УДК 517.946

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Б. П. Ткач

Межрегиональная академия управления персоналом
Украина, 03039, Киев, ул. Фрометовская, 2

Л. Б. Урманчева

Государственная академия статистики, учета и аудита
Украина, 04107, Киев, ул. Подгорная, 1
e-mail: urmancheva@rambler.ru

Using a generalized numerical-analytical method we find sufficient conditions for existence of solutions of systems of partial differential equations with an integral condition.

За допомогою узагальнення чисельно-аналітичного методу встановлено достатні умови існування розв'язків систем рівнянь із частинними похідними з інтегральною умовою.

1. Введение. Многоточечные задачи для уравнений с частными производными рассматривались во многих работах (см., например, [1–4]).

Обобщая развитый А. М. Самойленко и Н. И. Ронто [5] численно-аналитический метод отыскания решений многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, Л. Б. Урманчева [6] получила достаточные условия существования решений многоточечных задач для систем уравнений с частными производными гиперболического типа.

Исследованию разрешимости нелокальной задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения посвящена работа [7]. Расширение результатов работы [6] на системы уравнений с частными производными гиперболического типа с интегральным условием рассматривается в предлагаемой работе.

2. Постановка задачи и формулировка основных результатов. В настоящей работе численно-аналитический метод обобщается на системы уравнений с частными производными с интегральным условием.

Рассматривается система уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = P(t,x)u(t,x) + f(t,x,u(t,x),u'_t(t,x)), \tag{1}$$

где $u, f \in E_n$, $P(t,x)$ — непрерывная $(n \times n)$-матрица, $0 \le t \le T$, $0 \le x \le a$.

Изучаются условия существования решений системы уравнений (1), удовлетворяющих интегральному

$$A(x)u(0,x) + B(x)u(T,x) + \int\limits_0^T C(\xi,x)u(\xi,x)d\xi = \omega(x), \tag{2}$$

граничному

$$u(t,0) = u_0(t) + v(0) \tag{3}$$

и начальному

$$u(0,x) = u_0(0) + v(x) \tag{4}$$

условиям. В интегральном условии (2) $A(x), B(x), C(t,x)$ — непрерывные $(n{\times}n)$-матрицы при $0 \le x \le a$, $0 < t < T$.

Вектор-функция $v(x)$ находится в процессе отыскания решения системы уравнений (1). Вектор-функция $u_0(t)$ задана, непрерывна вместе со своей производной,

$$|u_0(t)| \le \boldsymbol{N}, \quad \left|u_0'(t)\right| \le \boldsymbol{N}_1. \tag{5}$$

Вектор-функция $\omega(x)$ задана, непрерывна и определена при $x \in [0,a]$,

$$|\omega(x)| \le \boldsymbol{H}. \tag{6}$$

Векторные неравенства здесь и ниже понимаются в смысле покомпонентных неравенств.

Предположим, что выполняются следующие условия:

I. Вектор-функция $f(t,x,u,u_1)$ определена и непрерывна в области $\Omega : (t,x,u,u_1) \in \in [0,T] \times [0,a] \times D \times D_1$, где D, D_1 — ограниченные области E_n, и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t,x,u,u_1)| \le \boldsymbol{M}, \quad |P(t,x)u + f(t,x,u,u_1)| \le \boldsymbol{M}_0, \tag{7}$$

$$|f(t,x,\bar{u},\bar{u}_1) - f(t,x,u,u_1)| \le K_1 |\bar{u} - u| + K_2 |\bar{u}_1 - u_1|. \tag{8}$$

Элементы постоянных матриц K_1, K_2 неотрицательны, $(n \times n)$-матрица $P(t,x)$ непрерывна при $(t,x) \in [0,T]\times[0,a]$, а векторы $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_0$ имеют неотрицательные компоненты.

