УДК 517.927.8

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

П. Ф. Самусенко

Нац. пед. ун-т
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9
e-mail: pfsam@ukr.net
psamusenko@ukr.net

We obtain a solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of differential equations with degeneration in the case of a singular limit pencil of matrices.

Получено асимптотическое решение задачи Коши для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырождением в случае сингулярного граничного пучка матриц.

Систематичні дослідження систем лінійних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних і змінними коефіцієнтами було розпочато у 80-х роках минулого століття. Так, у роботах [1, 2] наведено умовний поділ зазначених систем на регулярні і сингулярні, знайдено канонічну форму, до якої зводиться регулярна система, введено поняття загального розв'язку типу Коші і досліджено питання про існування та єдиність розв'язку відповідної початкової задачі. При цьому з допомогою техніки напівобернених матриць початкову систему було зведено до гібридної (алгебраїчно-диференціальної), що дозволило застосовувати розроблені раніше методи інтегрування. Після такого зведення, взагалі кажучи, кронекерева структура відповідної в'язки матриць змінюється, що вимагає накладання додаткових умов. Для нелінійних систем у вказаних роботах розгляд було обмежено випадком „ранг-степінь".

Лінійні сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — квадратні матриці n-го порядку такі, що

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(t), \quad B(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_s(t),$$

ε — малий параметр, було розглянуто в роботах [3, 4]. Зокрема, в роботі [5] знайдено досить загальні достатні умови зведення виродженої системи до центральної канонічної форми. Це дозволило з'ясувати структуру загального розв'язку системи (1) та визначити показники степенів параметра ε, за якими слід будувати асимптотичні розвинення шуканих розв'язків.

Нелінійні сингулярно збурені системи

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon) \tag{2}$$

за умови регулярності граничної в'язки матриць розглянуто у статтях [6, 7].

У випадку сингулярної граничної в'язки матриць асимптотичні властивості розв'язків вироджених систем досліджено в роботі [8].

У даній статті побудовано розв'язок задачі Коші

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon), \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{4}$$

де $B(t)$ — квадратна матриця n-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, за умови сингулярності в'язки $f_x(x,t,0) - \lambda B(t)$, $f_x(x,t,0)$ — квадратна матриця n-го порядку, стовпцями якої є $\dfrac{\partial f_i(x,t,0)}{\partial x_j}$, $i,j = \overline{1,n}$.

Отже, нехай:

1) елементи матриці $B(t)$ є нескінченно диференційовними на відрізку $[0;T]$;

2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ має нескінченну кількість неперервних частинних похідних за всіма змінними на множині

$$G = \{(x,t,\varepsilon) : \|x\| \le a, 0 \le t \le T, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}, \|x_0\| < a;$$

3) рівняння $f(x,t,0) = 0$ для всіх $t \in [0;T]$ має нескінченно диференційовний розв'язок $x = \varphi(t,\alpha)$, $t \in [0;T]$, $\alpha \in D(\alpha)$, де α — деякий параметр, а $D(\alpha)$ — область зміни параметра α;

4) в'язка матриць $f_x(x,t,0) - \lambda B(t)$ є сингулярною, має один мінімальний індекс $p > 0$ для стовпців і один мінімальний індекс $q > 0$ для рядків, а також один „скінченний" елементарний дільник кратності $r > 1$ та один „нескінченний" елементарний дільник кратності $s > 1$, до того ж $p + q + r + s = n$;

5) $\operatorname{Re}\lambda_0(t) < 0$, де $\lambda_0(t)$ — власне значення матриці $f_x(x,t,0)$ відносно $B(t)$.

Тоді існують неособливі на відрізку $[0;T]$ матриці $P(t)$, $Q(t)$ такі, що

$$P(t)f_x(x,t,0)Q(t) = \Omega_0(t), \;\; P(t)B(t)Q(t) = H,$$

де

$$\Omega_0(t) = \operatorname{diag}\{M_p, M_q, E_s, J_r + \lambda_0(t)E_r\}, \quad H = \operatorname{diag}\{N_p, N_q, J_s, E_r\},$$

$$M_p = (m_{ij}^{(p)})_{i=\overline{1,p},j=\overline{1,p+1}}, \quad m_{ij}^{(p)} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \ne i+1, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,p+1}, \end{cases}$$

$$M_q = (m_{ij}^{(q)})_{i=\overline{1,q+1},j=\overline{1,q}}, \quad m_{ij}^{(q)} = \begin{cases} 1, & i = j+1, \\ 0, & i \ne j+1, \quad i = \overline{1,q+1}, \quad j = \overline{1,q}, \end{cases}$$

$$N_p = (n_{ij}^{(p)})_{i=\overline{1,p},j=\overline{1,p+1}}, \quad n_{ij}^{(p)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,p+1}, \end{cases}$$

$$N_q = (n_{ij}^{(q)})_{i=\overline{1,q+1},j=\overline{1,q}}, \quad n_{ij}^{(q)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \quad i = \overline{1,q+1}, \quad j = \overline{1,q}, \end{cases}$$

$$J_r = (\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,r}}, \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1, \quad i,j = \overline{1,r}, \end{cases}$$

J_s утворено аналогічно до J_r, E_r та E_s — одиничні матриці r- та s-го порядку відповідно [4, с. 143, 144]. Зазначимо, що $P(t), Q(t) \in C^{\infty}_{[0;T]}$ [4, с. 26].

