УДК 517.925

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

І. І. Король

Ужгород. нац. ун-т
Україна, 88000, Ужгород, вул. Підгірна, 46

We suggest a new numerical-analytical algorithm for studying periodic solutions of nonlinear autonomous systems of ordinaary differential equations in the critical case.

Предложен новый численно-аналитический алгоритм исследования периодических решений нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае.

Дану роботу присвячено дослідженню існування періодичних розв'язків нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь з виділеною лінійною частиною

$$\frac{dx}{dt} = Jx + g(x), \quad x, g \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

у випадку, коли всі розв'язки відповідної лінійної диференціальної системи мають деякий спільний період T, а період розв'язку нелінійної системи або збігається з T, або близький до нього. Аналогічні питання розглядалися у багатьох роботах (див., наприклад, [1–5]). Інструментом дослідження є модифікація чисельно-аналітичного методу [6, 7], особливість якої полягає в тому, що обмеження на матрицю Ліпшиця стосуються не всієї правої частини, а лише нелінійності $g(x)$.

1. *T*-періодичні розв'язки нелінійної системи. Розглянемо нелінійну автономну систему звичайних диференціальних рівнянь (1), у якій J — $(n \times n)$-вимірна дійсна стала матриця, така, що відповідна лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt} = Jx \tag{2}$$

має n нетривіальних розв'язків періоду $T = 2\Pi/\nu$. Будемо досліджувати питання існування та наближеної побудови періодичних розв'язків системи (1), період яких збігається з періодом T розв'язків відповідної лінійної системи (2). Зрозуміло, що власні значення матриці J дорівнюють нулю або є суто уявними. Оскільки таку матрицю перетворенням подібності завжди можна звести до канонічної кососиметричної матриці, то без обмеження загальності можемо вважати, що

$$J = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \nu_q \\ -\nu_q & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right\}, \quad \nu_i \vdots \nu. \tag{3}$$

Припускаємо, що в області $x \in D \subset \mathbb{R}^n, D = \{x \mid 0 \le r \le \|x\| \le R\}, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, виконуються такі умови:

А) функція $g(x)$ є визначеною, неперервною і задовольняє умови обмеженості і Ліпшиця з невід'ємними сталими M і K :

$$\|g(x)\| \leq M, \quad \left\|g\left(x'\right) - g\left(x''\right)\right\| \leq K\left\|x' - x''\right\|; \tag{4}$$

B) $MT \leq R - r, qK < 1$, де $q = \sqrt{\frac{2}{15}}T$.

Згідно з [6, 7] T-періодичний розв'язок системи (1) будемо шукати як границю рекурентної послідовності

$$x_{m+1}(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int\limits_0^t e^{J(t-s)} \left\{ g(x_m(s,\xi)) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} g(x_m(\sigma,\xi))d\sigma \right\} ds,$$

$$x_0(t,\xi) = e^{Jt}\xi, \quad m = \{0\}\bigcup \mathbb{N}. \tag{5}$$

Необхідні та достатні умови існування T-періодичного розв'язку системи (1) містять наступні леми.

Лема 1. *Нехай нелінійна автономна диференціальна система (1) має T-періодичний розв'язок $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$. Тоді його початковим значенням є $\varphi(0) = \xi^*$, де ξ^* таке, що*

$$\int\limits_0^T e^{-Js} g(\varphi(s,\xi^*))ds = 0. \tag{6}$$

Доведення відповідного твердження у випадку лінійних крайових умов загального вигляду можна знайти в [4].

Лема 2. *Нехай $\xi = \xi^*$ і функція $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$ задовольняють алгебраїчне рівняння (6) і інтегральне рівняння*

$$x(t) = e^{Jt}\xi + \int\limits_0^t e^{J(t-s)} \left\{ g(x(s)) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} g(x(\sigma))d\sigma \right\} ds. \tag{7}$$

Тоді $\varphi(t)$, $\varphi(0) = \xi^*$, є T-періодичним розв'язком автономної диференціальної системи (1).