II. Непрерывные матрицы $A(x)$, $B(x)$ и $C(t,x)$ таковы, что существует обратная матрица

$$\left[A(x) + B(x) + \int\limits_0^T C(\xi,x)d\xi\right]^{-1}.$$

III. Собственные числа матрицы $a(B_1+B_2)$ расположены в круге единичного радиуса, причем элементы матриц B_1 и B_2 определены соотношениями

$$(B_1)_{ij} = \sup_{x,\eta} \left| \left\{ \left[A(x) + B(x) + \int\limits_0^T C(\xi, x) d\xi \right]^{-1} B(x) \int\limits_0^T P(\xi, \eta) d\xi \right\}_{ij} \right|,$$
$$(B_2)_{ij} = \sup_{x,\eta} \left| \left\{ \left[A(x) + B(x) + \int\limits_0^T C(\xi, x) d\xi \right]^{-1} S(x, \eta) \right\}_{ij} \right|, \tag{9}$$

где

$$S(x, \eta) = \int\limits_0^T C(\xi, x) \int\limits_0^\xi P(\xi_1, \eta) d\xi_1 d\xi.$$

IV. В круге единичного радиуса расположены собственные числа матрицы Q,

$$Q = a(PT + K_1T + K_2) + (aPT + aK_1T + K_1 + aK_2)\times$$
$$\times \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aT. \tag{10}$$

Здесь элементы матриц P, L_0, B_0 и C_1, $\left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0$ определены соотношениями

$$P_{ij} = \sup_{t,x} \left| \{P(t, x)\}_{ij} \right|, (B_0)_{ij} = \sup_{x} \left| \{B(x)\}_{ij} \right|,$$

$$(L_0)_{ij} = \sup_{x} \left| \left\{ \left[A(x) + B(x) + \int\limits_0^T C(\xi, x) d\xi \right]^{-1} \right\}_{ij} \right|,$$

$$(C_1)_{ij} = \sup_{t,x} \left| \{C(t, x)\}_{ij} \right|, \quad \left\{ \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 \right\}_{ij} = \left| \left\{ (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right\}_{ij} \right|. \tag{11}$$

Для построения решения системы уравнений (1) – (4) используем итерационный метод. Последовательные приближения выбираем в виде

$$u_0(t, x) = u_0(t) + v_0(x),$$

$$u_{n+1}(t,x) = u_0(t) + \sum_{i=0}^{n+1} v_i(x) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x \left[P(t,x)u_n(t,x) + f(t,x,\tilde{u}_n(t,x),\tilde{u}_n'(t,x))\right] dt dx, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

причем $\tilde{u}_n(t,x) = u_n(t,x) - \delta_n(x)$.

Вектор-функции $v_0(x)$, $v_i(x)$ находятся из условия, чтобы последовательные приближения $u_n(t,x)$ удовлетворяли интегральному условию

$$A(x)\tilde{u}_n(0,x) + B(x)\tilde{u}_n(T,x) + \int_0^T C(\xi,x)\tilde{u}_n(\xi,x)d\xi = \omega(x), \quad n = 1,2,\ldots. \tag{13}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть система уравнений с частными производными с интегральным условием (1)–(4) удовлетворяет условиям I–IV.*

Тогда существует единственное решение системы уравнений (1)–(4), являющееся равномерным по t,x при $t \in [0,T]$, $x \in [0,a]$ пределом последовательности приближений (12) и удовлетворяющее системе интегро-дифференциальных уравнений

$$u(t,x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^t \int_0^x \left[P(\xi,\eta)u(\xi,\eta) + f(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u'(\xi,\eta))\right] d\xi d\eta, \tag{14}$$

причем функция $v(x)$ есть равномерный по x при $x \in [0,a]$ предел последовательности $\left\{\sum_{i=0}^{n} v_i(x)\right\}$.

Доказательство. Для доказательства равномерной по t,x сходимости последовательных приближений $u_n(t,x)$ оцениваем разности $u_1(t,x) - u_0(t,x)$, $u_2(t,x) - u_1(t,x), \ldots$.

Из (12) имеем

$$u_1(t,x) = u_0(t) + v_0(x) + v_1(x) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x \left[P(\xi,\eta)(u_0(\xi) + v_0(\eta)) + f(\xi,\eta,u_0(t),u_0(\xi),u_0'(\xi))\right] d\xi d\eta. \tag{15}$$

Вектор-функция $v_0(x)$ находится из условия (13) при $n = 1$:

$$A(x)\tilde{u}_1(0,x) + B(x)\tilde{u}_1(T,x) + \int_0^T C(\xi,x)\tilde{u}_1(\xi,x)d\xi = \omega(x). \tag{16}$$

Подставляя в (16) выражение для $u_1(t,x)$ из (15), получаем систему интегральных уравнений для нахождения $v_0(x)$:

$$v_0(x) + [A(x)+B(x)+C_0(x)]^{-1}\, B(x)\int\limits_0^x P_0(\eta)v_0(\eta)d\eta +$$

$$+ [A(x)+B(x)+C_0(x)]^{-1}\int\limits_0^x S(x,\eta)v_0(\eta)d\eta \,=\, \Psi_0(x), \tag{17}$$