У системі (3) покладемо $x(t,\varepsilon) = Q(t)y(t,\varepsilon)$ і домножимо обидві її частини зліва на $P(t)$. Тоді будемо мати

$$\varepsilon H \frac{dy}{dt} = g(y,t,\varepsilon), \tag{5}$$

$$y(0,\varepsilon) = y_0, \tag{6}$$

де

$$g(y,t,\varepsilon) = P(t)f(Q(t)y,t,\varepsilon) - \varepsilon H Q^{-1}(t)Q'(t)y, \quad y_0 = Q^{-1}(0)x_0.$$

Розв'язок задачі (5), (6) шукатимемо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon). \tag{7}$$

Тут $\overline{y}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \overline{y}_s(t)$ — регулярний ряд, а $\Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s y(\tau)$ — примежовий ряд, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ [9, с. 48].

Підставимо ряд (7) у систему (5)

$$\varepsilon H \frac{d\overline{y}}{dt} + H \frac{d\Pi y}{d\tau} = g(\overline{y} + \Pi y, t, \varepsilon) \tag{8}$$

і запишемо $g(\overline{y} + \Pi y, t, \varepsilon)$ таким чином:

$$g(\overline{y}(t,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), t, \varepsilon) = g(\overline{y}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + (g(\overline{y}(t,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), t, \varepsilon) - g(\overline{y}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)) \equiv$$
$$\equiv \overline{g}(t,\varepsilon) + \Pi g(\tau,\varepsilon).$$

Зобразимо вектор-функції $\overline{g}(t,\varepsilon)$ та $\Pi g(\tau,\varepsilon)$ у вигляді формальних рядів за степенями ε :

$$\overline{g}(t,\varepsilon) = g(\overline{y}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = g(\overline{y}_0(t), t, 0) + \varepsilon(\overline{g}_y(t)\overline{y}_1(t) + g_1(t)) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^s(\overline{g}_y(t)\overline{y}_s(t) + g_s(t)) + \ldots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \overline{g}_s(t),$$

де елементи матриці $\overline{g}_y(t) = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_1^n$ обчислюються в точці $(\overline{y}_0(t), t, 0)$, а вектори $\overline{g}_s(t)$ виражаються через $\overline{y}_k(t)$, $k < s$;

$$\Pi g(\tau, \varepsilon) = g(\overline{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\overline{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) =$$

$$= g(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0) - g(\overline{y}_0(0), 0, 0) + \varepsilon(g_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + G_1(\tau)) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^s(g_y(\tau)\Pi_s y(\tau) + G_s(\tau)) + \ldots \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s g(\tau),$$

де елементи матриці $g_y(\tau)$ обчислюються в точці $(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, а вектори $G_s(\tau)$ виражаються через $\Pi_k y(\tau) m$, $k < s$.

У системі (8) зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ :

$$\varepsilon H \frac{d\,\overline{y}}{dt} = \overline{g}(t, \varepsilon), \tag{9}$$

$$H \frac{d\Pi y}{d\tau} = \Pi\, g(\tau, \varepsilon). \tag{10}$$

У тотожностях (9), (10) зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Зокрема, для ε^0 матимемо

$$g(\overline{y}_0(t), t, 0) = 0, \tag{11}$$

$$H \frac{d\Pi_0 y(\tau)}{d\tau} = g(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0) - g(\overline{y}_0(0), 0, 0). \tag{12}$$

З умови 3 випливає, що $\overline{y}_0(t) = Q^{-1}(t)\varphi(t, \alpha_0(t))$, де $\alpha_0(t)$ — функція, що буде визначена нижче. Тому система (12) набере вигляду

$$H \frac{d\Pi_0 y(\tau)}{d\tau} = g(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0). \tag{13}$$

Далі, нехай виконується умова

6) система (13) на проміжку $[0; \infty)$ має нескінченно диференційовний розв'язок $\Pi_0 y = \Pi_0 y(\tau)$, $\tau \geq 0$, такий, що $\Pi_0 y(0) = y_0 - \overline{y}_0(0)$ і для будь-якого $k = 0, 1, \ldots$ $\Pi_0^{(k)} y(\tau) \to 0$, $\tau \to \infty$, до того ж

$$\|Q(0)\overline{y}_0(0)\| + \|Q(0)\|\, \|\Pi_0 y\,(t/\varepsilon)\,\| \leq a_0 < a,$$

де $\|\Pi_0 y\,(\tau)\,\| = \sup\limits_{\tau \in [0; \frac{T}{\varepsilon}]} \|\Pi_0 y\,(\tau)\,\|$.