Доведення. Нехай функція $\varphi(t,\xi)$ є розв'язком інтегрального рівняння (7), тоді

$$\varphi(t,\xi) = e^{Jt}\varphi(0) + \int\limits_0^t e^{J(t-s)} \left\{ g(\varphi(s,\xi)) - \frac{t}{T}\int\limits_0^T e^{J(t-s)} g(\varphi(s,\xi)) \right\} ds.$$

З того, що $\xi = \xi^*$ і $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$ задовольняють рівняння (6), випливає, що виконується тотожність

$$\varphi(t) \equiv e^{Jt}\varphi(0) + \int\limits_0^t e^{J(t-s)} f(s,\varphi(s))ds,$$

тобто $\varphi(t)$ є T-періодичним розв'язком системи (1).

Лему доведено.

На підставі нерівності Коші – Буняковського для довільної неперервної вектор-функції $f(t),\, t \in [a,b] \subseteq [0,T_0]$, отримуємо наступні оцінки:

$$\left\| \int\limits_a^b e^{J(t-s)} f(s) ds \right\| \leq \sqrt{b} \sqrt{\int\limits_a^b \left\| e^{(t-s)} f(s) \right\|^2 ds} \leq$$

$$\leq \sqrt{b} \sqrt{\int\limits_a^b \left\langle e^{J(t-s)} f(s), e^{J(t-s)} f(s) \right\rangle ds} \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int\limits_a^b \|f(s)\|^2 ds}, \qquad (8)$$

$$\left\| \int\limits_0^t e^{J(t-s)} \left\{ f(s) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\} ds \right\| \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left\| \int\limits_0^t e^{J(t-s)} f(s) ds \right\| + \frac{t}{T} \left\| \int\limits_t^T e^{J(t-s)} f(s) ds \right\| \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sqrt{t} \sqrt{\int\limits_0^t \|f(s)\|^2 ds} + \frac{t}{T} \sqrt{T-t} \sqrt{\int\limits_t^T \|f(s)\|^2 ds}. \qquad (9)$$

Крім того, з результатів [7] маємо

$$r_m(t) \leq q^{m-1} r_1(t),$$

де

$$r_m(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sqrt{t} \sqrt{\int\limits_0^t r_{m-1}^2(s) ds} + \frac{t}{T} \sqrt{T-t} \sqrt{\int\limits_t^T r_{m-1}^2(s) ds},$$

$$r_0(t) = 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Беручи до уваги (4), (9), оцінюємо відхилення першого наближення:

$$\|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t e^{J(t-s)} \left\{ g(x_0(s,\xi)) ds - \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} g(x_0(\sigma,\xi)) d\sigma \right\} ds \right\| \leq$$

$$\le \left\{ \left(1-\frac{t}{T}\right)\sqrt{t}\ \sqrt{\int_0^t \|g(x_0(s,\xi))\|^2\,ds} + \frac{t}{T}\sqrt{T-t}\ \sqrt{\int_t^T \|g(x_0(s,\xi))\|^2\,ds} \right\} \le$$

$$\le r_1(t)M \le \frac{MT}{2}. \tag{10}$$

Оскільки $\|x_0(t,\xi)\| = \|\xi\|$, то, вибираючи довільну точку ξ з області

$$D_0 = \left\{ \xi \ \middle|\ 0 \le r + \frac{MT}{2} \le \|\xi\| \le R - \frac{MT}{2} \right\}, \quad D_0 \subset D,$$

з (10) за правилом трикутника одержуємо нерівності

$$\|x_1(t,\xi)\| \le \|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| + \|x_0(t,\xi)\| \le R,$$

$$\|x_1(t,\xi)\| \ge \|x_0(t,\xi)\| - \|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| \ge r.$$

Таким чином, $x_1(t,\xi) \in D$. Шляхом індукції можна переконатися, що при всіх $m \in \mathbb{N}$

$$\|x_m(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| \le Mr_1(t) \le \frac{MT}{2},$$

а отже, $r \le \|x_m(t,\xi)\| \le R$, і всі члени послідовності (5) належать області D.