где

$$C_0(x) \,=\, \int\limits_0^T C(\xi,\eta)d\xi, \quad P_0(x) \,=\, \int\limits_0^T P(\xi,\eta)d\xi,$$

$$S(x,\eta) \,=\, \int\limits_0^T C(\xi,\eta)\int\limits_0^\xi P(\xi_1,\eta)d\xi_1 d\xi,$$

$$\Psi_0(x) \,=\, [A(x)+B(x)+C_0(x)]^{-1}\Bigg\{\omega(x) - A(x)u_0(0) - B(x)u_0(T) -$$

$$- B(x)\int\limits_0^T\int\limits_0^x \left[P(\xi,\eta)u_0(\xi) + f(\xi,\eta,u_0(\xi),u_0'(\xi))\right] d\eta d\xi - \int\limits_0^T C(\xi,x)u_0(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_0^T C(\xi,x)\int\limits_0^\xi\int\limits_0^x \left[P(\xi_1,\eta)u_0(\xi_1) + f(\xi_1,\eta,u_0(\xi_1),u_0'(\xi_1))\right] d\xi_1 d\eta d\xi\Bigg\}.$$

Используя неравенства (5) – (7), соотношения (9) и (11), находим оценку для $\Psi_0(x)$:

$$|\Psi_0(x)|_0 \le L_0\Big[\boldsymbol{H} + |A(x)|_0\,|u_0(0)| + |B(x)|_0\,|u_0(T)| + |B(x)|_0\, aT\boldsymbol{M}_0 +$$

$$+ |C(\xi,x)|_0\, T\boldsymbol{N} + |C(\xi,x)|_0\, a\frac{T^2}{2}\boldsymbol{M}_0\Big].$$

Существование решения системы интегральных уравнений (17) следует из условия III, теоремы 3.2 [8, с. 253] и следующей леммы [6].

Лемма. *Пусть в системе интегральных уравнений*

$$z(x) + \int\limits_0^x \Phi(x,\eta) z(\eta) d\eta = \Psi(x), \tag{18}$$

где матрица $\Phi(x,\eta)$ *и вектор-функция* $\Psi(x)$ *непрерывны по своим аргументам, собственные числа матрицы* $a\Phi_0$, $\{\Phi_0\}_{i,j} = \sup\limits_{\substack{0 \le x \le a \\ 0 \le \eta \le a}} \left| \{\Phi_0(x,\eta)\}_{ij} \right|$, *расположены в круге единичного радиуса.*

Тогда существует единственное решение системы уравнений (18).

Теперь из (17) находим оценку для $v_0(x)$:

$$|v_0(x)|_0 \le \boldsymbol{S}_0, \tag{19}$$

где

$$\boldsymbol{S}_0 = \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 |\Psi_0(x)|_0 .$$

Используя соотношение (15), неравенства (7) и (19), получаем оценки

$$|\tilde{u}_1(t,x) - u_0(t,x)| \le aT\boldsymbol{M}_0,$$

$$|\tilde{u}_1(t,x) - \tilde{u}_0(t,x)| \le aT\boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{S}_0, \tag{20}$$

$$\left| \tilde{u}'_{1t}(t,x) - \tilde{u}'_{0t}(t,x) \right| \le a\boldsymbol{M}_0.$$

Для отыскания вектор-функции $v_1(x)$ используем интегральное условие для второго приближения $u_2(t,x)$:

$$A(x)\tilde{u}_2(0,x) + B(x)\tilde{u}_2(T,x) + \int\limits_0^T C(\xi,x)\tilde{u}_2(\xi,x) d\xi = \omega(x). \tag{21}$$

Подставляя в (21) выражение для $u_2(t,x)$ и вычитая из правой и левой частей полученного соотношения соответственно левую и правую части соотношения (17), приходим к следующей системе интегральных уравнений для отыскания $v_1(x)$:

$$v_1(x) + [A(x) + B(x) + C_0(x)]^{-1} B(x) \int\limits_0^x P_0(\eta) v_1(\eta) d\eta +$$

$$+ [A(x) + B(x) + C_0(x)]^{-1} \int\limits_0^x S(x,\eta) v_1(\eta) d\eta = \Psi_1(x), \tag{22}$$