Зрівнюючи в (9) коефіцієнти при ε, дістаємо

$$\overline{g}_y(t)\overline{y}_1(t) = H\, \frac{d\,\overline{y}_0(t)}{dt} - g_1(t). \tag{14}$$

Система (14) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли

$$\{g_1(t)\}_{p+1} = 0, \quad t \in [0;T],$$

тобто

$$\{g_\varepsilon(Q^{-1}(t)\varphi(t,\alpha_0(t)),t,0)\}_{p+1} = 0. \tag{15}$$

Нехай виконується умова

7) рівняння (15) на відрізку $[0;T]$ має нескінченно диференційовний розв'язок $\alpha_0 = \alpha_0(t)$, до того ж $\alpha(t) \in D(\alpha)$ для всіх $t \in [0;T]$.

Тоді загальний розв'язок (14) можна записати у вигляді

$$\overline{y}_1(t) = Q^{-1}(t)\varphi_\alpha(t,\alpha_0(t))\alpha_1(t) + \widetilde{y}_1(t), \tag{16}$$

$\alpha_1(t)$ — функція, що буде визначена нижче, $\widetilde{y}_1(t)$ — частинний розв'язок (14) (за побудовою $(g_y(Q^{-1}(t)\varphi(t,\alpha_0(t)),t,0))Q^{-1}(t)\varphi_\alpha(t,\alpha_0(t)) \equiv 0$, $t \in [0;T]$ [10, с. 36]).

Зазначимо, що перша компонента вектора $Q^{-1}(t)\varphi_\alpha(t,\alpha_0(t))$ дорівнює 1, решта дорівнюють 0.

Зрівнюючи в (9) коефіцієнти при ε^k, $k \geq 2$, приходимо до такої умови розв'язності відповідної системи:

$$\{\widetilde{y}\,'_{k-1}\}_{p+2} - \{g_k(t)\}_{p+1} = 0, \tag{17}$$

де $\widetilde{y}_{k-1}$ визначається аналогічно до $\widetilde{y}_1$ ($\{\,\}_i$ — i-та компонента відповідного вектора).

Нехай мають місце умови:

8) $\dfrac{\partial^m\{g(\overline{y}_0(0),0,0)\}_{p+1}}{\partial y_1^{m_1}\ldots\partial y_s^{m_s}} = 0$, $s = \overline{1,n}$, $m_1 + \ldots + m_s = m$, $m \geq 2$;

9) $\dfrac{\partial^2\{g(\overline{y}_0(0) + \theta\Pi_0(t/\varepsilon),0,0)\}_i}{\partial y_k \partial y_s} = 0$, $i,k,s = \overline{1,n}$, $\theta \in (0;1)$, $t \in [0;T]$;

10) $\dfrac{\partial^2\{g(\overline{y}_0(0),0,0)\}_{p+1}}{\partial y_1 \partial\varepsilon} \neq 0$.

Тоді рівність (17) визначає $\alpha_{k-1} = \alpha_{k-1}(t)$, $t \in [0;t_0]$, $t_0 \leq T$ (за побудовою $\overline{y}_{k-1}(t) = Q^{-1}(t)\varphi_\alpha(t,\alpha_0(t))\alpha_{k-1}(t) + \widetilde{y}_{k-1}(t)$).

Згідно зі структурою матриць H та $(g_y(\tau))$ запишемо систему (10) у вигляді

$$N_p\frac{d\Pi_{k1}y(\tau)}{d\tau} = M_p\Pi_{k1}y(\tau) + G_{k1}(\tau),$$

$$N_q\frac{d\Pi_{k2}y(\tau)}{d\tau} = M_q\Pi_{k2}y(\tau) + G_{k2}(\tau),$$

$$J_s\frac{d\Pi_{k3}y(\tau)}{d\tau} = \Pi_{k3}y(\tau) + G_{k3}(\tau),$$

$$\frac{d\Pi_{k4}y(\tau)}{d\tau} = (\lambda_0(0)E_r + J_r)\Pi_{k4}y(\tau) + G_{k4}(\tau).$$

Тут $\Pi_k y(\tau) = \operatorname{col}(\Pi_{k1}y(\tau), \Pi_{k2}y(\tau), \Pi_{k3}y(\tau), \Pi_{k4}y(\tau))$, $\Pi_{k1}y(\tau), \Pi_{k2}y(\tau), \Pi_{k3}y(\tau), \Pi_{k4}y(\tau)$ — вектор-функції, що містять $p+1$, q, s та r компонент $\Pi_k y(\tau)$ відповідно; $G_{ki}(\tau)$, $i = \overline{1,4}$, утворені аналогічно.