За допомогою (4), (9) оцінимо різницю сусідніх членів послідовності (5):

$$\|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| =$$

$$= \left\| \int_0^t e^{J(t-s)} \left\{ (g(x_m(s,\xi)) - g(x_{m-1}(s,\xi)))\,ds - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T}\int_0^T e^{J(s-\sigma)}\,(g(x_m(\sigma,\xi)) - g(x_{m-1}(\sigma,\xi)))\,d\sigma \right\} ds \right\| \le$$

$$\le \left\{ \left(1-\frac{t}{T}\right)\sqrt{t}\ \sqrt{\int_0^t \|g(x_m(s,\xi)) - g(x_{m-1}(s,\xi))\|^2 ds +} \right.$$

$$+ \frac{t}{T}\sqrt{T-t}\sqrt{\int_t^T \|g(x_m(s,\xi)) - g(x_{m-1}(s,\xi))\|^2 ds}\Bigg\} \le$$

$$\le K\Bigg\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|x_m(s,\xi) - x_{m-1}(s,\xi)\|^2 ds} +$$

$$+ \frac{t}{T}\sqrt{T-t}\sqrt{\int_t^T \|x_m(s,\xi) - x_{m-1}(s,\xi)\|^2 ds}\Bigg\}. \tag{11}$$

Таким чином, з (10), (11) одержуємо

$$\|x_2(t,\xi) - x_1(t,\xi)\| \le$$

$$\le K\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|x_1(s,\xi) - x_0(s,\xi)\|^2 ds} + \frac{t}{T}\sqrt{T-t}\sqrt{\int_t^T \|x_1(s,\xi) - x_0(s,\xi)\|^2 ds}\right\} \le$$

$$\le KM\left\{\left(1-\frac{t}{T}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t r_1^2(s)ds} + \frac{t}{T}\sqrt{T-t}\sqrt{\int_t^T r_1^2(s)ds}\right\} \le KMr_2(t) \le qKMr_1(t).$$

Методом математичної індукції отримуємо оцінку

$$\|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| \le (qK)^m M r_1(t),$$

а тому для всіх $m \in \mathbb{N}$, $j \ge 1$ маємо

$$\|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| \le \sum_{k=0}^{j-1} \|x_{m+k+1}(t,\xi) - x_{m+k}(t,\xi)\| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{j-1} (qK)^{m+k} M r_1(t) \le (qK)^m \sum_{k=0}^{j-1} (qK)^k M_1 r_1(t). \tag{12}$$

З (12) і умови B випливає, що послідовність (5) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$. Переходячи до границі при $j \to \infty$, одержуємо оцінку

$$\|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| \le \frac{(qK)^m}{1-qK} M r_1(t). \tag{13}$$

Як границя T-періодичних функцій $x_m(t,\xi)$, функція $x^*(t,\xi)$ також є T-періодичною і при $t = 0$ набуває початкового значення $x^*(0,\xi) = x_0$. Переходячи в (5) до границі при

$m \to \infty$, бачимо, що гранична функція $x^*(t,\xi)$ є розв'язком інтегрального рівняння (7), а тому, згідно з лемами 1, 2, є T-періодичним розв'язком системи (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(\xi) = 0, \tag{14}$$

де $\Delta(\xi) \overset{\text{df}}{\equiv} \int_0^T e^{-Js} g\left(x^*(s,\xi)\right)\, ds$. Таким чином, можемо сформулювати наступний результат.

Теорема 1. *Нехай система (1) задовольняє умови A, B. Тоді:*

1) послідовність функцій $x_m(t,\xi)$ вигляду (5) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$ і при всіх натуральних m справджуються оцінки збіжності (13);

2) гранична функція $x^*(t,\xi)$ є T-періодичною по t і набуває початкового значення $x^*(0,\xi) = \xi$;

3) функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є T-періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком рівняння (14).

Зробити висновки щодо наявності періодичних розв'язків системи (1) можна і не знаходячи граничну функцію $x^*(t,\xi)$. Наступне твердження містить конструктивні достатні умови існування періодичних розв'язків, для перевірки яких досить знати лише наближені розв'язки $x_m(t,\xi)$.

Теорема 2. *Нехай для системи (1) справджуються припущення A, B і, крім того:*

1) існує опукла, замкнена область $D_1 \subset D_0$ така, що при деякому фіксованому натуральному m в області D_1 міститься єдина особлива точка $\xi = \xi_m$ ненульового індексу відображення $\Delta_m(\xi) : \ D_0 \to \mathbb{R}^n$:

$$\Delta_m(\xi) = \int\limits_0^T e^{-Js} g(x_m(s,\xi)) ds;$$

2) на границі ∂D_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} |\Delta_m(\xi)| > \frac{\left(qK\right)^{m+1}}{1 - qK} TM.$$

Тоді система (1) має T-періодичний розв'язок $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ з початковим значенням $x(0) = \xi^*$, де $\xi^* \in D_1$.

