$

Доведення N-н.о.в. для $A_\lambda^2 : X \to C_v(X^*)$ завершує той факт, що вкладення $W \subset \subset L_{2,\lambda}(S;H)$ є компактним. Це безпосередній наслідок компактності вкладення $W \subset Y$.

Перевіримо тепер λ_0-псевдомонотонність A_λ^2 на W. Нехай $y_{\lambda,n} \to y_\lambda$ слабко в W (тому $y_{\lambda,n} \to y_\lambda$ сильно в $Y_\lambda := L_{2,\lambda}(S;H)$), $A_\lambda^2(y_{\lambda,n}) \ni d_{\lambda,n} \to d_\lambda \in X^*$ слабко в X^* і

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_{\lambda,n}, y_{\lambda,n} - y_\lambda \rangle \leq 0.$$

Використовуючи властивість N-напівобмеженої варіації на W оператора A_λ^2, робимо висновок, що для кожного $v_\lambda \in X$

$$\begin{aligned} \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_{\lambda,n}, y_{\lambda,n} - v_\lambda \rangle &\geq \underline{\lim_{n\to\infty}} [A_\lambda^2(y_{\lambda,n}), y_{\lambda,n} - v_\lambda]_- \geq \\ &\geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \left[A_\lambda^2(v_\lambda), y_{\lambda,n} - v_\lambda\right]_- - \tilde{C}_B(R; \|y_\lambda - v_\lambda\|_{Y_\lambda}). \end{aligned} \tag{12}$$

Оцінимо спочатку перший член правої частини в (12). Функція $Y_\lambda \ni h_\lambda \mapsto [A_\lambda^2(v_\lambda), h_\lambda]_-$ є неперервною для будь-якого $v_\lambda \in X \subset Y_\lambda$. Тому з (12) випливає, що

$$\langle d_{\lambda,n}, y_{\lambda,n} - y_\lambda \rangle \to 0,$$

а тому

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_{\lambda,n}, y_\lambda - v_\lambda \rangle \geq [A_\lambda^2(v_\lambda), y_\lambda - v_\lambda]_- - \tilde{C}_B(R; \|y_\lambda - v_\lambda\|_{Y_\lambda}) \quad \forall v_\lambda \in X.$$

Замінивши в останній нерівності v_λ на $tw_\lambda + (1-t)y_\lambda$, де $w_\lambda \in X$, $t \in [0,1]$, а потім поділивши результат на t і перейшовши до границі при $t \to 0+$, завдяки радіальній напівнеперервності зверху для A_λ^2 знайдемо

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_{\lambda,n}, y_{\lambda,n} - w_\lambda \rangle \geq [A_\lambda^2(y_\lambda), y_\lambda - w_\lambda]_- \quad \forall w_\lambda \in X.$$

Таким чином, λ_0-псевдомонотонність A_λ^2 на W доведено.

Для доведення λ_0-псевдомонотонності A_λ на W використаємо лему 2. Зауважимо, що пара відображень $(A_\lambda^1, A_\lambda^2)$ є s-взаємообмеженою, оскільки відображення A_λ^2 обмежене внаслідок умови зростання (5) та обмеженості тотожного відображення.

Умови α_3) та α_4) випливають із обмеженості A_λ^2, $(X;W)$-н.о.в. A_λ^1 та леми 1.

Оскільки відображення $A_\lambda : X \to C_v(X^*)$ задовольняє умови α_1)$-\alpha_4$), то з (теореми 3.1) [20] випливає, що існує $v_\lambda \in W$ — розв'язок задачі (8).

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай* $p_2 \geq 2$, $\lambda_A \geq 0$ *є фіксованим,* $I : X \to X^*$ *— тотожне відображення,* $p_0 = \min\{p_1, p_2\}$, *простір* V *компактно вкладений у банахів простір* V_0 *і вкладення* $V_0 \subset V^*$ *є неперервним. Припустимо, що* $A + \lambda_A I : X \to C_v(X^*)$ *— +-коерцитивний,* *р.н.н.зн. багатозначний оператор Вольтерри з $(X;W)$-н.о.в. з $\|\cdot\|'_W = \|\cdot\|_{L_{p_0}(S;V_0)}$, який задовольняє умову (H); $B : Y \to C_v(Y^*)$ — багатозначний оператор Вольтерри, який задовольняє умову (H), умову зростання (5) та умову неперервності (6); $C : X \to X^*$ — оператор з властивістю*

$$(Cu)(t) = C_0 u(t) \quad \forall u \in X \quad \forall t \in S,$$

де $C_0 : V_2 \to V_2^*$ — лінійний, обмежений, самоспряжений, монотонний оператор.

Тоді для довільних $a_0 \in V$ та $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок задачі

$$y'' + Ay' + By + Cy \ni f,$$

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = \bar{0}, \quad y \in C(S;V), \quad y' \in C(S;H),$$

отриманий методом сингулярних збурень, до того ж $y' \in W$.