Далі, нехай виконується умова

11) має місце рівність

$$\{G_{k2}(\tau)\}_{p+1} + \{G'_{k2}(\tau)\}_{p+2} + \ldots + \{G^{(q)}_{k2}(\tau)\}_{p+q+1} = 0, \quad \tau \geq 0.$$

Тоді

$$\{\Pi_{k1}y(\tau)\}_i = \{\Pi'_{k1}y(\tau)\}_{i-1} - \{G_{k1}(\tau)\}_{i-1}, \quad i = \overline{2, p+1}$$

($\{\Pi_{k1}y(\tau)\}_1$ буде визначено нижче),

$$\Pi_{k2}y(\tau) = -\sum_{i=0}^{q-1} J_q^i \frac{d^i G_{k2}(\tau)}{d\tau^i}, \quad \Pi_{k3}y(\tau) = -\sum_{i=0}^{s-1} J_s^i \frac{d^i G_{k3}(\tau)}{d\tau^i},$$

$$\Pi_{k4}y(\tau) = \exp((\lambda_0(0)E_r + J_r)\tau)c_4 + \int_0^\tau \exp((\lambda_0(0)E_r + J_r)(\tau - s)G_{k4}(s)ds.$$

Таким чином, при відповідному виборі $\{\Pi_{k1}y(\tau)\}_1$ $\Pi_k y(\tau) \to 0$, $\tau \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots$.

Нехай

12) $\overline{y}_{ki}(0) + \Pi_{ki}y(0) = 0$, $k \geq 1$, $i = 2, 3$, де $\overline{y}_{ki}(0)$ побудовано аналогічно до $\Pi_{ki}y(0)$ (умова 12 виконується, якщо, наприклад, $\overline{y}_{0i}(t) \equiv 0$, $t \in [0; t_0]$, $i = 2, 3$; $\Pi_{0i}y(\tau) \equiv 0$, $\tau \geq 0$, $i = 2, 3$; вектор-функції $g_i(y, t, \varepsilon)$, $i = 2, 3$, не містять компонент векторів y_1, y_4; $g_i(y_0, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$, $i = 2, 3$ ($g_2(y_0, 0, \varepsilon)$, $g_3(y_0, 0, \varepsilon)$ та y_1, y_4 побудовано відповідно до аналогічних вектор-функцій $\Pi_{ki}y(\tau)$).

Тоді довільні сталі, що містять вектор-функції $\Pi_{k1}y(\tau)$ та $\Pi_{k4}y(\tau)$, можна підібрати так, щоб

$$\overline{y}_k(0) + \Pi_k y(0) = 0, \quad k \geq 1.$$

Покажемо, що побудований формальний розв'язок (7) є рівномірним асимптотичним розвиненням „точного" розв'язку задачі (5), (6) на відрізку $[0; t_0]$.

Матриця $\Omega_0(t) - \lambda H$ для довільного λ має H-жорданів ланцюжок векторів довжини $p+1$

$$\varphi_1^{(1)}(\lambda) \equiv \varphi_1(\lambda) = \sum_{i=0}^{p} \lambda^i e_{i+1}, \quad \varphi_1^{(j)}(\lambda) = ((\Omega_0(t) - \lambda H)^- H)^{j-1}\varphi_1(\lambda), \quad j = \overline{2, p+1}, \tag{18}$$

де e_i — вектор, i-та компонента якого дорівнює 1, решта дорівнюють 0; $(\Omega_0(t) - \lambda H)^-$ — напівобернена матриця до матриці $\Omega_0(t) - \lambda H$.

Якщо $\lambda = \lambda_0(t)$, то крім ланцюжка (18) матриця $\Omega_0(t) - \lambda H$ має H-жорданів ланцюжок векторів $\varphi_2^{(i)}$, $i = \overline{1, r}$, довжини r, який складається з власного вектора $\varphi_2^{(1)}$ матриці $\Omega_0(t)$

відносно H, що відповідає власному значенню $\lambda_0(t)$, та H-приєднаних векторів $\varphi_2^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \varphi_2^{(r)}$. При цьому

$$\varphi_2^{(1)} \equiv \varphi_2 = e_{p+q+s+2}, \quad \varphi_2^{(i)} = e_{p+q+s+i+1}, \quad i = \overline{2, r}.$$

Матриця H також має два $\Omega_0(t)$-жорданових ланцюжки векторів

$$\widetilde{\varphi}_1^{(1)} \equiv \widetilde{\varphi}_1 = e_{p+1}, \quad \widetilde{\varphi}_1^{(i)} = e_{p+2-i}, \quad i = \overline{2, p+1},$$

$$\widetilde{\varphi}_2^{(1)} \equiv \widetilde{\varphi}_2 = e_{p+q+2}, \quad \widetilde{\varphi}_2^{(j)} = e_{p+q+1+j}, \quad j = \overline{2, s},$$