Доведення. При $m \geq 1$ з (4), (8), (13) отримуємо оцінки

$$\|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)\| = \left\| \int\limits_0^T e^{-Js}\Big(g(x^*(s,\xi)) - g(x_m(s,\xi))\Big)ds \right\| \leq$$

$$\leq \sqrt{T}\sqrt{\int\limits_0^T \|g(x^*(s,\xi)) - g(x_m(s,\xi))\|^2 ds} \leq$$

$$\leq KM\frac{(qK)^m}{1-qK}\sqrt{T}\sqrt{\int\limits_0^T r_1^2(s)ds} \leq \frac{(qK)^{m+1}}{1-qK}TM.$$

Далі, як і при доведенні теореми 3.1 [8], встановлюємо гомотопність полів $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$, що і завершує доведення теореми.

2. Побудова розв'язків з періодами, близькими до *T*. Актуальним є питання існування і наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійної системи (1), період T_1 яких незначно відрізняється від періоду T розв'язків відповідної лінійної системи (2). Оскільки T_1 невідомий, то будемо шукати його у вигляді $T_1 = (1+\delta)T$, де δ — невідомий малий параметр. З огляду на те, що (1) є автономною системою, одну з координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можемо взяти рівною нулю [1, 2]. Без обмеження загальності покладемо $\xi_n = 0$. Тоді для побудови розв'язку нелінійної системи (1) нам потрібно знайти n невідомих: $\xi_\delta \in \mathbb{R}^n$, $\xi_\delta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \delta)$.

За допомогою заміни незалежної змінної

$$t = (1+\delta)\tau \tag{15}$$

одержуємо задачу знаходження періодичного з відомим фіксованим періодом T розв'язку автономної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = Jx + f(x,\delta), \quad f(x,\delta) = g(x) + \delta(Jx + g(x)), \tag{16}$$

щодо якої припускаємо, що в області $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, $|\delta| \leq \delta_0$ виконується умова А і, крім того,

В$_1$) $M_\delta T \leq R - r$, $qK_\delta < 1$, де $M_\delta = M + \delta_0(M + \|J\|R)$, $K_\delta = K + \delta_0(K + \|J\|)$.

Згідно з викладеним вище, T-періодичний розв'язок системи (16) будемо шукати як границю рекурентної послідовності

$$\widetilde{x}_{m+1}(\tau,\xi_\delta) = \widetilde{x}_0(\tau,\xi_\delta) + \int\limits_0^\tau e^{J(\tau-s)}\left\{ f(\widetilde{x}_m(s,\xi_\delta),\delta) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} f(\widetilde{x}_m(\sigma,\xi_\delta),\delta)d\sigma \right\} ds, \tag{17}$$

$$\widetilde{x}_0(\tau,\xi_\delta) = e^{J\tau}x_0, \quad x_0 = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0), \quad m = \{0\}\bigcup\mathbb{N}.$$

Неважко переконатися, що справедливими є наступні твердження.

Лема 3. *Нехай нелінійна автономна диференціальна система (16) має T-періодичний розв'язок $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \xi_\delta^*)$. Тоді існує $\xi_\delta^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*, \delta^*)$ таке, що*

$$\int\limits_0^T e^{-Js} f(\varphi(s, \xi_\delta^*), \delta^*) ds = 0 \tag{18}$$

і $\varphi(\tau)$ набуває початкового значення $\varphi(0) = (\xi_0^*, \ldots, \xi_{n-1}^*, 0)$.

Лема 4. *Нехай $\xi_\delta = \xi_\delta^*$ і функція $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \xi_\delta^*)$ задовольняють алгебраїчне рівняння (18) і інтегральне рівняння*

$$x(\tau) = e^{J\tau} x_0 + \int\limits_0^\tau e^{J(\tau - s)} \left\{ f(x(s), \delta) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{J(s-\sigma)} f(x(\sigma), \delta) d\sigma \right\} ds. \tag{19}$$

Тоді $\varphi(\tau)$, $\varphi(0) = (\xi_1^*, \ldots, \xi_{n-1}^*, 0)$, є T-періодичним розв'язком автономної диференціальної системи (16).

