УДК 517.968.7

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ І КЕРУВАННЯМ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ

А. Ю. Лучка, О. Б. Нестеренко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We give a substantiation for applying the projection-iteration method to solve a boundary-value problem for integral-differential equations with restrictions and a control.

Обосновано применение проекционно-итеративного метода к решению краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями и управлением.

1. Об'єкт дослідження. Розглянемо задачу

$$(Lx)(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int_a^b H(t,s)(Mx)(s)ds, \tag{1}$$

$$U(x) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{2}$$

в якій

$$(Lx)(t) = x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t),$$

$$(Mx)(t) = q_0(t)x^{(r)}(t) + \ldots + q_r(t)x(t), \quad r < m,$$

коефіцієнти $\{p_1, \ldots, p_m, q_0, \ldots, q_r\} \subset L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, ядро $H(t,s)$ є сумовним із квадратом за сукупністю змінних, $C(t)$ і $S(t)$ — $(1 \times l)$- і $(l \times 1)$-матриці, елементи яких — лінійно незалежні, сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції, U — стала $(m \times 1)$-матриця, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{\nu i} x^{(i-1)}(a) + \beta_{\nu i} x^{(i-1)}(b) \right),$$

$\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими, а $x \in W_2^m[a,b]$ та $\lambda \in \mathbb{R}^l$ підлягають визначенню.

У статтях [1, 2] було розглянуто питання існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) і обґрунтовано застосування до неї ітераційного та проекційного методів. Однак ці методи не завжди можна застосувати, оскільки, як відомо, ітераційний метод має обмежену область застосування і може збігатись повільно, а для проекційного методу характерною є проблема нестійкості. Для послаблення цих проблем у даній статті запропоновано до задачі (1), (2) застосовувати проекційно-ітеративний метод.

2. Проекційно-ітеративний метод. Суть проекційно-ітеративного методу полягає в тому, що для побудови наближених розв'язків задачі (1), (2) використовуються ідеї як проекційних, так і ітераційних методів.

Для побудови наближених розв'язків за проекційно-ітеративним методом потрібно задати диференціальний оператор

$$(Ax)(t) = x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m(t)x(t)$$

із неперервними на $[a, b]$ коефіцієнтами, $(m \times n)$-матрицю $\Phi(t)$ та $(n \times m)$-матрицю $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом елементами на $[a, b]$, такі, що стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$ є лінійно незалежними, а також знайти диференціальний оператор

$$(Bx)(t) = (Ax)(t) - (Lx)(t).$$

Нехай наближення $(x_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$ до шуканого розв'язку вже побудовано, отже, відомою є також функція $y_{k-1}(t)$. Тоді за проекційним методом знаходимо функцію

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t), \tag{3}$$

де поправка $\delta_k(t)$ — розв'язок задачі

$$(A\delta_k)(t) = C(t)\beta_k + \Phi(t)\mu_k, \quad U(\delta_k) = 0, \tag{4}$$

в якій невідомі вектори $\beta_k \in \mathbb{R}^l$ та $\mu_k \in \mathbb{R}^m$ визначаються таким чином, щоб справджувались обмеження

$$\int_a^b S(t)\delta_k(t)dt = 0 \tag{5}$$

та умова

$$\int_a^b \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0. \tag{6}$$

Тут

$$y_k(t) = f(t) + (Bz_k)(t) + \int_a^b H(t, s)(Mz_k)(s)ds. \tag{7}$$

Після цього наступне наближення визначаємо ітераційним методом, тобто, враховуючи формулу (7), із допоміжної задачі

$$(Ax_k)(t) = C(t)\lambda_k + y_k(t), \quad U(x_k) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha. \tag{8}$$

Початкове наближення $(x_0(t), \lambda_0)$ знаходимо із задачі (8) при $k = 0$ і заданій функції $y_0(t)$.