довжини $p+1$ та s відповідно, що задовольняють співвідношення

$$H\widetilde{\varphi}_1^{(1)} = 0, \quad H\widetilde{\varphi}_1^{(i)} = \Omega_0(t)\widetilde{\varphi}_1^{(i-1)}, \quad i = \overline{2, p+1},$$

$$H\widetilde{\varphi}_2^{(1)} = 0, \quad H\widetilde{\varphi}_2^{(j)} = \Omega_0(t)\widetilde{\varphi}_2^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, s}.$$

Нехай $\psi_1(\overline{\lambda})$ $(\lambda \neq \lambda_0(t))$ — елемент нуль-простору матриці $(\Omega_0(t) - \lambda H)^*$. Тоді

$$\psi_1(\overline{\lambda}) = \sum_{i=0}^{q} \overline{\lambda}^i e_{p+i+1},$$

$\overline{\lambda}$ — число, спряжене до λ.

Якщо $\lambda = \lambda_0(t)$, то нуль-простір матриці $(\Omega_0(t) - \lambda H)^*$ визначається двома базисними векторами: $\psi_1(\lambda_0)$ та $\psi_2 = e_n$.

Нуль-простір матриці H^* також визначається двома базисними векторами $\widetilde{\psi}_1 = e_{p+q+1}$, $\widetilde{\psi}_2 = e_{p+q+s+1}$. При цьому вектори ψ_2 та $\widetilde{\psi}_2$ можна підібрати так, щоб [4, с. 144 – 147]

$$(H((\Omega_0(t) - \lambda H)^- H)^{i-1}\varphi_1(\lambda), \psi_1(\overline{\lambda})) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$(((\Omega_0(t) - \lambda_0(t)H)^- H)^{i-1}\varphi_2, \psi_1(\overline{\lambda}_0)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$(((\Omega_0(t) - \lambda_0(t)H)^- H)^{i-1}\varphi_2, \psi_2) = 0, \quad i = \overline{1, r-1},$$

$$(((\Omega_0(t) - \lambda_0(t)H)^- H)^{r-1}\varphi_2, \psi_2) = 1,$$

$$\Omega_0(t)(H^-\Omega_0(t))^p\widetilde{\varphi}_1 = 0, \quad (\Omega_0(t)(H^-\Omega_0(t))^{i-1}\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_j) = 0, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$(\Omega_0(t)(H^-\Omega_0(t))^{i-1}\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_j) = 0, \quad j = 1, 2; \quad i = \overline{1, s-1},$$

$$(\Omega_0(t)(H^-\Omega_0(t))^{s-1}\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_1) = 0, \quad (\Omega_0(t)(H^-\Omega_0(t))^{s-1}\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2) = 1.$$

Нехай мають місце умови:

13) рівняння

$$(\Omega_1(t)\varphi_1(\omega_0), \psi_1(\overline{\omega}_0)) = 0, \quad t \in [0; T], \tag{19}$$

де $\Omega_1(t) = g_{y\varepsilon}(\overline{y}_0(t), t, 0)$, має корені $\omega_{01}(t), \ldots, \omega_{0k}(t)$ сталої кратності $r_1, \ldots, r_k$ відповідно, до того ж $r_1 + \ldots + r_k = p + q$;

14) функція $\lambda_0 = \lambda_0(t)$ для будь-якого $t \in [0;T]$ не є коренем рівняння (19);

15) $\det \begin{pmatrix} (\Omega_1(t)\varphi_1(\lambda_0), \psi_1(\overline{\lambda}_0)) & (\Omega_1(t)\varphi_2, \psi_1(\overline{\lambda}_0)) \\ (\Omega_1(t)\varphi_1(\lambda_0), \psi_2) & (\Omega_1(t)\varphi_2, \psi_2) \end{pmatrix} \neq 0,\ t \in [0;T]$;

16) $\det \begin{pmatrix} (\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_1) & (\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_1) \\ (\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_2) & (\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2) \end{pmatrix} \neq 0,\ t \in [0;T]$;

17) $(\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_1) \neq 0$, $(\Omega_1(t)\widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2) \neq 0$, $t \in [0;T]$.

Тоді система

$$\varepsilon H \frac{dy}{dt} = \Omega(t,\varepsilon)\, y, \quad \Omega(t,\varepsilon) = \Omega_0(t) + \varepsilon\Omega_1(t),$$

має r_j, $j = \overline{1,k}$, формальних лінійно незалежних розв'язків

$$y_{ij}(t,\varepsilon) = u_{ij}(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_{ij}(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1, r_j},$$
$$u_{ij}(t,\varepsilon) = \varphi_1(\omega_{0j}(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_j^k u_{ijk}(t), \quad \lambda_{ij}(t,\varepsilon) = \omega_{0j}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_j^k \lambda_{ijk}(t), \tag{20}$$
$$\mu_j = \sqrt[r_j]{\varepsilon}, \quad j = \overline{1,k},$$

r формальних лінійно незалежних розв'язків

$$y_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1,r},$$
$$u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_{0ik}(t),\ \ \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_{ik}(t), \tag{21}$$
$$\mu = \sqrt[r]{\varepsilon},$$