где

$$\Psi_1(x) = -[A(x)+B(x)+C_0(x)]^{-1}\Bigg[B(x)\int\limits_0^T\int\limits_0^x \Big\{P(\xi,x)[\tilde u_1(\xi,\eta)-u_0(\xi,\eta)]+$$

$$+f(\xi,\eta,\tilde u_1(\xi,\eta),u'_{1\xi}(\xi,\eta))-f(\xi,\eta,\tilde u_0(\xi,\eta),u'_{0\xi}(\xi,\eta))\Big\}d\eta d\xi+$$

$$+\int\limits_0^T C(\xi,x)\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi \Big\{P(\xi_1,\eta)[\tilde u_1(\xi_1,\eta)-u_0(\xi_1,\eta)]+$$

$$+f(\xi_1,\eta,\tilde u_1(\xi_1,\eta),\tilde u'_{1\xi_1}(\xi_1,\eta))-f(\xi_1,\eta,\tilde u_0(\xi_1,\eta),\tilde u'_{0\xi}(\xi_1,\eta))\Big\}d\xi_1 d\eta d\xi\Bigg]. \qquad (23)$$

Используя условие Липшица (8) и неравенства (20), из (23) получаем оценку

$$|\Psi_1(x)|_0 \le L_0\left(B_0+C_1\frac{T}{2}\right)aT\boldsymbol{R}_0,$$

где

$$\boldsymbol{R}_0 = PaT\boldsymbol{M}_0+K_1(aT\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{S}_0)+K_2a\boldsymbol{M}_0.$$

Существование решения $v_1(x)$ системы интегральных уравнений (22) следует из приведенной выше леммы и условия III.

Для функции $v_1(x)$ получаем оценку

$$|v_1(x)|_0 \le \left|(E-aB_1-aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0+C_1\frac{T}{2}\right)aT\boldsymbol{R}_0.$$

Для разности $\tilde u_2(t,x)-u_1(t,x)$ имеем

$$\begin{aligned}|\tilde u_2(t,x)-u_1(t,x)| &\le aT\left[E+\left|(E-aB_1-aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0+C_1\frac{T}{2}\right)aT\right]\boldsymbol{R}_0,\\ \left|\tilde u'_{2t}(t,x)-\tilde u'_{1t}(t,x)\right| &\le a\left[E+\left|(E-aB_1-aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0+C_1\frac{T}{2}\right)aT\right]\boldsymbol{R}_0.\end{aligned} \qquad (24)$$

Используя интегральные условия для приближений $u_3(t,x)$ и $u_2(t,x)$ и вычитая их левые и правые части, интегральное уравнение для отыскания функции $v_2(x)$ записываем в виде

$$v_2(x) + [A(x) + B(x) + C_0(x)]^{-1} B(x) \int_0^x P_0(\eta) v_2(\eta) d\eta +$$

$$+ [A(x) + B(x) + C_0(x)]^{-1} \int_0^x S(x,\eta) v_2(\eta) d\eta = \Psi_2(x), \qquad (25)$$

причем $\Psi_2(x)$ получается из $\Psi_1(x)$ при увеличении на единицу индексов у $u_1(t,x)$ и $u_0(t,x)$ в правой части (23).

С помощью условия Липшица (8) и неравенств (24) получаем оценку

$$|\Psi_2(x)|_0 \le L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aTQ\boldsymbol{R}_0, \qquad (26)$$

где матрица Q определена равенством (10).

Затем из уравнения (25) и неравенства (26) находим оценку для $v_2(x)$:

$$|v_2(x)|_0 \le \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aTQ\boldsymbol{R}_0.$$

Далее получаем последовательно оценки для разностей $|\tilde{u}_3(t,x) - u_2(t,x)|$, $|\tilde{u}_4(t,x) - -u_3(t,x)|, \ldots, |\tilde{u}_{n+1}(t,x) - u_n(t,x)|$.