Припустимо, що однорідна задача

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda, \quad U(x) = 0, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = 0 \tag{9}$$

має лише тривіальний розв'язок. Тоді згідно з лемою 1 [1] задача (4), (5) та задача (8) мають єдині розв'язки і справджуються формули

$$\delta_k(t) = \int_a^b G(t,s)\Phi(s)\mu_k ds, \tag{10}$$

$$x_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y_k(s)ds, \tag{11}$$

$$\lambda_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y_k(s)ds. \tag{12}$$

Нехай

$$Y(t) = \int_a^b G(t,s)\Phi(s)ds, \tag{13}$$

тоді на підставі формул (3), (10) маємо

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + Y(t)\mu_k, \tag{14}$$

а формула (7) з урахуванням (14) набирає вигляду

$$y_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t) + \int_a^b H(t,s)(Mx_{k-1})(s)ds + (BY)(t)\mu_k + \int_a^b H(t,s)(MY)(s)ds\mu_k,$$

або, використовуючи позначення

$$v_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t) + \int_a^b H(t,s)(Mx_{k-1})(s)ds, \tag{15}$$

$$Z(t) = (BY)(t) + \int_a^b H(t,s)(MY)(s)ds, \tag{16}$$

отримуємо

$$y_k(t) = v_k(t) + Z(t)\mu_k. \tag{17}$$

Підставляючи вираз (17) в умову (6), для визначення вектора $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda \mu_k = d_k, \tag{18}$$

де

$$d_k = \int_a^b \Psi(t)\varepsilon_k(t)dt, \quad \varepsilon_k(t) = v_k(t) - y_{k-1}(t), \tag{19}$$

$$\Lambda = \int_a^b \Psi(t)(\Phi(t) - Z(t))dt. \tag{20}$$

За умови існування єдиних розв'язків задачі (9) і системи (18) послідовні наближення $(x_k(t), \lambda_k)$ проекційно-ітеративним методом будуються однозначно.

Зауважимо, що побудова матриці $Y(t)$ за формулою (13) рівносильна знаходженню розв'язку задачі

$$(AY)(t) = C(t)E + \Phi(t), \quad U(Y) = 0, \quad \int_a^b S(t)Y(t)dt = 0, \tag{21}$$

в якій $(l \times n)$-матриця E підлягає визначенню.

3. Обґрунтування методу. Встановимо, що метод (3) – (8) для задачі (1), (2) зводиться до проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння

$$y(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \tag{22}$$

де

$$K(t,s) = (BG)(t,s) + \int_a^b H(t,\xi)(MG)(\xi,s)d\xi, \tag{23}$$

$$g(t) = f(t) + (Bh)(t) + \int_a^b H(t,s)(Mh)(s)ds. \tag{24}$$

Справді, у статті [1] стверджується, що задача (1), (2) рівносильна інтегральному рівнянню (22), а із формул (3), (10), (11) очевидним чином випливає правильність співвідношення

$$z_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)ds. \tag{25}$$

Підставляючи вираз (25) у формулу (7) і використовуючи позначення (23) і (24), отримуємо

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)ds. \tag{26}$$

На основі аналізу формул (26) та (6) приходимо до висновку, що ці формули виражають суть проекційно-ітеративного методу стосовно інтегрального рівняння (22), умови збіжності якого та оцінки похибки встановлено у низці праць, зокрема [3, 4].

Припустимо, що проекційно-ітеративний метод стосовно інтегрального рівняння є збіжним, тобто існує розв'язок $y^* \in L_2[a,b]$ рівняння (22) і послідовність $\{y_k(t), k \geq 0\}$, побудована за методом (26), (6), збігається за нормою в $L_2[a,b]$ до цього розв'язку. Тоді, переходячи до границі у співвідношеннях (11), (12), одержуємо

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*,$$

де

$$x^*(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y^*(s)ds, \quad \lambda^* = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y^*(s)ds. \tag{27}$$

Враховуючи формули (27) та позначення (23), (24), можна встановити рівність

$$f(t) + C(t)\lambda^* + \int_a^b H(t,s)(Mx^*)(s)ds - (Lx^*)(t) = g(t) - y^*(t) + \int_a^b K(t,s)y^*(s)ds,$$

яка визначає зв'язок між розв'язками задачі (1), (2) та рівнянням (22). Отже, за умови існування розв'язку $y^*(t)$ інтегрального рівняння (22) задача (1), (2) має розв'язок, який зображується формулами (27).

Для методу (3) – (8) можна встановити оцінки похибки, які безпосередньо випливають із оцінок похибки $y^*(t) - y_k(t)$ [3, 4] та співвідношень

$$x^*(t) - x_k(t) = \int_a^b G(t,s)(y^*(s) - y_k(s))ds, \quad \lambda^* - \lambda_k = \int_a^b \Gamma(s)(y^*(s) - y_k(s))ds,$$

отриманих на підставі формул (11), (12) та (27).