та $s-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків [4, с. 147 – 157]

$$\widetilde{y}_i(t,\varepsilon) = \widetilde{u}_i(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\nu^s}\int\limits_0^t \frac{dt}{\xi_i(t,\varepsilon)}\right), \quad i = \overline{1, s-1},$$
$$\widetilde{u}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \widetilde{u}_{ik}(t), \quad \xi_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi_{ik}(t), \tag{22}$$
$$\nu = \sqrt[s-1]{\varepsilon}.$$

Спряжена система

$$\varepsilon H^* \frac{dy}{dt} = -\Omega^*(t,\varepsilon) y$$

також має r_j, $j = \overline{1,k}$, формальних лінійно незалежних розв'язків

$$y_{ij}(t,\varepsilon) = v_{ij}(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta_{ij}(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1, r_j},$$

$$v_{ij}(t,\varepsilon) = \psi_1(-\overline{\omega}_{0j}(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_j^k v_{ijk}(t), \quad \eta_{ij}(t,\varepsilon) = -\overline{\omega}_{0j}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_j^k \eta_{ijk}(t), \qquad (23)$$

$$\mu_j = \sqrt[r_j]{\varepsilon}, \quad j = \overline{1,k},$$

r формальних лінійно незалежних розв'язків

$$y_i(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta_i(t,\varepsilon)dt\right), \quad i = \overline{1,r},$$

$$v_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{0ik}(t), \quad \eta_i(t,\varepsilon) = -\overline{\lambda}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \eta_{ik}(t), \qquad (24)$$

$$\mu = \sqrt[r]{\varepsilon},$$

та $s-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків

$$\widetilde{y}_i(t,\varepsilon) = \widetilde{v}_i(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\nu^s}\int\limits_0^t \frac{dt}{\kappa_i(t,\varepsilon)}\right), \quad i = \overline{1, s-1},$$

$$\widetilde{v}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \widetilde{v}_{ik}(t), \quad \kappa_i(t,\varepsilon) = -\overline{\xi}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \kappa_{ik}(t), \qquad (25)$$

$$\nu = \sqrt[s-1]{\varepsilon}.$$

Нехай

$$Q_1(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon), \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2], \quad P_1(t,\varepsilon) = [V_m(t,\varepsilon), \widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2]^*,$$

де $U_m(t,\varepsilon), V_m(t,\varepsilon)$ — прямокутні $(n \times (n-2))$-матриці, що містять $m+1$ перших членів виразів (20) – (25):

$$U_m(t,\varepsilon) = [u_{11}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, u_{r_1,1}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, u_{1k}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, u_{r_k,k}^{(m)}(t,\varepsilon),$$

$$u_1^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,u_r^{(m)}(t,\varepsilon),\widetilde{u}_1^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,\widetilde{u}_{s-1}^{(m)}(t,\varepsilon)],$$

$$V_m(t,\varepsilon)=[v_{11}^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,v_{r_1,1}^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,v_{1k}^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,v_{r_k,k}^{(m)}(t,\varepsilon),$$

$$v_1^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,v_r^{(m)}(t,\varepsilon),\widetilde{v}_1^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,\widetilde{v}_{s-1}^{(m)}(t,\varepsilon)].$$

Далі припускатимемо виконання умов:

18) $k\geq\max\{p,q\}$;

19) $\det(H(\Omega_0(t)-\omega_{0i}(t)H)^{-}\Omega_1(t)\varphi_1(\omega_{0i}(t)),\widetilde{\varphi}_1(-\overline{\omega}_{0j}(t))-\Omega_1(t)(\Omega_0(t)-\omega_{0j}(t)H)^{-}\times$ $\times H\varphi_1(\omega_{0i}(t)),\widetilde{\varphi}_1(-\overline{\omega}_{0j}(t)))_{i,j=\overline{1,p+q}}\neq 0,\ t\in[0;T]$.

У системі (5) виконаємо заміну

$$y(t,\varepsilon)=y_m(t,\varepsilon)+z(t,\varepsilon), \tag{26}$$

де $y_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\overline{y}_s(t)+\Pi_s y(\tau))$, а $z(t,\varepsilon)$ — нова невідома вектор-функція. Матимемо

$$\varepsilon H\frac{dz}{dt}=\Omega(t,\varepsilon)z+h(z,t,\varepsilon), \tag{27}$$

де $h(z,t,\varepsilon)=g(y_m(t,\varepsilon)+z,t,\varepsilon)-\Omega(t,\varepsilon)z-\varepsilon H\dfrac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}$. Зазначимо, що $\|h(0,t,\varepsilon)\|=$ $=O(\varepsilon^{m+1}),\ t\in[0;T]$.