Теорема 3. *Нехай система (16) задовольняє умови А,* B_1. *Тоді:*

1) послідовність функцій $\widetilde{x}_m(t, \xi_\delta)$ вигляду (17) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно $(t, \xi_\delta) \in \mathbb{R} \times D_\delta$, $\xi_\delta = (x_0, \delta)$,

$$D_\delta = D_1 \times I_\delta, \;\; D_1 = \{x_0 \mid 0 \le r + M_\delta T \le \|x_0\| \le R - M_\delta T\}, \;\; D_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}, \;\; I_\delta = [-\delta_0, \delta_0],$$

до граничної функції $\widetilde{x}^*(\tau, \xi_\delta)$ і при всіх натуральних m справджуються оцінки збіжності

$$\|\widetilde{x}^*(\tau, \xi_\delta) - \widetilde{x}_m(\tau, \xi_\delta)\| \le \frac{(qK_\delta)^m}{1 - qK_\delta} M_\delta r_1(\tau); \tag{20}$$

2) гранична функція $\widetilde{x}^*(\tau, \xi_\delta)$ є T-періодичною по t і набуває початкового значення $\widetilde{x}^*(0, \xi_\delta) = (x_0, 0)$;

3) функція $\widetilde{x}^*(\tau) = \widetilde{x}^*(\tau, \xi_\delta^*)$ є T-періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi_\delta^* = (x_0^*, \delta^*)$ є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^T e^{-Js} f(\widetilde{x}^*(s, \xi_\delta), \delta) ds = 0.$$

.

Теорема 4. *Нехай для системи (16) справджуються припущення А,* B_1 *і, крім того:*

1) існує опукла, замкнена область $D'_\delta = D'_1 \times I'_\delta$, $D'_1 \subset D_1$, $I'_\delta \subset I_\delta$ така, що при деякому фіксованому натуральному m наближене визначальне рівняння $\widetilde{\Delta}_m(\xi_\delta) = 0$, де

$$\widetilde{\Delta}_m(\xi_\delta) = \int\limits_0^T e^{-Js} f(\widetilde{x}_m(s, \xi_\delta), \delta) ds, \quad \widetilde{\Delta}_m(\xi_\delta) : \;\; D_\delta \to \mathbb{R}^n,$$

має в області D'_δ єдиний розв'язок $\xi_\delta = \xi_{\delta m}$ ненульового індексу;

2) на границі $\partial D'_\delta$ області D'_δ виконується нерівність

$$\inf_{\xi_\delta \in \partial D'_\delta} \left| \widetilde{\Delta}_m (\xi_\delta) \right| > \frac{\left(qK_\delta\right)^{m+1}}{1 - qK_\delta} TM_\delta.$$

Тоді система (1) має T-періодичний розв'язок $x = x^*(\tau) = x^*(\tau, \xi^*)$ з початковим значенням $x(0) = x_0^*$, $x_0^* \in D'_1$.

Враховуючи заміну (15), одержуємо $T_1 = (1 + \delta^*)T$-періодичний розв'язок $x^*(t)$ задачі (1).

3. Квазілінійні автономні системи. Розглянемо квазілінійну автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Jx + \varepsilon g(x, \varepsilon), \tag{21}$$

де ε — малий додатний параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, $t \in \mathbb{R}$ $x, g \in \mathbb{R}^n$, J — стала $(n \times n)$-вимірна матриця вигляду (3) і функція $g(x, \varepsilon)$ задовольняє умову A в області $(x, \varepsilon) \in D \times \times [0, \varepsilon_0]$.

Розглянемо питання існування і наближеної побудови $T_1 = T_1(\varepsilon)$-періодичного розв'язку системи (21), $T_1(\varepsilon) = (1 + \varepsilon\alpha(\varepsilon))T$. Виконуючи заміну незалежної змінної $t = \big(1 + +\varepsilon\, \alpha(\varepsilon)\big)\tau$, $\alpha(0) = \alpha^0$, $\alpha \in I_\alpha = [-\overline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, переходимо до задачі знаходження періодичного з відомим фіксованим періодом T розв'язку автономної системи

$$\frac{dx}{d\tau} = Jx + \varepsilon h(x, \varepsilon), \quad h(x, \varepsilon) = \alpha(\varepsilon) Jx + \big(1 + \varepsilon\, \alpha(\varepsilon)\big) g(x, \varepsilon), \tag{22}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один з T-періодичних розв'язків $x(t) = e^{Jt}x_0$, $x_0 = = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$, породжуючої для (22) лінійної однорідної системи (2).