5. Приклад. Нехай Ω — обмежена область із $\mathbb{R}^n$ з регулярною межею $\partial\Omega$, $S = [0;T]$, $Q = \Omega \times S$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times S$, $1 < p = p_1 = p_2$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що задовольняє умову зростання

$$\exists\, c_1, c_2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad |\Phi(t)| \le c_1|t| + c_2,$$

та знакову умову

$$\exists\, c_3 > 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R} : \quad (\Phi(t) - \Phi(s))(t - s) \ge -c_3(s - t)^2.$$

Нехай однозначні неперервні функції $S \times \mathbb{R} \ni (t, y) \to \theta_i(t, y) \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$, задовольняють умову

$$\exists\, c_1, c_2 \ge 0 \quad \forall t \in S, \quad x \in \mathbb{R} : \quad -c_2(1 + |x|) \le \theta_1(t, x) \le$$
$$\le \theta_2(t, x) \le c_1(1 + |x|).$$

Для довільного $f \in X^* = L_2(S; L_2(\Omega)) + L_q(S; W^{-1,q}(\Omega))$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \partial t}\right) + \left|\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} +$$
$$+ \Phi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right) - \Delta y(x,t) +$$
$$+ [\theta_1(t, y(x,t)); \theta_2(t, y(x,t))] \ni f(x,t) \quad \text{майже скрізь на} \quad Q, \tag{13}$$

$$y(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{майже скрізь на} \quad \Omega,$$

$$y(x,t) = 0 \quad \text{майже скрізь на} \quad \partial\Omega.$$

За оператор $A : L_p(S; W_0^{1,p}(\Omega)) \to L_q(S; W^{-1,q}(\Omega))$ візьмемо $(Au)(t) = A(u(t))$ [16, 17], де

$$A(\varphi) = A_1(\varphi) + A_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^2(\bar{\Omega}),$$

$$A_1(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + |\varphi|^{p-2}\varphi, \quad A_2(\varphi) = \Phi(\varphi);$$

за оператор $B : L_2(Q) \to L_2(Q)$ —

$$B(u) = \{v \in L_2(Q) | \theta_1(t, u(x,t)) \le v(x,t) \le \theta_2(t, u(x,t)) \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in Q\},$$

а за оператор $C : L_2(S; H_0^1(\Omega)) \to L_2(S; H^{-1}(\Omega))$ — оператор з властивістю

$$(Cu)(t) = C_0 u(t), \quad \text{де} \quad C_0(v) = -\Delta v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Покладемо $H = L_2(\Omega)$, $V_1 = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V_2 = H_0^1(\Omega)$ і розглянемо

$$X = L_p(S; V_1) \cap L_2(S; H) \cap L_2(S; V_2), \quad X^* = L_q(S; V_1^*) + L_2(S; H),$$

$$Y = L_2(S; H) = L_2(Q).$$

Лема 3. *За наведених вище умов задача (13) має розв'язок $y \in C(S; V)$, $y' \in C(S; H)$, $y'' \in X^*$, одержаний методом сингулярних збурень.*

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
3. *Papageorgiou N. S.* Existence of solutions for the second order evolution inclusions // J. Appl. Math. and Stochast. Anal. — 1994. — **7**, № 4. — P. 525 – 535.
4. *Papageorgiou N. S., Yannakakis N.* Second order nonlinear evolution inclusions ii: structure of the solution set // Acta math. sinica. English Ser. — 2006. — **22**, № 1. — P. 195 – 206.
5. *Ahmed N. U., Kerbal S.* Optimal control of nonlinear second order evolution equations //J. Appl. Math. and Stochast. Anal. — 1993. — № 6. — P. 123 – 136.
6. *Gasinsky L., Smolka M.* An existence theorem for wave-type hyperbolic hemivariational inequalities // Math. Nachr. — 2002. — № 242. — S. 79 – 90.
7. *Kartsatos A., Markov L.* An L^2-approach to second order nonlinear evolutions involving m-accrative operators in Banach spaces // Different. Integral Equat. — 2001. — № 14. — P. 833 – 866.
8. *Migorsky S.* Existence, variational and optimal control problems for nonlinear second order evolution inclusions // Dynam. Syst. and Appl. — 1995. — № 4. — P. 513 – 528.
9. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 442 с.
10. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. — 590 с.
11. *Мельник В. С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 2. — С. 184 – 194; № 4. — С. 573 – 595.
12. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень з множиннозначними відображеннями псевдомонотонного типу // Наук. вісті НТУ України „КПІ". — 2005. — № 2.— С. 139 – 151.

13. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень // Доп. НАН України. — 2005. — № 9. — С. 20–24.

14. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — № 1. — С. 82–105.

15. *Kasyanov P. O, Melnik V. S, Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with w_λ-pseudomonotone maps. — Kyiv: Naukova Dumka, 2007. — 308 p.

16. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтерри // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 2. — С. 204–228.

17. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Про розв'язність диференціально-операторних рівнянь II порядку з некоерцитивними операторами. Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами W_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Доп. НАН України. — 2006. — № 12. — С. 15–19.

18. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 512 с.

19. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень II порядку з W_λ-псевдомонотонними відображеннями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 2. — С. 195–213.

20. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями W_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісн. — 2007. — **4**, № 4. — С. 536–582.

Одержано 15.02.08,
після доопрацювання — 02.04.08