Нехай

$$z(t,\varepsilon)=Q_1(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon).$$

Тоді, домноживши обидві частини системи (27) зліва на $P_1(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\varepsilon\begin{pmatrix}V_m^*HU_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{du}{dt}=\begin{pmatrix}V_m^*LU_m & V_m^*L\widetilde{\varphi}_1 & V_m^*L\widetilde{\varphi}_2\\ \widetilde{\psi}_1^*LU_m & \widetilde{\psi}_1^*L\widetilde{\varphi}_1 & \widetilde{\psi}_1^*L\widetilde{\varphi}_2\\ \widetilde{\psi}_2^*LU_m & \widetilde{\psi}_2^*L\widetilde{\varphi}_1 & \widetilde{\psi}_2^*L\widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix}u+Ph(Qu,t,\varepsilon), \tag{28}$$

де $L(t,\varepsilon)=\Omega(t,\varepsilon)-\varepsilon H\dfrac{d}{dt}$.

За побудовою

$$\|V_m^*L\widetilde{\varphi}_1\|=O(\varepsilon),\quad \|V_m^*L\widetilde{\varphi}_2\|=O(\varepsilon),\quad \|\widetilde{\psi}_1^*LU_m\|=O(\varepsilon),$$

$$\|\widetilde{\psi}_1^*L\widetilde{\varphi}_1\|=\varepsilon\{\Omega_1\}_{p+q+1,p+1}\neq 0,\quad \|\widetilde{\psi}_1^*L\widetilde{\varphi}_2\|=O(\varepsilon),\quad \|\widetilde{\psi}_2^*LU_m\|=O(\varepsilon),$$

$$\|\widetilde{\psi}_2^*L\widetilde{\varphi}_1\|=O(\varepsilon),\quad \|\widetilde{\psi}_2^*L\widetilde{\varphi}_2\|=\varepsilon\{\Omega_1\}_{p+q+s+1,p+q+2}\neq 0$$

для всіх $t\in[0;T]$.

Нехай

$$L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)=HU_m(t,\varepsilon)S_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}}C(t,\varepsilon),\quad \gamma=\max\{r_1,\ldots,r_k,r,s-1\},$$

де

$$S_m(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon), \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon), \Lambda_m^{(3)}(t,\varepsilon)\} \equiv \operatorname{diag}\{s_1^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, s_{n-2}^{(m)}(t,\varepsilon)\},$$

$$\Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_{11}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_{r_1,1}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_{1k}^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_{r_k,k}^{(m)}(t,\varepsilon)\},$$

$$\Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{(m)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_r^{(m)}(t,\varepsilon)\},$$

$$\Lambda_m^{(3)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{(\nu\xi_1^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1}, \ldots, (\nu\xi_{s-1}^{(m)}(t,\varepsilon))^{-1}\},$$

$C(t,\varepsilon)$ — $(n \times (n-2))$-матриця, компоненти якої обмежені на відрізку $[0;T]$.

Якщо $D(t,\varepsilon) = V_m^*(t,\varepsilon)HU_m(t,\varepsilon)$ і

$$D(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} D_{11}(t,\varepsilon) & D_{12}(t,\varepsilon) & D_{13}(t,\varepsilon) \\ D_{21}(t,\varepsilon) & D_{22}(t,\varepsilon) & D_{23}(t,\varepsilon) \\ D_{31}(t,\varepsilon) & D_{32}(t,\varepsilon) & D_{33}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де $D_{11}(t,\varepsilon)$ та $D_{22}(t,\varepsilon)$ — квадратні матриці $(p+q)$- та r-го порядку відповідно, то

$$D^{-1}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{-1}) \\ O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{p}}) \\ O(\varepsilon^{-1}) & O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{-1-\frac{1}{s-1}}) \end{pmatrix},$$

$$(V_m^*(t,\varepsilon)HU_m(t,\varepsilon))^{-1}V_m^*(t,\varepsilon)LU_m(t,\varepsilon) = S_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1-\frac{1}{s-1}}F(t,\varepsilon),$$

$$(\widetilde{\psi}_i^* L(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi}_i)^{-1}\widetilde{\psi}_i^* L(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1}f_i(t,\varepsilon), \quad i = 1,2,$$

$F(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця $(n-2)$-го порядку, $f_i(t,\varepsilon)$ — $(n-2)$-вимірний вектор-рядок.