Із викладеного випливає правильність наступного твердження.

Теорема. *Нехай однорідна задача (9) має лише тривіальний розв'язок, матриця* Λ, *яка визначається формулою (20), є невиродженою і проекційно-ітеративний метод (26), (6) для інтегрального рівняння (22) є збіжним. Тоді існує розв'язок* $x^* \in W_2^m[a,b]$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ *задачі (1), (2) і послідовність* $\{x_k(t), \lambda_k, k \geq 0\}$, *побудована за методом (3) – (8), рівномірно збігається до цього розв'язку.*

4. Обчислювальна схема. Для побудови наближених розв'язків проекційно-ітеративним методом доцільно використовувати обчислювальні схеми. Наведемо одну з таких схем, згідно з якою обчислення варто розділити на дві частини. До першої частини слід віднести допоміжні обчислення, куди входять такі операції:

1) задаємо оператор $(Ax)(t)$, матриці $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ і знаходимо оператор $(Bx)(t)$;

2) визначаємо із задачі (21) матрицю $Y(t)$ і будуємо матрицю $Z(t)$ за формулою (16);

3) використовуючи формулу (20), знаходимо матрицю Λ.

Друга частина обчислень пов'язана з побудовою наближених розв'язків. Наближений розв'язок $(x_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$ уже нам відомий. Тоді для побудови наступного виконуємо такі операції:

1) за формулою (15) знаходимо функцію $v_k(t)$;

2) знаходимо, згідно з формулами (19), відхил $\varepsilon_k(t)$ та вектор d_k;

3) формуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (18) і розв'язуємо її;

4) використовуючи формулу (17), знаходимо функцію $y_k(t)$;

5) знаходимо наближений розв'язок $(x_k(t), \lambda_k)$ із допоміжної задачі (8).

Зауважимо, що початкове наближення знаходимо із задачі (8) при $k = 0$ і заданій функції $y_0(t)$, а при побудові матриць $Y(t)$, $Z(t)$, Λ можна користуватись способом, висвітленим в обчислювальній схемі проекційного методу статті [2].

Приклад. Розглянемо задачу

$$x''(t) = 23\lambda + 175 \int_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)x(s)ds, \tag{28}$$

$$x(0) = 3, \quad x(1) = 6, \quad \int_0^1 (7 - 9t)x(t)dt = 9, \tag{29}$$

і застосуємо до неї проекційно-ітеративний метод. При побудові наближених розв'язків будемо користуватись запропонованою обчислювальною схемою, згідно з якою попередньо треба знайти матриці $Z(t)$ та Λ.

Нехай $n = 2$, $(Ax)(t) = x''(t)$, а елементи матриць $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ є такими:

$$\varphi_1(t) = 100, \quad \varphi_2(t) = 900t, \quad \psi_1(t) = 3, \quad \psi_2(t) = 6t. \tag{30}$$

Тоді, враховуючи співвідношення (16), (20), (21), для визначення елементів матриць

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & \xi_2(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) & \eta_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

отримуємо формули

$$\xi_i(t) = 175 \int_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)\eta_j(s)ds, \tag{32}$$

$$c_{ij}(t) = \int_0^1 \Psi_i(t)(\varphi_j(t) - \xi_j(t))dt, \quad j = 1, 2, \tag{33}$$

і задачу

$$\eta_j''(t)dt = 23\sigma_j + \varphi_j(t), \quad \eta_j(0) = \eta_j(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 (7-9t)\eta_j(t)dt = 0, \quad j = 1,2. \tag{34}$$

Розв'язуючи задачу (34) з урахуванням даних (30), маємо

$$\eta_1(t) = 0, \quad \eta_2(t) = 150t^3 - 198t^2 + 48t, \tag{35}$$

а виконуючи обчислення за формулами (32), (33) з використанням виразів (30), (31), (35), знаходимо

$$\xi_1(t) = 0, \quad \xi_2(t) = 1575 - 2120\sqrt{t}, \tag{36}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 300 & 865 \\ 300 & 2163 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Після цього переходимо до побудови наближених розв'язків. Нехай $y_0(t) = -230$, тоді $x_0(t) = 3 + 3t$, $\lambda_0 = 10$ — єдиний розв'язок задачі

$$x_0''(t) = 23\lambda_0 - 230, \quad x_0(0) = 3, \quad x_0(1) = 6, \quad \int\limits_0^1 (7-9t)x_0(t)dt = 9,$$

який приймаємо за початкове наближення.