Тогда имеем

$$\left| \tilde{u}_{n+1}(t,x) - u_(t,x) \right| \le aT \left\{ E + \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aT \right\} Q^{n-1} \boldsymbol{R}_0,$$

$$\left| \tilde{u}'_{(n+1)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x) \right| \le a \left\{ E + \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aT \right\} Q^{n-1} \boldsymbol{R}_0,$$

а также

$$|v_n(x)|_0 \le \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aTQ^{n-1} \boldsymbol{R}_0.$$

Легко видеть, что выполняются неравенства

$$|u_{n+k}(t,x) - u_n(t,x)| \le$$

$$\le aT \left\{ E + \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aT \right\} Q^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} Q^i \boldsymbol{R}_0 +$$

$$+ \left| (E - aB_1 - aB_2)^{-1} \right|_0 L_0 \left(B_0 + C_1 \frac{T}{2} \right) aTQ^n \sum_{i=0}^{k-1} Q^i \boldsymbol{R}_0, \qquad (27)$$

$$\left|u'_{(n+k)t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\right| \le$$

$$\le a\left\{E + \left|(E - aB_1 - aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0 + C_1\frac{T}{2}\right)aT\right\}Q^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}Q^i\boldsymbol{R}_0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|v_i(x)| \le \left|(E - aB_1 - aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0 + C_1\frac{T}{2}\right)aT\sum_{i=0}^{n-1}Q^i\boldsymbol{R}_0. \qquad (28)$$

Из неравенств (27) и условия IV следует равномерная по $(t,x) \in [0,T]\times[0,a]$ сходимость последовательных приближений $u_n(t,x)$.

Равномерная по $x \in [0,a]$ сходимость последовательности функций $\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i(x)\right\}$ следует из неравенства (28) и условия IV.

Переходя к пределу в (12) и (13) при $n \to \infty$, легко убеждаемся, что предельная функция $u_\infty(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (14) и интегральному условию (2).

Из неравенств (27) при $k \to \infty$ получаем оценки разности между искомым решением и его n-м приближением:

$$|u_\infty(t,x) - u_n(t,x)| \le$$

$$\le aT\left\{E + \left|(E - aB_1 - aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0 + C_1\frac{T}{2}\right)aT\right\}Q^{n-1}(E-Q)^{-1}\boldsymbol{R}_0+$$

$$+\left|(E - aB_1 - aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0 + C_1\frac{T}{2}\right)aTQ^n(E-Q)^{-1}\boldsymbol{R}_0,$$

$$\left|\tilde{u}'_{\infty t}(t,x) - u'_{nt}(t,x)\right| \le$$

$$\le a\left\{E + \left|(E - aB_1 - aB_2)^{-1}\right|_0 L_0\left(B_0 + C_1\frac{T}{2}\right)aT\right\}Q^{n-1}(E-Q)^{-1}\boldsymbol{R}_0.$$

Для доказательства единственности решения системы уравнений с частными производными (1), удовлетворяющего интегральному условию (2) и условиям (3), (4), предполагаем существование двух решений $u(t,x)$ и $z(t,x)$. Они удовлетворяют также системе интегро-дифференциальных уравнений (14) и интегральному условию (2).

Тогда, используя условие Липшица (8) и соотношения (11), имеем

$$|u(t,x) - z(t,x)|_0 \le aT\boldsymbol{G}, \quad |u'_t(t,x)z'_t(t,x)|_0 \le a\boldsymbol{G},$$

где

$$\boldsymbol{G} = P|u(t,x) - z(t,x)|_0 + K_1|u(t,x) - z(t,x)|_0 + K_2|u'_t(t,x) - z'_t(t,x)|_0,$$

причем $|u(t,x) - z(t,x)|_0 = \sup\limits_{(t,x)} |u(t,x) - z(t,x)|$.

После n итераций находим

$$|u(t,x) - z(t,x)|_0 \leq aTQ^n \boldsymbol{G}, \quad \left|u'_t(t,x) - z'_t(t,x)\right|_0 \leq aQ^n \boldsymbol{G}. \tag{29}$$

При $n \to \infty$ из (29) и условия IV получаем $u(t,x) \equiv z(t,x)$, $u'_t(t,x) \equiv z'_t(t,x)$, т. е. единственность решения задачи (1) – (4).

Теорема доказана.

1. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1980. — 243 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984. — 264 с.
3. *Cesary L.* A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa Cl. Sci. — 1974. — **1**, № 4. — P. 311 – 358.
4. *Bassanini P.* A linear hyperbolic problem arising from equations of nonlinear optics // Z. angew. Math. und Phys. — 1976. — **27**, № 4. — S. 409 – 422.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1986. — 224 с.
6. *Урманчева Л. Б.* Двухточечные и многоточечные задачи для систем уравнений с частными производными гиперболического типа. — Киев, 1992. — 40 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики, № 92).
7. *Пулькина Л. С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 2. — С. 279 – 280.
8. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. — Киев: Вища шк., 1990. — 600 с.

Получено 26.03.07