Нехай u_1 — вектор, що містить перші $n-2$ компоненти вектора u, u_2 — $(n-1)$-ша компонента вектора u, а u_3 — n-та компонента вектора u. Тоді система (28) набере вигляду

$$\varepsilon\frac{du_1}{dt} = (S_m + \varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1-\frac{1}{s-1}}F)u_1 + (V_m^*HU_m)^{-1}V_m^*\Omega(\widetilde{\varphi}_1 u_2 + \widetilde{\varphi}_2 u_3) + (V_m^*HU_m)^{-1}l_1(u,t,\varepsilon),$$

$$u_2 = \varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1}f_1(t,\varepsilon)u_1 - (\widetilde{\psi}_1^*\Omega\widetilde{\varphi}_1)^{-1}(\widetilde{\psi}_1^*\Omega\widetilde{\varphi}_2 u_3 + l_2(u,t,\varepsilon)), \tag{29}$$

$$u_3 = \varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1}f_2(t,\varepsilon)u_1 - (\widetilde{\psi}_2^*\Omega\widetilde{\varphi}_2)^{-1}(\widetilde{\psi}_2^*\Omega\widetilde{\varphi}_1 u_2 + l_3(u,t,\varepsilon)),$$

де $l(u,t,\varepsilon) = P_1 h(Qu,t,\varepsilon)$, а $l_1(u,t,\varepsilon)$, $l_2(u,t,\varepsilon)$ та $l_3(u,t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й u_1, u_2 та u_3 відповідно.

Нехай виконується умова

20) $\det\begin{pmatrix} 1 & (\widetilde{\psi}_1^*\Omega\widetilde{\varphi}_1)^{-1}\widetilde{\psi}_1^*\Omega\widetilde{\varphi}_2 \\ (\widetilde{\psi}_2^*\Omega\widetilde{\varphi}_2)^{-1}\widetilde{\psi}_2^*\Omega\widetilde{\varphi}_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, $t \in [0;T]$.

Тоді система (29) еквівалентна системі

$$u_1(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t S_m(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right) r(u,s,\varepsilon)ds,$$
$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi_i(u,t,\varepsilon), \quad i=2,3, \tag{30}$$

де

$$r(u,s,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{m+1}{\gamma}-1-\frac{1}{s-1}}F(s,\varepsilon)u_1(s,\varepsilon)+$$
$$+ (V_m^*(s,\varepsilon)HU_m(s,\varepsilon))^{-1}(V_m^*(s,\varepsilon)\Omega(s,\varepsilon)(\widetilde{\varphi}_1 u_2(s,\varepsilon)+\widetilde{\varphi}_2 u_3(s,\varepsilon))+l_1(u,s,\varepsilon)),$$

а $\varphi_i(u,t,\varepsilon)$, $i=2,3$, визначаються з відповідної системи за формулами Крамера.

Нехай мають місце умови:

21) $\operatorname{Re} s_i^{(m)}(t,\varepsilon) \le 0$, $i=\overline{1,n-2}$, $t\in[0;T]$;

22) існують неперервні функції $\eta(t,\varepsilon)$, $0\le t\le T$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, та $\theta(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0\le t\le T$, $0\le\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, $0\le\varepsilon_2\le\varepsilon_0$, такі, що

$$\|g_y(u,t,\varepsilon)-g_y(v,t,\varepsilon)\| \le \eta(t,\varepsilon)\|u-v\|,$$

$$\|g_{y\varepsilon}(u,t,\varepsilon_1)-g_{y\varepsilon}(u,t,\varepsilon_2)\| \le \theta(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\varepsilon_1-\varepsilon_2|,$$

до того ж

$$\eta(t,\varepsilon)\varepsilon^{-2-\frac{1}{s-1}} = O(1), \quad \theta(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\varepsilon_i^{-\frac{1}{s-1}} = O(1), \quad i=1,2,$$

для всіх u, v, що задовольняють нерівності $\|Q(t)u\|\le a$, $\|Q(t)v\|\le a$, $t\in[0;T]$;

23) $\{g(y_0,0,\varepsilon)\}_{p+q+1} \equiv \{g(y_0,0,\varepsilon)\}_{p+q+s+1} \equiv 0$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$.

Тоді, використовуючи метод послідовних наближень, можна довести існування та єдиність розв'язку $u=u(t,\varepsilon)$ системи (30) такого, що $u(0,\varepsilon)=0$, до того ж $\|u(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m-1-\frac{1}{s-1}})$, $t\in[0;t_0]$ [9, с. 72–74].

Теорема. *Нехай виконуються умови 1–23. Тоді для всіх* $m\ge\gamma\left(2+\dfrac{1}{s-1}\right)-1$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, *існує єдиний розв'язок* $x=x(t,\varepsilon)$ *задачі (3), (4) такий, що*

$$\|x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{m-1-\frac{1}{s-1}}), \quad t\in[0;t_0], \quad t_0\le T,$$

де $x_m(t,\varepsilon)=Q(t)y_m(t,\varepsilon)$.

1. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука, 1989. — 223 с.

2. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 319 с.

3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.

4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.

5. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10 – 15.

6. *Радченко С. П., Самусенко П. Ф.* Про періодичні розв'язки нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика, механіка. — 2006. — Вип. 15. — С. 26 – 31.

7. *Самусенко П. Ф.* Про побудову асимптотичних розв'язків нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України „КПІ" . — 2006. — № 1. — С. 144 – 150.

8. *Самкова Г. Е., Шарай Н. В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 224 – 236.

9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.

Одержано 28.11.07