Перше наближення знаходимо за такою схемою:

1. Обчислюємо функцію

$$v_1(t) = 175\int\limits_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)x_0(s)ds = 175\int\limits_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)(3+3s)ds = 1680\sqrt{t} - 1575. \tag{38}$$

2. Використовуючи формули (38) та (30), знаходимо відхил

$$\varepsilon_1(t) = v_1(t) - y_0(t) = 1680\sqrt{t} - 1345$$

і компоненти вектора d_1 за формулами

$$\begin{aligned} d_1^1 &= \int\limits_0^1 \Psi_1(t)\varepsilon_1(t)dt = \int\limits_0^1 3(1680\sqrt{t} - 1345)dt = -675, \\ d_1^2 &= \int\limits_0^1 \Psi_2(t)\varepsilon_1(t)dt = \int\limits_0^1 6t(1680\sqrt{t} - 1345)dt = -3. \end{aligned} \tag{39}$$

3. Беручи до уваги вирази (37) і (39), формуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 300 & 865 \\ 300 & 2163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1^1 \\ \mu_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -675 \\ -3 \end{pmatrix}$$

і знаходимо її розв'язок

$$\mu_1^1 = -\frac{48581}{12980}, \quad \mu_1^2 = \frac{336}{649}. \tag{40}$$

4. З урахуванням формул (38), (36) та (40) обчислюємо функцію

$$y_1(t) = v_1(t) + \mu_1^1\xi_1(t) + \mu_1^2\xi_2(t) = \frac{1575}{649}(240\sqrt{t} - 313). \tag{41}$$

5. Перше наближення визначаємо із задачі

$$x_1''(t) = 23\lambda_1 + y_1(t), \quad x_1(0) = 3, \quad x_1(1) = 6, \quad \int_0^1 (7-9t)x_1(t)dt = 9,$$

розв'язуючи яку з використанням виразу (41), отримуємо

$$x_1(t) = 3 + 3t + \frac{20160}{649}(t - 6t^2 + 5t^2\sqrt{t}), \quad \lambda_1 = \frac{251055}{14927}. \tag{42}$$

Якщо ввести позначення

$$\rho = \frac{19}{649}, \quad a = \frac{2704}{437}, \quad p(t) = t - 6t^2 + 5t^2\sqrt{t},$$

співвідношення (42) можна записати у вигляді

$$x_1(t) = 3 + 3t + 32(1-\rho)p(t), \quad \lambda_1 = 17 - a\rho.$$

Таким самим способом будуємо наступні наближення. Виконуючи відповідні обчислення, отримуємо

$$x_k(t) = 3 + 3t + 32(1-\rho^k)p(t), \quad \lambda_k = 17 - a\rho^k. \tag{43}$$

Оскільки $\rho < 1$, то, переходячи до границі у рівності (43) при $k \to \infty$, знаходимо

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t) = 3 + 3t + 32p(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^* = 17. \tag{44}$$

Безпосередніми обчисленнями неважко перевірити, що $(x^*(t), \lambda^*)$ — єдиний розв'язок задачі (28), (29).

На основі формул (43) і (44) знаходимо похибку k-го наближення

$$x^*(t) - x_k(t) = 32\rho^k p(t), \quad \lambda^* - \lambda_k = a\rho^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

яка характеризує швидкість збіжності проекційно-ітеративного методу стосовно задачі (28), (29). Так, при $k = 5$ маємо

$$x^*(t) - x_5(t) = 0,68816 \cdot 10^{-6} p(t), \quad \lambda^* - \lambda_5 = 0,13307 \cdot 10^{-6}.$$

Зауважимо, що до задачі (28), (29) ітераційний метод [1] не можна застосувати, оскільки він є розбіжним, а для отримання наближеного розв'язку з точністю 10^{-6} за проекційним методом [2] потрібно взяти чималу кількість координатних функцій.

1. *Нестеренко О. Б.* Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 336–347.
2. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 208–216.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 264 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 21.04.08