З метою відшукання T-періодичного розв'язку системи (22) побудуємо рекурентну послідовність

$$\overline{x}_{m+1}(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon) = \overline{x}_0(\tau, \xi_\alpha) + \varepsilon \int_0^\tau e^{J(\tau - s)} \left\{ h(\overline{x}_m(s, \xi_\alpha, \varepsilon), \varepsilon) - \frac{1}{T} \int_0^T e^{J(s-\sigma)} h(\overline{x}_m(\sigma, \xi_\alpha, \varepsilon), \varepsilon) d\sigma \right\} ds,$$

$$\overline{x}_0(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon) = e^{J\tau}x_0, \quad \xi_\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \alpha), \quad \alpha = \alpha(\varepsilon), \quad m = \{0\} \bigcup \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, що в області $(\tau, x, \alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times D \times I_\alpha \times [0, \varepsilon_0]$ при достатньо малому ε_0 мають місце нерівності

$$\varepsilon_0 M_\alpha T \leq R - r, \quad \varepsilon_0 q K_\alpha < 1,$$

де $M_\alpha = \overline{\alpha}\|J\|R + (1 + \varepsilon_0\overline{\alpha})M$, $K_\alpha = \overline{\alpha}\|J\| + (1 + \varepsilon_0\overline{\alpha})K$, а тому твердження, аналогічні теоремам 1 і 2, справджуються і для системи (22), і при цьому відповідні оцінки мають вигляд

$$\|\overline{x}^*(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon) - \overline{x}_m(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon)\| \leq \varepsilon_0 \frac{\left(\varepsilon_0 q K_\alpha\right)^m}{1 - \varepsilon_0 q K_\alpha} M_\alpha r_1(\tau),$$

$$\inf_{\xi \in \partial D_\alpha} \|\overline{\Delta}_m(\xi_\alpha)\| > \frac{(\varepsilon_0 q K_\alpha)^{m+1}}{1 - \varepsilon_0 q K_\alpha} T M_\alpha,$$

де $\overline{x}^*(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon) = \lim\limits_{m \to \infty} \overline{x}_m(\tau, \xi_\alpha, \varepsilon)$,

$$\overline{\Delta}(\xi_\alpha) = \int_0^T e^{-Js} h(\overline{x}^*(s, \xi_\alpha, \varepsilon), \varepsilon) ds,$$

$$\overline{\Delta}_m(\xi_\alpha) = \int_0^T e^{-Js} h(\overline{x}_m(s, \xi_\alpha, \varepsilon), \varepsilon) ds, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Наступне твердження дозволяє робити висновки про існування періодичного розв'язку з аналізу наближеного визначального рівняння вже при $m = 0$.

Теорема 5. *Нехай система (22) задовольняє умову A і відображення*

$$\overline{\Delta}_0(\xi_\alpha) = \int_0^T e^{-Js} h(\overline{x}_0(s, \xi_\alpha), \varepsilon) ds$$

має в області $D'_\alpha \subset D_\alpha$, $D'_\alpha = D'_1 \times I'_\alpha$, $D_\alpha = D_1 \times I_\alpha$, $D'_1 \subset D_1$, $I'_\alpha \subset I_\alpha$, *ізольовану особливу точку* $\xi_\alpha = \xi_{0\alpha}$ *ненульового індексу.*

Тоді існує ε_1 *таке, що при всіх* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *система (21) має* $T_1(\varepsilon) = (1 + \varepsilon\alpha^*(\varepsilon))T$*-періодичний розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється на* T*-періодичний розв'язок* $x(t) = e^{Jt}\xi^*$, $x(0) = \xi^*$, $\xi^* \in D'_\alpha$, *породжуючої лінійної однорідної системи (2).*

Доведення аналогічне до доведення теореми 3 [7].

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 318 p.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Чуйко С. М.* Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 9. — С. 1180–1186.
4. *Бойчук А. А.* Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. — 1998. — **50**, № 2. — С. 162–171.
5. *Ле Льюнг Тай.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем дифференциальных уравнений // Там же. — 1978. — **30**, № 3. — С. 309–317.
6. *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка // Там же. — 2006. — **58**, № 4. — С. 472–489.
7. *Король І. І.* Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь // Там же. — 2005. — **57**, № 4. — С. 483–495.
8. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.

Одержано 22.04.08